# Hermite-Polynome

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 04.10.2010

Thomas Heinrichs

„Abel has left mathematicians enough to keep them busy for 500 years.“
– Charles Hermite

Dieser Vortrag behandelt vordergründig die sogenannten *Hermite-Polynome* nach Charles Hermite und einige ihrer Eigenschaften. Außerdem wird ein kurzer Blick auf Charles Hermite geworfen und einige Gebiete genannt, in denen die *Hermite-Polynome* Anwendung finden.

# Inhaltsverzeichnis

# §1 Charles Hermite

Charles Hermite (⋆ 24. Dezember 1822 in Dieuze (Lothringen); † 14. Januar 1901 in Paris) war ein französischer Mathematiker.

Abbildung 1: Charles Hermite ca. 1887

— *Biographie* —

Hermite verließ als Student die École Polytechnique im Streit, nachdem ihm wegen unzureichender Leistungen strenge Bedingungen auferlegt wurden. In den folgenden Jahren entwickelte er sich aus eigener Kraft, im Austausch insbesondere mit Joseph Liouville, zu einem produktiven Mathematiker. 1848 wurde er Lehrbeauftragter, 1869 Professor an der École Polytechnique; von 1876 bis 1897 unterrichtete er nur noch an der Sorbonne. 1856 wurde er in die Académie des Sciences gewählt, 1883 in die römische Accademia dei Lincei.

Hermite stand in engem Austausch mit Joseph Liouville, Charles-François Sturm und Augustin Louis Cauchy; zu seinen Schülern gehörten Gösta Mittag-Leffler, Jacques Hadamard und Henri Poincaré; er heiratete die Schwester von Joseph Bertrand und wurde Schwiegervater von Émile Picard.

— *Beitrag zur Mathematik* —

Hermite arbeitete in Zahlentheorie und Algebra, über orthogonale Polynome und elliptische Funktionen. Er erzielte wichtige Ergebnisse über doppelt periodische Funktionen und Invarianten quadratischer Formen. 1858 löste er eine algebraische Gleichung fünften Grades mit Hilfe elliptischer Funktionen.

1873 erzielte er sein wohl berühmtestes Resultat: Er bewies, dass die eulersche Zahl $e$ transzendent ist; auf Hermites Methode aufbauend bewies Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1882 die Transzendenz der Kreiszahl $\pi$ (Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises).

Folgende mathematische Dinge werden heute nach Hermite benannt:

- Die hermitesche Differentialgleichung $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- die hermiteschen Polynome $H_n(x)$;
- die hermitesche Interpolationsformel;
- die Bezeichnung zweier Matrizen, die adjungiert (also komplex konjugiert und transponiert) zueinander sind, auch als hermitesch konjugiert;
- die hermitesche Normalform für ganzzahlige Matrizen;
- die hermitesche Form;
- die hermitesche Funktion sowie
- der hermitesche Operator.

# §2 Hermite-Polynome

In diesem Abschnitt werden die *Hermite-Polynome*, ihre *erzeugende Funktion*, sowie die *Rekursionsformeln* zur rekursiven Darstellung eingführt.

— *Definition Hermite-Polynome* —

**(2.1) Definition (Hermite-Polynome)**
Die *Hermite-Polynome* $H_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, in $\mathbb{R}[x]$ sind definiert durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

◇

Durch diese Darstellung erhalten wir durch Differenzieren direkt die ersten Hermite-Polynome:

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} e^{-x^2} = 1$$
$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} e^{-x^2}(-2x) = 2x$$
$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = (-1)^3 e^{x^2} e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_4(x) = (-1)^3 e^{x^2} e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

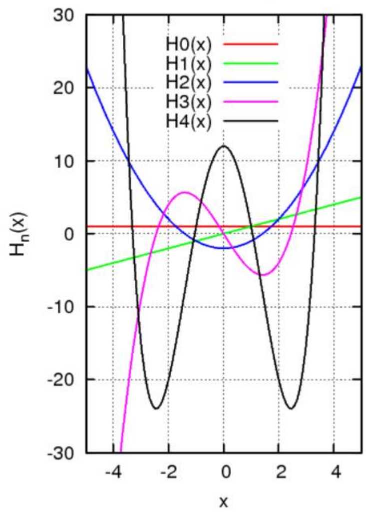


Abbildung 2: Hermite-Polynome

Hiermit leiten wir zum zweiten Unterabschnitt über.

— *Erzeugende Funktion* —

**(2.2) Satz (erzeugende Funktion)**
Für $x, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$w(x,t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

Die Funktion $w$ wird auch *erzeugende Funktion* der Hermite-Polynome genannt. ◇

**Beweis**
Die Funktion $w$ ist von $t \in \mathbb{R}$ abhängig und somit stetig differenzierbar. Daher kann sie für ein festes $x$ um 0 in eine Taylorreihe entwickelt werden. Also hat man

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x,0)}{n!} t^n, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Nun folgt

$$w^{(n)}(x,0) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x,t)\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt-t^2}\right]_{t=0} = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}.$$

Abschließend substituieren wir $u = x - t$ und erhalten

$$(-1)^n e^{x^2} \left[\frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}\right]_{u=x} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x).$$

□

Daraus ergibt sich eine weitere Darstellung in folgendem

**(2.3) Korollar**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. $H_n(x)$ ist ein gerades bzw. ungerades Polynom vom Grad $n$, falls $n$ gerade bzw. ungerade ist. Es gilt

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

und inbesondere für $x = 0$

$$H_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls n ungerade,} \\ (-1)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!}, & \text{falls n gerade.} \end{cases}$$

◇

**Beweis**
Aus (2.2) und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \overset{(2.2)}{=} e^{2xt} e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2xt)^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} t^{2l}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} t^{2l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2xt)^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} t^{2l} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} (2xt)^{2l}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!} t^{2l} \frac{1}{(2n-2l)!}(2xt)^{2n-2l} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!(2n-2l)!}(2x)^{2n-2l} t^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l} t^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}\right) t^{n},
\end{aligned}
$$

da man wegen der absoluten Konvergenz beliebig umordnen darf. Durch Kooeffizientenvergleich von $t^n$ folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{H_n(x)}{n!} &= \sum_{0 \le l \le n/2} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l} = \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^l}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l} \\
\Leftrightarrow H_n(x) &= \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^l n!}{l!(n-2l)!}(2x)^{n-2l}
\end{aligned}
$$

und damit die Behauptung. □

Kommen wir nun zu einer rekursiven Darstellung der Hermite-Polynome im nächsten Unterabschnitt.

— *Rekursionsformeln* —

**(2.4) Satz (Rekursionsformeln)**
Für alle $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt

a) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$,

b) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$,

c) $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$. ◇

**Beweis**

a) Aus (2.2) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}w(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}e^{2xt-t^2} = (2x-2t)e^{2xt-t^2} = (2x-2t)w(x,t)\\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}w(x,t) &- (2x-2t)w(x,t) = 0,\end{aligned}$$

woraus man durch die Potenzreihendarstellung von $w$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n - (2x-2t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n = 0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n + 2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n = 0\end{aligned}$$

erhält. Da die Potenzreihe gliedweise differenzierbar ist, hat man

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)}{(n-1)!}t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1} = 0.$$

Nun folgt durch Indexverschiebung

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(x)}{n!}t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n = 0\\ \Leftrightarrow\ &\underbrace{H_1(x) - 2xH_0(x)}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}(x)}{n!}t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n = 0\end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten von $t^n$, so folgt

$$\begin{aligned}&\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0\\ \Leftrightarrow\ &H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

b) Analog zu (a) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}w(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}e^{2xt-t^2} = 2te^{2xt-t^2} = 2tw(x,t)\\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}w(x,t) &- 2tw(x,t) = 0,\end{aligned}$$

also folgt durch die Potenzreihendarstellung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n - 2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1} = 0 \\ \Leftrightarrow &\underbrace{H_0'(x)}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch Indexverschiebung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n = 0,$$

und anschließend durch Koeffizientenvergleich von $t^n$ das gewünschte Resultat.

$$\begin{aligned} &\frac{H_n'(x)}{n!} - 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0 \\ \Leftrightarrow &H_n'(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

c) Ergibt sich aus (a) und (b).
Es gilt für alle $n \geq 2$

$$H_n''(x) = \left(H_n'(x)\right)' \overset{(b)}{=} 2nH_{n-1}'(x) \overset{(b)}{=} 4n(n-1)H_{n-2}(x),$$

woraus sofort

$$\begin{aligned} &H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) \\ &= 4n(n-1)H_{n-2}(x) - 4nxH_{n-1}(x) + 2nH_n(x) \\ &= 2n\underbrace{\left(2(n-1)H_{n-2}(x) - 2xH_{n-1}(x) + H_n(x)\right)}_{=0, nach (a)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgt. Für $n = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} &H_1''(x) - 2xH_1'(x) + 2H_1(x) \\ &= (2x)'' - 2x(2x)' + 4x \\ &= 0 - 4x + 4x \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

# §3 Hermitesche Differentialgleichung

Kommen wir nun zu den *Hermiteschen Differentialgleichungen* in folgender Definition:

**(3.1) Definition (Hermitesche Differentialgleichung)**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

die *Hermitesche Differentialgleichung*. ◇

**(3.2) Korollar**
Die Hermite-Polynome genügen der Hermiteschen Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

◇

**Beweis**
Folgt sofort aus (2.4)(c). □

Als Folgerung erhalten wir das

**(3.3) Korollar**
Die Funktion

$$u_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$u_n''(x) + (2n + 1 - x^2) u_n(x) = 0.$$

◇

**Beweis**
Einsetzen der Funktion $u_n$ in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
&\big(e^{-x^2/2} H_n(x)\big)'' + (2n+1-x^2) e^{-x^2/2} H_n(x) \\
&= \big(-xe^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} H_n'(x)\big)' + (2n+1-x^2) e^{-x^2/2} H_n(x) \\
&= \big(e^{-x^2/2}(-xH_n(x) + H_n'(x))\big)' + (2n+1-x^2) e^{-x^2/2} H_n(x) \\
&= -xe^{-x^2/2}\big(-xH_n(x) + H_n'(x)\big) + e^{-x^2/2}\big(-xH_n(x) + H_n'(x)\big)' \\
&\quad + (2n+1-x^2) e^{-x^2/2} H_n(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -xe^{-x^2/2}\big(-xH_n(x) + H_n'(x)\big) + e^{-x^2/2}\big(-H_n(x) - xH_n'(x) + H_n''(x)\big) \\
&\quad + (2n+1-x^2)e^{-x^2/2}H_n(x) \\
&= e^{-x^2/2}H_n''(x) - 2xe^{-x^2/2}H_n'(x) + 2ne^{-x^2/2}H_n(x) \\
&= e^{-x^2/2}\underbrace{\big(H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x)\big)}_{=0, nach (2.4)(c)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

# §4 Orthogonalität

Nachfolgend wollen wir die Orthogonalität der Hermite-Polynome untersuchen.

— *Definition Orthogonalität* —

Zunächst zur Erinnerung folgende

**(4.1) Definition (Orthogonale Funktionen)**
Ein Funktionensystem $g_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, nennt man *orthogonal* auf dem Intervall $[a, b]$ mit dem Gewicht $\varrho(x)$, wobei $\varrho(x) > 0$, für alle $x \in [a, b]$, wenn

$$
\int_a^b \varrho(x) g_n(x) g_m(x) dx = 0, \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \neq m
$$

gilt. ◇

— *Orthogonalität Hermite-Polynome* —

**(4.2) Satz**
Die Hermite-Polynome sind orthogonal mit dem Gewicht $e^{-x^2}$. Daraus erhält man

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0, \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \neq m.
$$

◇

**Beweis**
Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus (3.3), dann erhält man

$$
\begin{aligned}
& \big(u_n''(x) + (2n+1-x^2)u_n(x)\big)u_m(x) - \big(u_m''(x) + (2m+1-x^2)u_m(x)\big)u_n(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u_n''(x)u_m(x) + (2n+1-x^2)u_n(x)u_m(x) - u_m''(x)u_n(x) \\
& -(2m+1-x^2)u_m(x)u_n(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u_n''(x)u_m(x) - u_n(x)u_m''(x) + (2n-2m)u_n(x)u_m(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u_n''(x)u_m(x) + u_n'(x)u_m'(x) - u_n'(x)u_m'(x) - u_n(x)u_m''(x) \\
& +2(n-m)u_n(x)u_m(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{d}{dx}\big(u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x)\big) + 2(n-m)u_n(x)u_m(x) = 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt durch Integration über das Intervall $(-\infty, \infty)$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty}\Big[u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x)\Big]_{-k}^{k} + \int_{-\infty}^{\infty} 2(n-m)u_n(x)u_m(x)dx = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{k\to\infty}\Big[\big(-xe^{-x^2/2}H_n(x) + e^{-x^2/2}H_n'(x)\big)e^{-x^2/2}H_m(x) \\
& -e^{-x^2/2}H_n(x)\big(-xe^{-x^2/2}H_m(x) + e^{-x^2/2}H_m'(x)\big)\Big]_{-k}^{k} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} 2(n-m)u_n(x)u_m(x)dx = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{\lim_{k\to\infty}\Big[e^{-x^2/2}\big(H_n'(x)H_m(x) - H_n(x)H_m'(x)\big)\Big]_{-k}^{k}}_{=0} + 2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)u_m(x)dx = 0
\end{aligned}
$$

und somit

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)u_m(x)dx = 0 \quad \overset{n\neq m}{\Longleftrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)u_m(x)dx = 0.$$

Aus

$$u_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x) \quad \text{und} \quad u_m(x) = e^{-x^2/2}H_m(x) \quad \text{(siehe (3.3))}$$

ergibt sich schließlich das gewünschte Resultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = 0, \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \neq m.$$

□

**(4.3) Lemma**
Für $n = m$ in (4.2) folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

◇

**Beweis**
Zunächst betrachten wir die Fälle $n = 0$ und $n = 1$. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 2^0 0! \sqrt{\pi},$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 4e^{-x^2} x^2 dx \\
&= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{xe^{-x^2}}_{=u'} \underbrace{x}_{=v} dx \overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \underbrace{4 \lim_{k\to\infty} \left[ -\frac{1}{2} xe^{-x^2} \right]_{-k}^{k}}_{=0} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
&= 2\sqrt{\pi} = 2^1 1! \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Sei also $n \geq 2$. Nun benutzt man (2.4)(a), ersetzt $n$ durch $n-1$, multipliziert mit $H_n(x)$ und erhält

$$H_n^2(x) - 2xH_{n-1}(x)H_n(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) = 0.$$

Des Weiteren ergibt sich aus (2.4)(a) durch Multiplizieren mit $H_{n-1}(x)$ die Gleichung

$$H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2nH_{n-1}^2(x) = 0,$$

die anschließend von der ersten Gleichung subtrahiert und mit $e^{-x^2}$ multipliziert wird. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&H_n^2(x) - 2nH_{n-1}^2(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{-x^2}\left(H_n^2(x) - 2nH_{n-1}^2(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)H_n(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{-x^2}H_n^2(x) - 2ne^{-x^2}H_{n-1}^2(x) + 2(n-1)e^{-x^2}H_{n-2}(x)H_n(x) - e^{-x^2}H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Integriert man über das Intervall $(-\infty, \infty)$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx - 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)dx$$
$$+ 2(n-1) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-2}(x)H_n(x)dx}_{=0,\text{nach (4.2)}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)dx}_{=0,\text{nach (4.2)}}$$
$$= 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x)dx.$$

Diese Gleichung $n-1$ mal auf sich selber angewendet ergibt sich letztendlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^{n-1}n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)dx \overset{\text{s.o.}}{=} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

□

**(4.4) Bemerkung**
Zusammengefasst ergibt sich aus (4.2) und (4.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \cdot \delta_{nm}, \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

◇

Kommen wir abschließend noch kurz zur Anwendung der Hermite-Polynome im letzten Abschnitt.

# §5 Anwendung

Ihre Bedeutung erhalten die Hermite-Polynome durch ihre vielseitige Anwendbarkeit in der Physik. Zum Beispiel werden sie zur Konstruktion der orthonormierten Lösungsfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators benötigt.

Ein harmonischer Oszillator ist ein physikalisches System, bei dem die Zeitentwicklung eines der Systemparameter einer Sinusfunktion folgen, also „harmonisch schwingen" kann und damit der Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ genügt. Beispiele für harmonische Oszillatoren sind das Federpendel oder der Schwingkreis.

Diese Lösungsfunktionen entsprechen den *hermiteschen Funktionen* $h_n$, die man aus den Hermite-Polynomen $H_n$ durch Multiplikation mit der Gaußschen Normalverteilung erhält.

**(5.1) Definition (hermitsche Funktionen)**
Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann nennt man

$$h_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

die *hermitschen Funktionen*. $\diamond$