§7 Trigonometrische Polynome und *FOURIER*-Reihen

In diesem Abschnitt werden trigonometrische Polynome und *FOURIER*-Reihen eigeführt und einige ihrer Eigenschaften bewiesen. Diese werden am Ende dazu genutzt zwei ζ-Funktionen herzuleiten.

Bei diesem Thema geht es um 2π-periodische Funktionen, d.h. um Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Solche periodischen Funktionen sind z.B. die trigonometrischen Polynome, die wie folgt definiert sind.

(7.1) Definition (trigonometrisches Polynom)
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ein *trigonometrisches Polynom*, wenn es $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{1}$$

Nun kann auch ein Beispiel angegeben werden.

(7.2) Beispiel
Sei f ein trigonometrisches Polynom, $x \in \mathbb{R}, x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ und für alle $k \in \{0, .., n\}$ sei $a_k = 1, b_k = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-ikx} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx} && \text{(s.u.)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} - \frac{e^0}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} e^{i(k-n)x} && \text{(Indexverschiebung)}\\
&= \frac{1}{2}e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx}\\
&= \frac{1}{2}e^{-inx}\frac{1-e^{(2n+1)ix}}{1-e^{ix}} && \text{(geom. Summe)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{-inx}-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}} && \text{(mit } e^{-ix/2} \text{ erweitern)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\\
&= \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}
\end{aligned}
$$

wobei verwendet wurde, dass

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

sowie mit Indexverschiebung und Kommutativgesetz

$$(*) \sum_{k=-n}^{-1} e^k = \sum_{k=1}^{n} e^{k-n-1} = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}$$

Der Begriff aus (7.1) führt uns zu folgender Aussage.

(7.3) Lemma
Die Koeffizienten a_k, b_k in (1) sind eindeutig bestimmt und werden gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0, 1, ..., n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1, ..., n$$

Beweis
Dazu müssen wir zunächst folgende Orthogonalitätsrelationen beweisen.
Für $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx = 0 \qquad \forall\, k \neq l$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx = 0 \qquad \forall\, k, l$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos(kx))^2 dx \qquad = \int_0^{2\pi} (\sin(kx))^2 dx = \pi \qquad \forall\, k \geq 1.$$

denn mit den Additionstheoremen ist

$$\cos((k+l)x) = \cos(kx)\cos(lx) - \sin(kx)\sin(lx) \tag{2}$$
$$\cos((k-l)x) = \cos(kx)\cos(lx) + \sin(kx)\sin(lx) \tag{3}$$
$$\sin((l+k)x) = \sin(lx)\cos(kx) + \cos(lx)\sin(kx) \tag{4}$$
$$\sin((l-k)x) = \sin(lx)\cos(kx) - \cos(lx)\sin(kx) \tag{5}$$

Das ergibt

$$\cos((k+l)x) + \cos((k-l)x) = 2\cos(kx)\cos(lx), \tag{6}$$
$$\sin((l+k)x) + \sin((l-k)x) = 2\sin(lx)\cos(kx) \tag{7}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+l)x) + \cos((k-l)x)dx \qquad \text{(mit (6))} \\
&= \frac{1}{2(k+l)} \sin((k+l)x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2(k-l)} \sin((k-l)x)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2(k+l)}(\sin((k+l)2\pi) - \sin(0)) \\
&\quad + \frac{1}{2(k-l)}(\sin((k-l)2\pi) - \sin(0)) \\
&= 0 \qquad \forall\, k \neq l
\end{aligned}$$

Außerdem folgt aus den obigen Additionstheoremen

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx &= \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx) - \cos((k+l)x)dx \qquad \text{(mit (2))}\\ &= \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx - \frac{1}{(k+l)}\sin((k+l)x)\Big|_0^{2\pi}\\ &\overset{\text{s.o.}}{=} 0 \qquad \forall\, k \neq l\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((l+k)x) + \sin((l-k)x)dx \qquad \text{(mit (7))}\\ &= -\frac{1}{2(k+l)}\cos((k+l)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(l-k)}\cos((l-k)x)\Big|_0^{2\pi}\\ &= -\frac{1}{2(k+l)}\underbrace{(\cos((k+l)2\pi) - \cos(0))}_{=0}\\ &\quad -\frac{1}{2(l-k)}\underbrace{(\cos((l-k)2\pi) - \cos(0))}_{=0}\\ &= 0 \qquad \forall\, l \neq k\end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt mit Gleichung (7)

$$\sin(2kx) = 2\sin(kx)\cos(kx),$$

dass

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(kx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2kx)dx\\ &= -\frac{1}{4k}\cos(2kx)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{4k}(\cos(4k\pi) - \cos(0))\\ &= 0 \qquad \forall\, l = k\end{aligned}$$

Es ist für alle $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} (\cos(kx))^2 dx &= \frac{1}{2k}(\sin(kx)\cos(kx) + kx)\Big|_0^{2\pi} \text{ (Analysis II)} \\ &= \frac{1}{2k} 2\pi k = \pi\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} (\sin(kx))^2 dx = \int\limits_0^{2\pi} 1 - (\cos(kx))^2 dx &= \int\limits_0^{2\pi} 1 dx - \int\limits_0^{2\pi} (\cos(kx))^2 dx \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} 2\pi - \pi = \pi\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}f(x)\cos(lx) &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right)\cos(lx) \qquad \text{(nach (7.1))} \\ &= \frac{a_0}{2}\cos(lx) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)\cos(lx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\cos(lx)\end{aligned}$$

Da $f(x)\cos(lx)$ als Komposition von stetigen Funktionen *RIEMANN*-integrierbar ist, gilt für $l = 0$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) dx + \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) dx \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_0^{2\pi} \cos(kx) dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int\limits_0^{2\pi} \sin(kx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} x\Big|_0^{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{-\cos(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} \\ &= a_0\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \underbrace{(\sin(2\pi k) - \sin(0))}_{0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{-b_k}{k} \underbrace{(\cos(2\pi k) - \cos(0))}_{0} \\ &= a_0\pi\end{aligned}$$

Also folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt dann für $l = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(lx)dx &= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\cos(lx)dx \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\cos(lx)dx + \int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)\cos(lx)dx + \int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} b_k\sin(kx)\cos(lx)dx \\
&= \underbrace{\frac{a_0}{2\,l}\sin(lx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} a_k\int\limits_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(lx)dx + \sum_{k=1}^{n} b_k\int\limits_0^{2\pi}\sin(kx)\cos(lx)dx \\
&= \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{n} a_k\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(lx)dx}_{=0} + a_l\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}(\cos(lx))^2dx}_{=\pi} + \sum_{k=1}^{n} b_k\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\sin(kx)\cos(lx)dx}_{=0} \\
&= a_l\pi.
\end{aligned}$$

Damit ist für $l = 0, ..., n$

$$a_l = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(lx)dx.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
f(x)\sin(lx) &= \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\sin(lx) \qquad \text{(nach (7.1))} \\
&= \frac{a_0}{2}\sin(lx) + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)\sin(lx) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(kx)\sin(lx).
\end{aligned}$$

Da $f(x)\sin(lx)$ als Komposition von stetigen Funktionen *RIEMANN*-integrierbar ist, gilt für $l = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\sin(lx)dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right) \sin(lx)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\sin(lx)dx + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)\sin(lx)dx + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)\sin(lx)dx \\
&= \underbrace{-\frac{a_0}{2l}\cos(lx)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx}_{=0} + \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{n} b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx}_{=0} + b_l \underbrace{\int_0^{2\pi} (\sin(lx))^2 dx}_{=\pi} \\
&= b_l \pi.
\end{aligned}$$

Also ist für $l = 1, ..., n$

$$b_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(lx)dx.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Nun betrachten wir komplexwertige trigonometrische Polynome, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ in (1). Man definiere

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)\ \forall\, k \geq 1 \text{ und } c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{8}$$

und erhält damit

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n} b_k(e^{ix} - e^{-ix}) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i})e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i})e^{-ikx} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i})e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1}(\frac{a_{-k}}{2} - \frac{b_{-k}}{2i})e^{ikx} \qquad \text{(Kommutativgesetz)} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1}\frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k})e^{ikx} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} - c_0 \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.
\end{aligned}
$$

Hiermit leiten wir dazu über, Integrale von komplexwertigen Funktionen zu betrachten. Dazu benötigen wir eine Definition:
Sei $f = u + iv\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist

$$
\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \in \mathbb{C},
$$

falls die rechte Seite existiert.

Für $f(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i\ \sin(mt), m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gilt: $(**)$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \int_a^b e^{imt}dt \\
&= \int_a^b \cos(mt)dt + i\int_a^b \sin(mt)dt \\
&= \frac{1}{m}\sin(mt)\Big|_a^b - \frac{i}{m}\cos(mt)\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{m}(\sin(mt) - i\ \cos(mt)\Big|_a^b
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{im}(\cos(mt) + i\ \sin(mt))\Big|_a^b$$
$$= \frac{1}{im}e^{imt}\Big|_a^b$$

Also folgt mit $e^{2\pi mi} = \cos(2\pi m) + i\ \sin(2\pi m) = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)dt &= \frac{1}{im}e^{imt}\Big|_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{im}\underbrace{(e^{2\pi mi} - 1)}_{=0}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Aus (7.3) und Gleichung (8) ergibt sich das folgende Korollar.

(7.4) Korollar
Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ ein trigonometrisches Polynom, so gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \qquad |k| \leq n$$

Beweis
Für $k = 0$ ist mit (7.3) und Gleichung (8)

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\underbrace{\cos(0)}_{1=e^0}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i0x}dx.$$

Für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) && \text{(mit Gleichung (8))}\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx - i\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx\right) && \text{(mit (7.3))}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx) - i\, f(x)\sin(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(kx) - i\ \sin(kx))dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

denn

$$\cos(kx) - i\ \sin(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - \frac{i}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) = e^{-ikx} \tag{9}$$

Da für $k \geq 1$ nach (8) die Aussage $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ gilt, folgt für $k \leq -1$, dass $c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k})$ ist.
Also gilt für $k \leq -1$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) && \text{(mit Gleichung (8))}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(-kx)dx + i\int_0^{2\pi} f(x)\sin(-kx)dx\right) && \text{(mit (7.3.))}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx) - i\, f(x)\sin(kx)dx && \text{(s.u.)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(kx) - i\ \sin(kx))dx\\
&\overset{(9)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx},
\end{aligned}$$

denn $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$. $\square$

Dieses Korollar führt uns zur folgenden Definition

(7.5) Definition (*FOURIER*-Koeffizient/*FOURIER*-Reihe)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die über $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbar ist. Dann heißen die Zahlen

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

die *FOURIER* − *Koeffizienten* von f und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

die *FOURIER* − *Reihe* von f.

Nun betrachten wir die Konvergenz der *FOURIER*-Reihe. Diese konvergiert genau dann, wenn die Partialsumme $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, n \in \mathbb{N}$, konvergiert (Analysis II, VII (1.8.)). Im Allgemeinen konvergiert die *FOURIER*-Reihe allerdings nicht und falls sie doch konvergieren sollte, dann nicht notwendigerweise gegen $f(x)$. Das folgende Lemma macht einige Aussagen über die Konvergenz.

(7.6) Lemma
a) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{|k| \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = \lim_{|k| \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = 0.$$

b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch, so gilt für die *FOURIER*-Koeffizienten

$$\lim_{|k| \to \infty} a_k = \lim_{|k| \to \infty} b_k = \lim_{|k| \to \infty} c_k = 0.$$

Beweis
a) Für $k \neq 0$ gilt mit partieller Integration

$$\int_a^b f(x) \sin(kx) dx = -\frac{1}{k} f(x) \cos(kx) \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) dx,$$

wobei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{k}\cos(kx)$ stetig differenzierbar sind.
Weil f und f' stetige Funktionen sind, nehmen sie auf dem Kompaktum $[a,b]$ ihr Maximum an. Das heißt es existiert ein $M > 0$, zum Beispiel $M := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$, sodass

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)dx\right| &= \left|-\frac{1}{k}f(x)\cos(kx)\Big|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)dx\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{k}f(x)\cos(kx)\Big|_a^b\right| + \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\cos(kx)dx\right| && \text{(Dreiecksungl.)} \\
&\leq \left|\frac{1}{k}f(x)\Big|_a^b\right| + \frac{1}{|k|}\int_a^b \left|f'(x)\cos(kx)\right| dx \\
&\leq \left|\frac{1}{k}(f(b)-f(a))\right| + \frac{1}{|k|}\int_a^b \left|f'(x)\right| dx \\
&\leq \frac{1}{|k|}(|f(b)|+|f(a)|) + \frac{1}{|k|}\int_a^b M\, dx && \text{(Dreiecksungl.)} \\
&\leq \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|} \xrightarrow{|k|\to\infty} 0
\end{aligned}$$

und analog gilt für $k \neq 0$ mit partieller Integration

$$\int_a^b f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{k}f(x)\sin(kx)\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\sin(kx)dx,$$

wobei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{k}\sin(kx)$ stetig differenzierbar ist. Mit oben definiertem M gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos(kx)dx\right| &= \left|\frac{1}{k}f(x)\sin(kx)\Big|_a^b - \frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\sin(kx)dx\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{k}f(x)\sin(kx)\Big|_a^b\right| + \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(x)\sin(kx)dx\right| && \text{(Dreiecksungl.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{1}{k} f(x) \Big|_a^b \right| + \frac{1}{|k|} \int_a^b \left| f'(x)\sin(kx) \right| dx \\
&\leq \left| \frac{1}{k}(f(b) - f(a)) \right| + \frac{1}{|k|} \int_a^b \left| f'(x) \right| dx \\
&\leq \frac{1}{|k|}(|f(b)| + |f(a)|) + \frac{1}{|k|} \int_a^b M\, dx \qquad \text{(Dreiecksungl.)} \\
&\leq \frac{2M}{|k|} + \frac{M(b-a)}{|k|} \xrightarrow{|k|\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar und 2π-periodisch, also ist $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ auch stetig differenzierbar. Also gilt mit a) und den Grenzen $a = 0$ und $b = 2\pi$:

$$\lim_{|k|\to\infty} a_k = \lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi} \lim_{|k|\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0,$$

$$\lim_{|k|\to\infty} b_k = \lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi} \lim_{|k|\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{|k|\to\infty} c_k &= \lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \overset{(3)}{=} \lim_{|k|\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)(\cos(kx) - i\ \sin(kx))dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{|k|\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx - i \lim_{|k|\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{2\pi}\, 0 - \frac{i}{2\pi}\, 0 = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Kommen wir nun zum nächsten Lemma.

(7.7) Lemma
Wenn die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, dann sind γ_k die *FOURIER*-Koeffizienten von f.

Beweis
Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \gamma_n e^{inx}$. Die Funktionen f_n sind als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig und damit integrierbar. Da außerdem nach Vorraussetzung $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergiert, kann man Summation und Integration vertauschen (VII (2.7)). Es folgt

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx && \text{(nach (7.5.))} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx} e^{-ikx} dx && \text{(nach Def.)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq k}}^{\infty} \gamma_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx + \frac{1}{2\pi} \gamma_k \int_0^{2\pi} 1 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq k}}^{\infty} \gamma_n \frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)x} \Big|_0^{2\pi} + \gamma_k \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq k}}^{\infty} \gamma_n \frac{1}{i(n-k)} \underbrace{(e^{i(n-k)2\pi} - 1)}_{=0} + \gamma_k \\
&= \gamma_k.
\end{aligned}$$

□

Zur Veranschaulichung betrachten wir nun ein Beispiel.

(7.8) Beispiel
Betrachte die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$

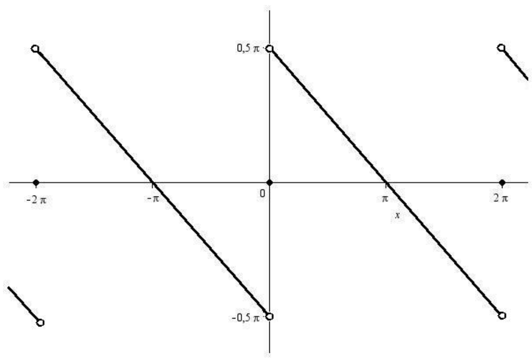

Abbildung 1: Graph der Reihe

Es liegt absolute Konvergenz vor, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(kx)}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(kx)|}{k}$$

nach dem *DIRICHLET*-Kriterium konvergiert. Denn $|\sin(kx)|$ ist beschränkt und $\frac{1}{k}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Also gilt für $0 < x < 2\pi$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2ik} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{2ik} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2ik} - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{-2ik} \qquad \text{(mit } (*)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2ik} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{2ik} \\
&= \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2ik}
\end{aligned}$$

Zeige nun, dass

$$\sum_{\substack{k=-\infty, \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2ik} = \frac{\pi - x}{2}$$

Dazu ist

$$\int_{\pi}^{x} \cos(kt)dt = \frac{1}{k} \sin(kt) \Big|_{\pi}^{x} = \frac{1}{k} \sin(kx) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Mit Beispiel (7.2) gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)dt = \int_{\pi}^{x} \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}dt = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}dt - \int_{\pi}^{x} \frac{1}{2}dt \\
&= F_n(x) - \frac{1}{2}(x-\pi)
\end{aligned}$$

mit

$$F_n(x) := \int_{\pi}^{x} \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}dt$$

Nach dem Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ ist

$$\sin((n+1/2)t) = \sin(nt)\cos(t/2) + \cos(nt)\sin(t/2)$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(nt)\cos(t/2) + \cos(nt)\sin(t/2)}{2\sin(t/2)}dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(nt)\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} \frac{\cos(nt)}{2}dt
\end{aligned}$$

Seien $f\colon [\pi, x] \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}$ und $g\colon [\pi, x] \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{2}$ Funktionen. Als Komposition stetiger Funktionen bzw. als Konstante sind sie stetig differenzierbar.
Dann gilt mit (7.6)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} f(t)\sin(nt)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{x} g(t)\cos(nt)dt = 0$$

Also folgt, dass $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(F_n(x) - \frac{1}{2}(x-\pi) \right) = \frac{\pi - x}{2}$$

Für *FOURIER*-Reihen ist es sinnvoll, einen anderen Konvergenzbegriff einzuführen. Dazu sei $\mathcal{V} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ f$ ist 2π-periodisch und über $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbar$\}$ und das Skalarprodukt für $f, g \in \mathcal{V}$ gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

$\mathcal{V}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, denn für $f, g, h \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

a)

$$\begin{aligned}\langle f+g, h \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f+g)(x)\overline{h(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{h(x)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\overline{h(x)} dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle f, g+h \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{(g+h)(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} + f(x)\overline{h(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{h(x)} dx = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle\end{aligned}$$

b)

$$\langle \lambda f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda f(x)\overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi}\lambda \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = \lambda \langle f, g \rangle$$

und

$$\langle f, \lambda g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{\lambda g(x)} dx = \frac{1}{2\pi}\overline{\lambda} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle$$

c)

$$\overline{\langle g,f\rangle} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\overline{f(x)}dx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(x)\overline{f(x)}}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \langle f,g\rangle$$

Außerdem gilt für das Skalarprodukt, dass

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0} dx \geq 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{V}.$$

Aber: Aus $\langle f,f\rangle = 0$ kann man nicht $f \equiv 0$ folgern, was das folgende Beispiel zeigt. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert wie folgt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\langle f,f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = 0$$

aber $f(x)$ ist nicht identisch Null.

Nun definieren wir uns die Seminorm:

$$\|f\| := \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx} \qquad \forall\, f \in \mathcal{V}.$$

Dazu müssen wir noch zeigen, dass dies wirklich eine Norm darstellt. Also sind noch die Normeigenschaften zu untersuchen.

a)

$$\|0\| = \sqrt{\langle 0,0\rangle} = \sqrt{\int_a^b 0\; dx} = 0$$

und es gilt

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \underbrace{\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \forall\, 0 \neq f \in \mathcal{V}$$

b)

$$\|\lambda f\| = \sqrt{\langle \lambda f, \lambda f\rangle} = \sqrt{\int_a^b \lambda^2 (f(x))^2 dx} = |\lambda| \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$$
$$= |\lambda| \sqrt{\langle f, f\rangle} = |\lambda| \|f\| \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \forall\, f \in \mathcal{V}.$$

c)

$$\|f+g\| = \sqrt{\langle f+g, f+g\rangle} = \sqrt{\int_a^b |(f+g)(x)|^2\, dx}$$
$$\leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} + \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\, dx} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$
$$= \sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle} = \|f\| + \|g\| \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{V}.$$

Die Funktionen $e_k(x) := e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$, in $\mathcal{V}$ erfüllen:

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_k \overline{e_l} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(kx) + i\sin(kx))(\cos(lx) - i\sin(lx)) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx) dx - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx) dx \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx) dx \\
&\overset{\text{(7.3)Bew}}{=} \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi} = 1, & k = l. \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit bilden die Funktionen e_k ein Orthonormalsystem.

(7.9) Lemma
Die Funktion $f \in \mathcal{V}$ habe die *FOURIER*-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Definiere $g := \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k \in \mathcal{V}$. Dann gilt :

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k \langle e_k, \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j \rangle && \text{(Skalarprodukt linear in 1. Komp.)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k \sum_{j=-n}^{n} \overline{c_j} \, \langle e_k, e_j \rangle && \text{(Skalarprodukt semilinear in 2. Komp.)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{c_k} \langle e_k, e_k \rangle && \text{(da } e_k \perp e_j \quad \forall\, k \neq j) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 && \text{(da } \langle e_k, e_k \rangle = 1 \;\forall\, k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \langle f, \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \langle f, c_k e_k \rangle && \text{(Skalarprodukt semilinear in 2. Komp.)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{c_k e_k} \, \mathrm{d}x && \text{(mit Def. Skalarprodukt)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{c_k} e^{-ikx} \, \mathrm{d}x && \text{(siehe unten)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} c_k && \text{(Definition } c_k \text{)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}
$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $\overline{c_k e^{ikx}} = \overline{c_k} e^{-ikx}$, denn wegen $\cos(y) = \cos(-y)$ und $\sin(y) = -\sin(-y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\overline{c_k e^{ikx}} = \overline{c_k} \cdot \overline{e^{ikx}} = \overline{c_k} \cdot \overline{(\cos(kx) + i \sin(kx))}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{c_k}(\cos(kx) - i\sin(kx)) \\
&= \overline{c_k}(\cos(-kx) + i\sin(-kx)) \\
&= \overline{c_k}e^{-ikx}
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist also $\langle f, g\rangle = \langle g, g\rangle$, außerdem ist $\langle f, g\rangle$ reell, und damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\langle g, f\rangle &= \overline{\langle f, g\rangle} && \text{(Skalarprodukt hermitesch)} \\
&= \langle f, g\rangle && \text{(da reell)}
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung, denn:

$$
\begin{aligned}
\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2 &= \|f - g\|^2 \\
&= \langle f - g, f - g\rangle \\
&= \langle f - g, f\rangle - \langle f - g, g\rangle && \text{(Skalarprodukt sesquilinear)} \\
&= \langle f, f\rangle - \langle g, f\rangle - \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle && \text{(Skalarprodukt sesquilinear)} \\
&= \langle f, f\rangle - \langle g, g\rangle - \langle g, g\rangle + \langle g, g\rangle && \text{(da } \langle g, f\rangle = \langle f, g\rangle = \langle g, g\rangle) \\
&= \langle f, f\rangle - \langle g, g\rangle \\
&= \|f\|^2 - \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}
$$

□

Da $\|\cdot\|$ eine Seminorm ist, also insbesondere $\|\cdot\| \geq 0$, folgt durch Äquivalenzumformung des letzten Resultats

$$
\begin{aligned}
& \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2 \geq 0 \\
\iff\quad & \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \geq 0 \\
\iff\quad & \|f\|^2 \geq \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}
$$

sowie per Grenzübergang für $n \to \infty$ der folgende

(7.10) Satz (*BESSEL*sche Ungleichung)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die über $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbar ist. Dann erfüllen die *FOURIER*-Koeffizienten c_k von f die Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

(7.11) Definition
Seien $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, 2π-periodische und über $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbare Funktionen. Man sagt, dass $\{f_n\}_{n \geq 1}$ im *quadratischen Mittel gegen f konvergiert*, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

wenn also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

(7.12) Lemma
Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Konvergenz im quadratischen Mittel. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz im quadratischen Mittel aber noch nicht einmal die punktweise Konvergenz.

Beweis
Seien $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$. Außerdem konvergiere f_n gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$.
Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\epsilon}$ für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [0, 2\pi]$. Daraus folgt:

$$\|f - f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f_n(x))\overline{(f(x) - f_n(x))} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\epsilon}^2 \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon \, dx = \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0, \ x \in [0, 2\pi]$$

Somit ist die erste Behauptung gezeigt.

Seien andererseits $g, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, mit $g(x) \equiv 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n(x)$ definiert durch

$$g_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \in (0, 2\pi) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist g_n *RIEMANN*-integrierbar, da die Anzahl der Unstetigkeitsstellen endlich ist. Die Folge $\{g_n\}_{n\geq 1}$ konvergiert nicht gegen g, da $|g(2\pi) - g_n(2\pi)| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dennoch gilt:

$$\begin{aligned} \|g - g_n\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x) - g_n(x)|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 0 \, dx = 0 \end{aligned}$$

Somit ist auch $\lim_{n\to\infty} \|g - g_n\| = 0$ und es ist ein Beispiel für die zweite Behauptung gefunden.

□

(7.13) Lemma
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische und über $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbare Funktion. Dann konvergiert die *FOURIER*-Reihe von f genau dann im quadratischen Mittel gegen f, wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

Dies ist der Fall, wenn die *BESSEL*sche Ungleichung zur Gleichung wird. Die Gültigkeit dieser Gleichung nennt man *Vollständigkeitsrelation*.

Beweis
Seien $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ die *FOURIER*-Koeffizienten von f, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ die *FOURIER*-Reihe von f, sowie $s_n := \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die zugehörigen Teilsummen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& & \lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & \lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right\|^2 &= 0 \\
&\overset{(7.9)}{\Longleftrightarrow} & \lim_{n\to\infty} \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & \|f\|^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & \|f\|^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & \|f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2
\end{aligned}
$$

□

(7.14) Lemma
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass $f\big|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist. Dann konvergiert die *FOURIER*-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis
Betrachte zuerst den Spezialfall $a \in [0, 2\pi]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, a) \\ 0 & \text{für } x \in [a, 2\pi] \end{cases}$$

Durch Einsetzen in die Definition errechnet man

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \underbrace{e^{-i\cdot 0\cdot x}}_{=1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{a} 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi} 0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{a} 1\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{a} \underbrace{f(x)}_{=1}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{=0}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{a} e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{ik}\right)e^{-ikx}\Big|_0^a = \frac{i}{2k\pi}e^{-ikx}\Big|_0^a \\
&= \frac{i}{2k\pi}(e^{-ika}-1) \qquad\qquad (\text{für } k \neq 0)
\end{aligned}$$

Somit hat man für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
|c_k|^2 = c_k\cdot\overline{c_k} &= \frac{i}{2k\pi}(e^{-ika}-1)\cdot\overline{(\frac{i}{2k\pi}(e^{-ika}-1))} \\
&= \frac{i}{2k\pi}(e^{-ika}-1)\cdot\overline{(\frac{i}{2k\pi})}\cdot\overline{(e^{-ika}-1)} \\
&= \frac{i}{2k\pi}\cdot(-\frac{i}{2k\pi})(e^{-ika}-1)\overline{(e^{-ika}-1)} \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{-ika}-1)\overline{(e^{-ika}-1)} \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{-ika}-1)\cdot\overline{(\cos(-ka)+i\sin(-ka)-1)} \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{-ika}-1)\cdot(\cos(-ka)-i\sin(-ka)-1) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{-ika}-1)\cdot(\cos(ka)+i\sin(ka)-1) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{-ika}-1)\cdot(e^{ika}-1) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{0}-e^{-ika}-e^{ika}+1) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(2-(e^{-ika}+e^{ika})) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(2-(\underbrace{\cos(-ka)}_{=\cos(ka)}+i\underbrace{\sin(-ka)}_{=-\sin(ka)}+\cos(ka)+i\sin(ka))) \\
&= \frac{1}{4k^2\pi^2}(2-2\cos(ka)) = \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{a} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{2\pi}
\end{aligned}$$

und $|\cdot| \geq 0$ folgt mit der *BESSEL*schen Ungleichung (Satz (7.10)), dass

$$0 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{a}{2\pi}$$

Also konvergiert $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ absolut. Damit ist insbesondere jede Teilreihe absolut konvergent und die unendliche Summe darf auseinander gezogen werden. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= |c_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(-ka)}{2(-k)^2\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2} \qquad \text{(absolute Konvergenz)} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2} \qquad \text{(da } \cos(x) \text{ gerade)} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{2k^2\pi^2} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{k^2} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\cos(ka)}{k^2} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ka)}{k^2} \qquad \text{(absolute Konvergenz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1.8)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ka)}{k^2} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{(\pi-a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right) \\
&= \frac{3a^2 + 2\pi^2 - 3\pi^2 + 6a\pi - 3a^2 + \pi^2}{12\pi^2} \\
&= \frac{a}{2\pi}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Also ist $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$, woraus mit Lemma (7.13) die Konvergenz im quadratischen Mittel folgt.

Analog kann man die Aussage zeigen für

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [0, a] \\ 0, & \text{für } x \in (a, 2\pi] \end{cases}$$

Sei f nun eine beliebige Treppenfunktion. Es existieren Funktionen $f_1, \dots, f_N$ der oben beschriebenen Art sowie reelle Konstanten $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, so dass man f als (gewichtete) Summe der f_k, $k \in \{1, \dots, N\}$ darstellen kann:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k f_k(x)$$

Bezeichne S_n bzw. $S_{k,n}$ die n-te Partialsumme der *FOURIER*-Reihe von f bzw. f_k, so folgt

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k S_{k,n}$$

Beweis:
Seien $\{c_{k,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die *FOURIER*-Koeffizienten von f_k. Es ist

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \gamma_j f_j(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} c_{j,n} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \gamma_j S_{j,n}
\end{aligned}
$$

Die f_k entsprechen für alle $k \in \{1, \dots, N\}$ den im Spezialfall betrachteten Funktionen. Also konvergieren die *FOURIER*-Reihen der f_k im quadratischen Mittel gegen f_k und es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} \gamma_k f_k - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k S_{k,n} \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} \gamma_k f_k - \gamma_k S_{k,n} \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} \gamma_k (f_k - S_{k,n}) \right\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \|\gamma_k (f_k - S_{k,n})\| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\gamma_k| \|(f_k - S_{k,n})\| && \text{(Normeigenschaft)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} |\gamma_k| \lim_{n\to\infty} \|(f_k - S_{k,n})\| && \text{(endliche Summe)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} |\gamma_k| \cdot 0 = 0 && \square
\end{aligned}
$$

(7.15) Satz
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass f auf $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbar ist. Dann konvergiert die *FOURIER*-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f.
Sind c_k die *FOURIER*-Koeffizienten von f, so gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

Beweis
Es genügt, die Konvergenz der *FOURIER*-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f zu zeigen. Die Gültigkeit der Vollständigkeitsrelation folgt dann mit Lemma (7.13).

Sei also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische und auf $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbare Funktion. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass f reellwertig ist, denn:

> Angenommen, der reelle Fall der Aussage gelte.
> Es existieren 2π-periodische Funktionen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die *RIEMANN*-integrierbar sind und für die $f(x) = (u + iv)(x)$ gilt. Seien $S_{f,n}, S_{u,n}, S_{v,n}$ die n-te Partialsumme der *FOURIER*- Reihe von f, u bzw. v sowie c_k, a_k, b_k die zugehörigen *FOURIER*-Koeffizienten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f - S_{f,n}\| &= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right\| \\
&= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \right\| \\
&= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u + iv)(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \right\| \\
&= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x + i \int_0^{2\pi} v(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \right] \right\| \\
&= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x + i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \right] \right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}(a_k + i \cdot b_k) \right\| \\
&= \left\| u + iv - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} a_k - i \cdot \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} b_k \right\| \\
&= \left\| u - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} a_k + i \cdot (v - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} b_k) \right\| \\
&= \| u - S_{u,n} + i(v - S_{v,n}) \| \\
&\leq \underbrace{\| u - S_{u,n} \|}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} + \underbrace{\| v - S_{v,n} \|}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \qquad \xrightarrow{n \to \infty} 0
\end{aligned}
$$

da angenommen wurde, dass die Behauptung für reelle Funktionen, also auch für u, v gilt. Somit konvergiert die *FOURIER*-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f. Es genügt also, die Aussage für reelle Funktionen zu zeigen.

Außerdem kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:

Angenommen, die Aussage wurde für alle g mit der zusätzlichen Voraussetzung gezeigt, dass $|g(x)| \leq 1$ auf $[0, 2\pi]$.
Das Intervall $[0, 2\pi]$ ist kompakt und f auf diesem Intervall *RIEMANN*-integrierbar. Aus Analysis II ist bekannt, dass dann ein (reelles) Maximum von f auf dem Intervall existiert. Also gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M > 0$, so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [0, 2\pi]$. Somit lässt sich $f(x)$ schreiben als $f(x) = M \cdot g(x)$ für eine 2π-periodische und auf $[0, 2\pi]$ *RIEMANN*-integrierbare Funktion g, für die außerdem $|g(x)| \leq 1$ gilt.
Seien $S_{f,n}$, $S_{g,n}$ die n-te Partialsumme der *FOURIER*-Reihe von f bzw. g sowie c_k, $\tilde{c}_k$ die zugehörigen *FOURIER*-Koeffizienten.

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\| f - S_{f,n} \| &= \left\| M \cdot g - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right\| \\
&= \left\| M \cdot g - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \right\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| M \cdot g - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (M \cdot g)(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x \right\| \\
&= \left\| M \cdot \left(g - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x \right) \right\| \\
&= \left\| M \cdot \left(g - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \tilde{c}_k \right) \right\| \\
&= M \cdot \left\| g - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \tilde{c}_k \right\| \\
&= M \cdot \| g - S_{g,n} \| \qquad \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

wobei letzteres aus der Annahme folgt, dass die Behauptung gezeigt wurde, falls $|g(x)| \leq 1$ auf $[0, 2\pi]$. Somit kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $|f(x)| \leq 1$.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aus Analysis II ist bekannt, dass sich das Integral einer *RIEMANN*-integrierbaren Funktion beliebig genau durch das Integral einer Treppenfunktion approximieren lässt. Es existieren also Treppenfunktionen φ, ψ auf $[0, 2\pi]$ mit

$$-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$$

sowie

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi(x) - f(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{8}\pi\epsilon^2 \qquad \text{und} \qquad \left| \int_0^{2\pi} f(x) - \varphi(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{8}\pi\epsilon^2$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \psi(x) - \varphi(x) \,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \psi(x) - f(x) + f(x) - \varphi(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\psi(x) - f(x)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \underbrace{f(x) - \varphi(x)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&= \left|\int_0^{2\pi} \psi(x) - f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^{2\pi} f(x) - \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{1}{8}\pi\epsilon^2 + \frac{1}{8}\pi\epsilon^2 = \frac{1}{4}\pi\epsilon^2\end{aligned}$$

Für $g := f - \varphi$ gilt dann

$$\begin{aligned}|g|^2 &= |f-\varphi|^2 \\ &\leq |(f-\varphi)+(\psi-f)|^2 && (\text{da } (f-\varphi),(\psi-f)\geq 0) \\ &= |\psi-\varphi|^2 = |\psi-\varphi|\cdot|\psi-\varphi| \\ &\leq |1-(-1)|\cdot|\psi-\varphi| && (\text{da } -1\leq\psi,\varphi\leq 1) \\ &= 2|\psi-\varphi| \\ &= 2(\psi-\varphi) && (\text{da } \psi\geq\varphi)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2(\psi-\varphi)(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\psi(x)-\varphi(x))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\pi\epsilon^2 = \frac{1}{4}\epsilon^2\end{aligned}$$

Seien $S_{f,n}, S_{\varphi,n}, S_{g,n}$ die n-ten Partialsummen der *FOURIER*-Reihen von f, φ bzw. g, sowie $c_k, c_{\varphi,k}$ und $c_{g,k}$ die zugehörigen *FOURIER*-Koeffizienten. Es gilt:

$$\begin{aligned}S_{f,n} &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}c_k \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi+g)(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x \right] \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} (c_{\varphi,k} + c_{g,k}) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} c_{\varphi,k} + \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} c_{g,j} \\
&= S_{\varphi,n} + S_{g,n}
\end{aligned}
$$

Auf φ ist Lemma (7.14) anwendbar. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\varphi - S_{\varphi,n}\| \leq \frac{1}{2}\epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N$$

Daher ergibt sich für alle $n \geq N$

$$
\begin{aligned}
\|f - S_{f,n}\| &= \|(\varphi + g) - (S_{\varphi,n} + S_{g,n})\| \\
&= \|(\varphi - S_{\varphi,n}) + (g - S_{g,n})\| \\
&\leq \|(\varphi - S_{\varphi,n})\| + \|(g - S_{g,n})\| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= \|(\varphi - S_{\varphi,n})\| + \sqrt{\|g\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_{g,k}|^2} && \text{(mit (7.9))} \\
&\leq \|(\varphi - S_{\varphi,n})\| + \sqrt{\|g\|^2} \\
&\leq \frac{1}{2}\epsilon + \sqrt{\frac{1}{4}\epsilon^2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Damit konvergiert die *FOURIER*-Reihe im quadratischen Mittel gegen f und die Behauptung ist gezeigt.

□

(7.16) Beispiel
Aus (7.8) wissen wir, dass die *FOURIER*-Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

für $0 < x < 2\pi$ punktweise gegen die 2π- periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert, mit f definiert als

$$f(0) := 0, \qquad \text{da} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \cdot 0)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 \ \text{ und}$$
$$f(x) := \frac{\pi - x}{2}$$

Wir wollen zeigen, dass die Reihe auf jedem Kompaktum in $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ gleichmäßig konvergiert. Dazu betrachten wir das Intervall $[\delta, 2\pi\text{-}\delta],\ 0 < \delta < \pi$.
Für $x \in [\delta, 2\pi - \delta],\ n \in \mathbb{Z}$ gilt wegen $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$:

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$$

sowie

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad |S_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \\
&= \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \quad \text{da mit } z = a + ib, |z| = a^2 + b^2 \ \text{ und } \ |\operatorname{Im} z| = b^2 \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix(k+1)}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^{(k+1)}\right| \\
&= \left|\frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}\right| \quad \text{(geometrische Summe)} \\
&= \left|\frac{e^{ix(n-\frac{1}{2})} - e^{-i\frac{1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}\right| \quad \text{(erweitern mit } e^{-i\frac{x}{2}}\text{)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left|\cos((n-\frac{1}{2})x) + i\sin((n-\frac{1}{2})x) - \cos(\frac{1}{2}x) + i\sin(\frac{1}{2}x)\right|}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|} && (9)\\
&= \frac{\left|\cos((n-\frac{1}{2})x) - \cos(\frac{1}{2}x) + i(\sin((n-\frac{1}{2})x) + \sin(\frac{1}{2}x))\right|}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|}\\
&= \frac{\sqrt{\cos^2((n-\frac{1}{2})x) - 2\cos((n-\frac{1}{2})x)\cos(\frac{1}{2}x) + \cos^2(\frac{1}{2}x)}}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|}\\
&\quad \frac{\overline{+\sin^2((n-\frac{1}{2})x) + 2\sin((n-\frac{1}{2})x)\sin(\frac{1}{2}x) + \sin^2(\frac{1}{2}x)}}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|}\\
&= \frac{\sqrt{1 - 2(\cos((n-\frac{1}{2})x)\cos(\frac{1}{2}x) - \sin((n-\frac{1}{2})x)\sin(\frac{1}{2}x)) + 1}}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|}\\
&= \frac{\sqrt{2 - 2\cos(((n-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2})x)}}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|}\\
&= \frac{\sqrt{2 - 2\cos(nx)}}{\left|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right|}\\
&\le \frac{2}{\left|e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}\right|}\\
&= \frac{2}{\left|\cos(\frac{x}{2}) + i\sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{x}{2}) + i\sin(\frac{x}{2})\right|} && (9)\\
&= \frac{2}{\left|2i\sin(\frac{x}{2})\right|}\\
&= \frac{1}{\left|\sin(\frac{x}{2})\right|}\\
&\le \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}
\end{aligned}
$$

Sei $n > m > 0$ und $S_k = \sum_{j=1}^{k} \sin(jx)$

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{S_k(x) - S_{k-1}(x)}{k}\right| && \text{(Teleskopsumme)}\\
&= \left|\sum_{k=m}^{n} S_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n(x)}{n+1} - \frac{S_{m-1}(x)}{m}\right| && \text{(umsortieren der Summe)}\\
&\leq \left|\sum_{k=m}^{n} \underbrace{S_k(x)}_{\leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| + \left|\frac{S_n(x)}{n+1}\right| + \left|\frac{S_{m-1}(x)}{m}\right| && \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&\leq \left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| + \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\left(\left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|\right)\\
&= \left|\underbrace{\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}}_{\geq 0}\underbrace{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}\right)}_{\geq 0}\right| + \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\left(\left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|\right) && \text{(Teleskopsumme)}\\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m}\right)\\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\left(\frac{2}{m}\right)\\
&= \frac{2}{m\sin(\frac{\delta}{2})}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \; \exists\, N = N(\epsilon)$ so, dass $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(kx)}{k}\right| < \epsilon \; \forall\, m \geq N$
$\Longrightarrow$ gleichmäßige Konvergenz mit dem Cauchykriterium

Definiere

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

$F(x)$ konvergiert mit *WEIERSTRASS* gleichmäßig, da

$$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

was nach Analysis I konvergent ist.

Betrachte die Reihe der Ableitung. Da $F(x)$ und $F'(x)$ gleichmäßig konvergent sind und $g(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2}$ stetig differenziebar ist, kann Summation und Differentiation vertauscht werden.

$$\begin{aligned}F'(x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(kx)}{k^2}\right)' \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} \\ &= \frac{\pi - x}{2}\end{aligned}$$

Damit ist die Reihe der Ableitung gleichmäßig konvergent auf $[\delta{,}2\pi - \delta]$

$\Longrightarrow F'(x) = \frac{x-\pi}{2}$

$G(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c$ erfüllt $G'(x) = \frac{x-\pi}{2}$

$\Longrightarrow F(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c$

Da F, als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen, stetig ist, gilt:

$$F(0) = \frac{\pi^2}{4} + c = F(2\pi)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} F(x)dx &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c\;dx \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{x^2 - 2\pi x + \pi^2}{4} + c\;dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} x^2 - 2\pi x + \pi^2 dx + 2\pi c \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3 - \pi x^2 + \pi^2 x\Big|_0^{2\pi}\right] + 2\pi c \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{8\pi^3}{3} - 4\pi^3 + 2\pi^3 - 0\right] + 2\pi c\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{8\pi^3}{3} - \frac{6\pi^3}{3}\right] + 2\pi c$$
$$= \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ absolut gleichmäßig konvergiert, kann Summation und Intergration vertauscht werden und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} F(x)dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\sin(kx)|_0^{2\pi}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& & \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c &= 0 \\
&\iff & \frac{-\pi^3}{6} &= 2\pi c \\
&\iff & \frac{-\pi^2}{12} &= c
\end{aligned}$$

Somit gilt für $0 < x \leq 2\pi$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

Sowie für $x = 0$

$$F(0) = \left(\frac{0-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

(7.17) Beispiel
a) Wir haben in (7.16) gesehen, dass für $0 \leq x \leq 2\pi$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{(\pi - x)^2}{4} &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} (e^{ikx} + e^{-ikx})\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ konvergiert gleichmäßig, da oben gezeigt wurde, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ gleichmäßig konvergent ist.

Da $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$ gleichmäßig gegen $f(x) = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ konvergiert, sind die γ_k die *FOURIER*-Koeffizienten von f.

Aufstellen der *FOURIER*-Reihe von f ergibt $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus 0} \frac{1}{2k^2} e^{ikx} + \frac{\pi^2}{12}$. Diese konvergiert gleichmäßig gegen f da sie auf $[0, 2\pi]$ mit $\frac{(\pi-x)^2}{4}$ übereinstimmt.

Die Vollständigkeitsrelation (7.15) liefert

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \|f\|^2$$

Da $\|f\|^2 \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ absolut konvergent und es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \left(\frac{\pi^2}{12}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k^2}\right)^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2k^2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^4}{144} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^4}\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\pi - x)^4}{16} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^4 - 4\pi^3 x + 6\pi^2 x^2 - 4\pi x^3 + x^4}{16} dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{32\pi}\left[\pi^4 x - 2\pi^3 x^2 + 2\pi^2 x^3 - \pi x^4 + \frac{1}{5}x^5\Big|_0^{2\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{32\pi}\left[2\pi^5 - 8\pi^5 + 16\pi^5 - 16\pi^5 + \frac{1}{5}32\pi^5\right]$$
$$= \frac{1}{80}\pi^4$$

da $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$ folgt

$$\frac{\pi^4}{144} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^4} = \frac{\pi^4}{80}$$
$$\iff \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{80} - \frac{\pi^4}{144} = \frac{\pi^4}{180}$$
$$\iff \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

b) Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1, & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

Die *FOURIER*-Koeffizienten sind

$$c_0 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot 1dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -1dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi - 0 + (-2\pi + \pi)\right] = 0$$

und für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-ikx}dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ikx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{ik}\, e^{-ikx}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{ik}\, e^{-ikx}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi ik}\left[e^{-ik\pi} - 1 - e^{-2ik\pi} + e^{-ik\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi ik}\left(2e^{-ik\pi} - 2\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls k gerade,da dann mit (+) } e^{-ik\pi} = 1 \\ \frac{2}{\pi ik}, & \text{falls k ungerade, da dann mit (+) } e^{-ik\pi} = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(+) Da für $k \in 2\mathbb{Z}$ gilt, dass $e^{-ikx} = \underbrace{\cos(kx)}_{=1} - \underbrace{i\sin(kx)}_{=0}$ und

für $k \in (2n+1)\mathbb{Z}$ $e^{-ikx} = \underbrace{\cos(kx)}_{=-1} - \underbrace{i\sin(kx)}_{=0}$

Die *FOURIER*-Reihe von f lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi i(2n+1)}\left(e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine 2π-periodische Funktion, wobei $f|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist. Damit folgt mit Lemma (7.14), dass

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

im quadratischen Mittel gegen f konvergiert. Die Reihe konvergiert aber nicht punktweise gegen f, da:

- für $x = 0$ ist $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\cdot 0)}{2n+1} = 0$ und 0 konvergiert nicht gegen 1
- für $x = \pi$ ist $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)\cdot \pi)}{2n+1} = 0$ und 0 konvergiert nicht gegen -1

(7.18) Satz
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.
Dann konvergiert die *FOURIER*-Reihe von f gleichmäßig gegen f

Beweis
Es gibt eine Zerlegung $0 = t_0 < ... < t_r = 2\pi$, sodass $f|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig differenzierbar ist.

Sei $\varphi_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}$ die stetige Ableitung von $f|_{[t_{j-1},t_j]}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die auf $[t_{j-1}, t_j]$ mit φ_j übereinstimmt für $j = 1, ..., r$.
Für die *FOURIER*-Koeffizienten γ_k von φ gilt nach (7.10)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \le ||\varphi||^2 < \infty$$

Für $k \neq 0$ lassen sich die *FOURIER*-Koeffizienten c_k von f durch partielle Integration aus den *FOURIER*-Koeffizienten von φ gewinnen:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)\cos(kx)dx - i\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)\sin(kx)dx \qquad (\text{da } e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx)) \\
&= \frac{1}{k}\left(f(x)\,\sin(kx)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x)\sin(kx)dx \right) \\
&\quad + \frac{i}{k}\left(f(x)\,\cos(kx)\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x)\cos(kx)dx \right) \\
&= \frac{i}{k}\left(f(x)(-i\sin(kx) + \cos(kx))\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x)(\cos(kx) - i\sin(kx)) \right) \\
&= \frac{i}{k}\left(f(x)\,e^{-ikx}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j(x)e^{-ikx}dx \right)
\end{aligned}$$

damit gilt

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{i}{k}\left(f(x)\ e^{-ikx}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j}\varphi_j(x)e^{-ikx}dx\right)\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\sum_{j=1}^{r}\left(f(x)e^{-ikx}\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j}\varphi_j(x)e^{-ikx}dx\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(f(x)e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikx}dx\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(f(2\pi)e^{-ik2\pi} - f(0) - \int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikx}dx\right) \\
&= -\frac{i}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikx}dx \\
&= -\frac{i}{k}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)e^{-ikx}dx}_{\gamma_k} \\
&= -\frac{i}{k}\gamma_k
\end{aligned}
$$

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$, denn:

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq (|\alpha| - |\beta|)^2 = |\alpha|^2 - 2|\alpha|\cdot|\beta| + |\beta|^2 = |\alpha| - 2|\alpha\beta| + |\beta|^2 \\
\iff\quad & 2|\alpha\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 \\
\iff\quad & |\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$|c_k| = \left|-\frac{i\gamma_k}{k}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2\right)$$

Mit der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Mit *WEIERSTRASS* folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz der *FOURIER*-Reihe von f, da

$$|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k e^{ikx}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k||e^{ikx}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$$

Sie konvergiert mit VII(2.5) gegen eine stetige Funktion. Diese bezeichnen wir mit g. Die *FOURIER*-Reihe konvergiert also im quadratischen Mittel gegen f und g.

$\Longrightarrow$ $\|f - g\| = 0$, da

$$\begin{aligned}
||f - g|| &= ||f - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} - g|| \\
&\leq ||f - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}|| + ||\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} - g|| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von f und g folgt $f = g$:

Denn angenommen $f \neq g$:

Dann $\exists\ \overline{x} \in \mathbb{R}$ sodass $f(\overline{x}) \neq g(\overline{x})$. Da f, g stetig sind, existiert eine Umgebung U von $\overline{x}$ mit $f(x) \neq g(x)\ \forall x \in U$

$$\Rightarrow \quad ||f - g||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f + g)^2(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x\in U} (f+g)^2(x)dx + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x\in[0,2\pi]\setminus U} (f+g)^2(x)dx \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x\in U} \underbrace{(f+g)^2(x)}_{>0} dx > 0
\end{aligned}
$$

Was ein Widerspruch zu $\|f-g\| = 0$ ist.

Also ist $f = g$.

Damit konvergiert die *FOURIER*-Reihe von f absolut gleichmäßig gegen f. $\square$