Laguerre - Polynome

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 06.10.2010

Evgeny Saleev

Die LAGUERRE-Polynome werden in der Quantenmechanik bei der Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung angewendet, insbesondere im Falle des Wasserstoffatoms. Sie sind dabei in folgender Weise Lösungen der LAGUERRE'schen Differentialgleichung: $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die LAGUERRE-Polynome sind desweiteren orthonormal bezüglich eines entsprechenden Skalarproduktes. Dies, sowie weitere Aussagen zu den LAGUERRE-Polynomen, wird im Folgenden hergleitet.

(0.1) Definition (Laguerre-Polynome)
Die LAGUERRE-*Polynome* $L_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind definiert durch

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \qquad \diamond$$

Konkret erhalten wir

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2).$$

Im folgenden wird gezeigt, dass es sich bei den in (0.1) definierten Objekten wirklich um Polynome handelt.

(0.2) Lemma
$L_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n mit $L_n(0) = 1$ und

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \in \mathbb{Q}[x]. \qquad \diamond$$

Beweis
Für den Beweis des Lemmas wird hier die LEIBNIZ*sche Formel* gebraucht, die an dieser Stelle erst eingeführt und bewiesen wird.

Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f, g : D \to \mathbb{C}$, $x \in \mathring{D}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, f, g n-mal differenzierbar in x. Dann gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x). \tag{1}$$

Wir beweisen diese Formel durch vollständige Induktion: Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $x \in \mathring{D}$

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \Big((f \cdot g)^{(n)}(x)\Big)' \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)\Big)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} f^{(0)}(x) \cdot g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{\binom{n+1}{k}} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) \\
&\quad + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} f^{(n+1)}(x) \cdot g^{(0)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n+1-k)}(x)
\end{aligned}
$$

Also gilt die Behauptung für $n + 1$ und somit per vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nun kann Lemma (0.2) bewiesen werden:
Für $n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\begin{aligned}
L_n(x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{n!} e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x}) \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n.
\end{aligned}
$$

Wir wissen $\frac{d^k}{dx^k} e^{-x} = (-1)^k e^{-x}$. Des weiteren gilt

$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}x^n = \underbrace{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-(n-k-1))}_{n-k\text{mal}} x^{n-(n-k-1)-1} = \frac{n!}{k!}x^k$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{n!}e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \in \mathbb{Q}[x] \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom vom Grad n. Aus dieser Darstellung folgt insbesondere

$$L_n(0) = \frac{(-1)^0}{0!}\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k} 0^k = 1 \cdot 1 + 0 = 1.$$

□

Der folgende Satz betrifft die erzeugende Funktion

(0.3) Satz
Für alle $x, t \in \mathbb{R}, |t| < 1$ gilt

$$w(x,t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$

◇

Beweis
Für den Beweis werden die folgenden Identitäten vewendet. Zum einen für die Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Und zum anderen

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n. \tag{3}$$

für $k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{R}$ und $|z| < 1$. Deren Bekanntsein wird vorausgesetzt (siehe A. Krieg: Analysis I. Skript, RWTH Aachen 2007, insbesondere für die zweite Identität vgl. III(4.11)). Eine wetere bekannte Identität, die verwendet wird, ist

$$\sum_{n=0}^{l} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{l} a_k \left(\sum_{r=0}^{l-k} b_r \right) \tag{4}$$

für alle $(a_j), (b_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Damit erhält man für $x, t \in \mathbb{R}, |t| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} &\overset{(2)}{=} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xt/(1-t))^k}{k!}}{1-t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k t^k \cdot \frac{1}{(1-t)^{k+1}} \\
&\overset{(3),\,|t|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k t^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} t^r \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!}(-x)^k \cdot \sum_{r=0}^{l-k} \binom{k+r}{r} t^{k+r} \\
&\overset{(4)}{=} \lim_{l\to\infty} \sum_{n=0}^{l} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{n-k} x^k \right) t^n \\
&\overset{(0.2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.
\end{aligned}$$

Die Aussage (3) wird dabei mit $a_k = \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ und $b_r = \binom{k+r}{r} t^{k+r}$ verwendet. □

(0.4) Satz
Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

a) $(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$

b) $L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0,$

c) $(x - n - 1)L_n'(x) + (n+1)L_{n+1}'(x) + (2n + 2 - x)L_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x) = 0,$

d) $xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x).$ ◇

Beweis
a) Für $x, t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$ gilt

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) + (x - (1-t))w(x,t) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}
(1-t)^2\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) &\overset{\text{def}}{=} (1-t)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}\right)\\
&= (1-t)^2\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-xt/(1-t)}\right)(1-t)+e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^2}\\
&= -\frac{x(1-t)+xt}{(1-t)^2}\,e^{-xt/(1-t)}(1-t)+e^{-xt/(1-t)}\\
&= -\frac{x}{1-t}\,e^{-xt/(1-t)}+\frac{1-t}{1-t}\,e^{-xt/(1-t)}\\
&= -(x-(1-t))w(x,t).
\end{aligned}$$

Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die durch $w(x,t)$ gegebene Reihe eine Potenzreihe. Somit kann sie innerhalb des Konvergenzkreises (hier für $|t|<1$) gliedweise differenziert werden. Bei Anwendung der gliedweisen Differentiation auf die durch $w(x,t)$ erzeugte Reihe gilt

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(L_n(x)t^n\right)\overset{(t^0)'=0}{=}\sum_{n=1}^{\infty}nL_n(x)t^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n.$$

Mit der zuvor gezeigten Identität erhalten wir also

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n+(x-1+t)\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n=0.$$

Führe nun einen Koeffinzientenvergleich von t^n durch.

$$\begin{aligned}
\textit{linke Seite} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^{n+1}\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^{n+2}+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n+\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n+\sum_{n=1}^{\infty}L_{n-1}(x)t^n\\
&\quad-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nL_n(x)t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n
\end{aligned}$$

Da der obige Term gleich Null ist, muss für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gelten

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-1)L_n(x) - 2nL_n(x) + L_{n-1}(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

was die Behauptung für ein $n \geq 2$ darstellt. Für den Fall $n = 1$ ist der letzte Summand nicht relevant. Man erhält

$$\begin{aligned} &(n+1)L_{n+1}(x) + (x-1)L_n(x) - 2nL_n(x) + L_{n-1}(x) = 0 \\ \Rightarrow\ &(1+1)L_{1+1}(x) + (x-2\cdot 1-1)L_n(x) + L_{1-1}(x) = 0, \end{aligned}$$

was die Behauptung für den Fall $n = 1$ darstellt.

b) Für $x, t \in \mathbb{R}, |t| < 1$ gilt

$$(1-t)\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = (1-t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}\right) = -\frac{t}{1-t}\,e^{-xt/(1-t)} = -tw(x,t).$$

Daher also

$$(1-t)\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) + tw(x,t) = 0.$$

Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < 1$ ist die durch $w(x,t)$ gegebene Reihe eine Potenzreihe, die innerhalb ihres Konvergenzkreises (hier für alle $x \in \mathbb{R}$) gliedweise differenziert werden kann. Man erhält

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n = 0.$$

Führe nun auf analoge Weise wie in a.) einen Koeffizientenvergleich für t^n durch. Nach Ausklammern in der obigen Identität erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}'(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n = 0.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0$$

Dies ist die Behauptung.

c) Aus a) erhält man durch Auflösen nach $nL_{n-1}(x)$:

$$nL_{n-1}(x) = -(n+1)L_{n+1}(x) + (2n+1-x)L_n(x)$$

Indem man dies ableitet (wobei der letzte Summand mit Hilfe der Produktregel abgeleitet wird), erhält man

$$nL'_{n-1}(x) = -(n+1)L'_{n+1}(x) + (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x).$$

Man multipliziere die Gleichung aus b) mit n:

$$0 = nL'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x)$$

Setze hier für die linke Seite jeweils einer der beiden zuvor genannten Identitäten die rechte ein. Man erhält

$$\begin{aligned}
0 &= nL'_n(x) - \big(-(n+1)L'_{n+1}(x) + (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x)\big) \\
&\quad -(n+1)L_{n+1}(x) + (2n+1-x)L_n(x) \\
&= nL'_n(x) + (n+1)L'_{n+1}(x) - (2n+1-x)L'_n(x) + L_n(x) \\
&\quad -(n+1)L_{n+1}(x) + (2n+1-x)L_n(x) \\
&= nL'_n(x) - (2n+1-x)L'_n(x) + (n+1)L'_{n+1}(x) \\
&\quad +(2n+1-x)L_n(x) + L_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x) \\
&= (x-n-1)L'_n(x) + (n+1)L'_{n+1}(x) \\
&\quad +(2n+2-x)L_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Behauptung.

d) Für $n = 1$ lautet die Behauptung $xL'_1(x) = L_1(x) - L_0(x) \Leftrightarrow -x = (-x+1) - 1$, sie ist also gültig, da $L_0(x) = 1$ und $L_1(x) = -x + 1$. Für $n \geq 2$ verwende c) mit $n-1$ statt n. Man erhält

$$\begin{aligned}
0 &\overset{c)}{=} (x-(n-1)-1)L'_{(n-1)}(x) + ((n-1)+1)L'_{(n-1)+1}(x) \\
&\quad +(2(n-1)+2-x)L_{(n-1)}(x) - ((n-1)+1)L_{(n-1)+1}(x) \\
&= (x-n)L'_{n-1}(x) + nL'_n + (2n-x)L_{n-1}(x) - nL_n(x).
\end{aligned}$$

Löse die entstandene Gleichung nach $L'_{n-1}(x)$ auf:

$$(x-n)L'_{n-1}(x) = -nL'_n(x) + (x-2n)L_{n-1}(x) + nL_n(x)$$

Setze dies in die mit $(x-n)$ mutliplizierte Identität aus b) ein. Man erhält

$$\begin{aligned}
0 &= (x-n)L'_n(x) - (x-n)L'_{n-1}(x) + (x-n)L_{n-1}(x) \\
&= (x-n)L'_n(x) - (-nL'_n + (x-2n)L_{n-1}(x) + nL_n(x)) + (x-n)L_{n-1}(x) \\
&= xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

was der Behauptung entspricht. □

(0.5) Korollar
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0. \qquad \diamond$$

Beweis
Für $n = 0$ fällt wegen $L_0(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die linke Seite der Behauptung weg und diese gilt somit. Sei $n \geq 1$ (dies ist nötig, da Aussagen in (0.4) für $n \in \mathbb{N}$ gemacht werden). Differenziert man (0.4) d), so erhält man

$$L_n'(x) + xL_n''(x) = nL_n'(x) - nL_{n-1}'(x).$$

Das heißt

$$\begin{aligned} xL_n''(x) &= -L_n'(x) - n(L_{n-1}'(x) - L_n'(x)) \\ &\overset{(0.4)\,b)}{=} -L_n'(x) - nL_{n-1}(x) \\ &\overset{(0.4)\,d)}{=} -L_n'(x) + xL_n'(x) - nL_n(x) \\ &= -(1-x)L_n'(x) - nL_n(x). \end{aligned}$$

Man erhält die Behauptung. $\square$

Bevor wir zum nächsten Satz übergehen, zeigen wir, dass das folgende Riemann-Integral existiert

$$\int_0^\infty e^{-x}P(x)dx \quad \text{für alle } P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Sei n der Grad von $P[x]$. Führe Induktion über n: Für $n = 0$ ist $P[x] = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, das heißt das Integral ist $[-c \cdot e^{-x}]_0^\infty = 0 + c \cdot e^0 = c$. Angenommen, das Integral existiert für ein $n \in \mathbb{N}$. Mit partieller Integration gilt dann $\int_0^\infty e^{-x}P[x]dx = [-e^{-x}P[x]]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}P'[x]dx$. Wenn $P[x]$ Grad $n+1$ hat, so hat $P'[x]$ Grad n, das rechte Integral existiert also nach Induktionsvoraussetzung. Betreffend des ersten Summanden gilt $[-e^{-x}P[x]]_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} \frac{P[x]}{e^x} + e^0P[0] = -0 + P[0]$, da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom (um dies zu zeigen, wende man die Regel von de l'Hospital n-mal an, wobei n der Grad des Polynoms $P[x]$ ist). Insgesamt existiert also das Integral und wir erhalten die Behauptung für $n+1$ und somit per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

Demnächst wird gezeigt, dass die Laguerre-Polynome orthonormale Polynome zum Skalarprodukt mit der Gewichtsfunktion e^{-x} sind.

(0.6) Satz
Es gilt

a) $\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0$ für alle $n \neq m$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$,

b) $\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x) dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. ◇

Beweis

a) Für die Funktion

$$u_n(x) := e^{-x/2} L_n(x), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$

gilt

$$(x u_n'(x))' + (n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}) u_n(x) = 0,$$

beziehungsweise für $m \in \mathbb{N}_0$

$$(x u_m'(x))' + (m + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}) u_m(x) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned}
(x u_n'(x))' &= u_n'(x) + x u_n''(x) \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-x/2} L_n(x) + L_n'(x) e^{-x/2}}_{=u_n'(x)} \\
&\quad + x \left(-\frac{1}{2} e^{-x/2} (L_n'(x) - \frac{1}{2} L_n(x)) + e^{-x/2} (L_n''(x) - \frac{1}{2} L_n'(x)) \right) \\
&= e^{-x/2} \left(L_n'(x) - \frac{1}{2} L_n(x) - \frac{x}{2} L_n'(x) + \frac{x}{4} L_n(x) + x L_n''(x) - \frac{x}{2} L_n'(x) \right) \\
&= e^{-x/2} \left(\underbrace{(1-x) L_n'(x) + x L_n''(x) + n L_n(x)}_{=0 \text{ nach (0.5)}} + (-n - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}) L_n(x) \right) \\
&= -(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}) u_n(x).
\end{aligned}$$

Multipliziert man nur die obere der beiden Gleichungen mit $u_m(x)$ und subtrahiert davon die zweite, multipliziert mit $u_n(x)$, wobei $m \neq n$, so erhält man

$$(x u_n'(x))' u_m(x) - (x u_m'(x))' u_n(x) + (n - m) u_n(x) u_m(x) = 0.$$

Da gilt

$$\begin{aligned}
& (xu_n'(x))'u_m(x) - (xu_m'(x))'u_n(x) \\
= \;& (u_n'(x) + xu_n''(x))u_m(x) - (u_m'(x) + xu_m''(x))u_n(x) \\
= \;& u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x) + x(u_n''(x)u_m(x) \\
& + (u_n'(x)u_m'(x) - u_n'(x)u_m'(x)) - u_n(x)u_m''(x)) \\
= \;& \left[x \cdot (u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x))\right]'
\end{aligned}$$

erhält man

$$\left[x \cdot (u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x))\right]' + (n-m)u_n(x)u_m(x) = 0$$

beziehungsweise

$$(n-m)u_n(x)u_m(x) = -\left[x \cdot (u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x))\right]'.$$

Beide Terme in der obigen Identität sind von der Form $e^{-x}P[x]$ für ein Polynom $P[x]$, denn $u_n(x)$ und $u_m(x)$ sind von der Form $e^{-x/2}P[x]$. Damit ist ein Produkt der zweien von der angegebenen Form. Also kann man eine Integration über $[0, \infty)$ durchführen. Danach erhalten wir für $\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx$:

$$(n-m)\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx = (n-m)\int_0^\infty u_n(x)u_m(x)\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-x(u_n'(x)u_m(x) - u_n(x)u_m'(x))\right]_0^R$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty} -R(u_n'(R)u_m(R) - u_n(R)u_m'(R))}_{=0,\text{ da von der Form } e^{-R}P[R]} + \underbrace{0 \cdot (u_n'(0)u_m(0) - u_n(0)u_m'(0))}_{=0} = 0.$$

Daraus ergibt sich ($n - m \neq 0$) die Behauptung.

b) Führe vollständige Induktion nach n durch.
Für $n = 0$ gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x}L_0^2(x)\,dx \overset{L_0(x)=1}{=} \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Für $n = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x}L_1^2(x)\,dx \overset{L_1(x)=-x+1}{=} \int_0^\infty e^{-x}(x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$\overset{\text{Part. Int.}}{=} \underbrace{\left[-e^{-x}(x^2-2x+1)\right]_0^\infty}_{=1} + \int\limits_0^\infty e^{-x}(2x-2)\,dx$$

$$\overset{\text{Part. Int.}}{=} 1 - \underbrace{\left[e^{-x}(2x-2)\right]_0^\infty}_{=2} + \underbrace{2\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx}_{=2} = 1.$$

Sei nun $n \geq 2$. Verwendet man (0.4) a) mit $n-1$ statt n und multipliziert diese Identität mit $L_n(x)$, so erhält man

$$nL_n^2(x) + (x-2n+1)L_{n-1}(x)L_n(x) + (n-1)L_{n-2}(x)L_n(x) = 0$$

Davon subtrahiert man die Gleichung (0.4) a) multipliziert mit $L_{n-1}(x)$ und erhält

$$\begin{aligned}
0 &= nL_n^2(x) + (x-2n+1)L_{n-1}(x)L_n(x) + (n-1)L_{n-2}(x)L_n(x) \\
&\quad - \left[(n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x)\right] \cdot L_{n-1}(x) \\
&= nL_n^2(x) - nL_{n-1}^2(x) - (n+1)L_{n+1}(x)L_{n-1}(x) + 2L_n(x)L_{n-1}(x) \\
&\quad +(n-1)L_n(x)L_{n-2}(x)
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\frac{1}{n}e^{-x}$ und Integration über $[0,\infty)$ (möglich, da Integrand von der Form $e^{-x}P[x]$) ergibt (zur Übersichtlichkeit "(x)" hinter den L_i ausgelassen):

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_0^\infty e^{-x}\left(L_n^2 - L_{n-1}^2 - \frac{n+1}{n}L_{n+1}L_{n-1} + \frac{2}{n}L_nL_{n-1} + \frac{n-1}{n}L_nL_{n-2}\right)dx \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n^2\,dx - \int\limits_0^\infty e^{-x}L_{n-1}^2\,dx \\
&\quad - \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{n+1}{n}L_{n+1}L_{n-1}\,dx + \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{1}{n}L_nL_{n-1}dx + \int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{n-1}{n}L_nL_{n-2}\,dx \\
&\overset{a.)}{=} \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n^2dx - \int\limits_0^\infty e^{-x}L_{n-1}^2\,dx \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-x}L_n^2dx - \int\limits_0^\infty e^{-x}L_{n-1}^2\,dx
\end{aligned}$$

Dies ergibt den Induktionsschritt und mit vollständiger Induktion ergibt sich die Behauptung. $\square$