Frames in Hilberträumen

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 21.03.2011

Jan Knappmann

In diesem einleitenden Vortrag werden spezielle Erzeugendensysteme für Hilberträume, sogenannte Frames, eingeführt. Diese stellen eine Verallgemeinerung von Orthonormalbasen dar. Neben Definition und Beispielen wird im Folgenden auf die Eigenschaften von Frames eingegangen, eine Klasse von Frames, die Riesz-Basen, hervorgehoben und ein Algorithmus zu Bestimmung von Koeffizientenfolgen, mittels derer Elemente von Hilberträumen dargestellt werden können, vorgestellt.

§1 Der Frame-Operator

Wir beginnen mit der Definition eines Frames und betrachten nach einigen Beispiele den Frame-Operator, um das Konzept des Frames besser zu verinnerlichen.

(1.1) Definition (Frame und straffer Frame)
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und seien A,$B > 0$. Eine Familie $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, von Elementen aus $\mathcal{H}$ heißt ein *Frame* von $\mathcal{H}$ mit den Schranken A und B, wenn für alle $f \in \mathcal{H}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$A \, \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B \, \|f\|^2$$

Gilt dabei $A = B$ und somit Gleichheit, spricht man von einem *straffen Frame*. ◇

Wir betrachten einige Beispiele für Frames.

(1.2) Beispiele

a) Orthonormalbasen sind straffe Frames mit $A = B = 1$.
Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, dann stellt $\langle f, \varphi_k \rangle$ gerade den k-ten Fourierkoeffizienten von $f \in \mathcal{H}$ dar. Wir nutzen die *Bessel*-Ungleichung, in der Aufgrund der Vollständigkeit der Orthonormalbasis Gleichheit gilt, und erhalten

$$\|f\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \|f\|^2$$

b) Sind $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ und $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ zwei Orthonormalbasen von $\mathcal{H}$, dann ist $U := \{\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \ldots\}$ ein straffer Frame mit den Schranken $A = B = 2$.
Auch hier nutzen wir die *Bessel*-Ungleichung:

$$\sum_{u \in U} |\langle f, u \rangle|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 + \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f, \psi_i \rangle|^2 = \|f\|^2 + \|f\|^2 = 2 \, \|f\|^2$$

c) Die Vereinigung einer Orthonormalbasis $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von $\mathcal{H}$ mit L beliebigen Einheitsvektoren ist ein Frame mit den Schranken $A = 1$ und $B = L + 1$.
Seien $\psi_1, \ldots, \psi_L$ beliebige Einheitsvektoren, so setze $U := \{\psi_1, \ldots, \psi_L, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.
Dann gilt

$$\sum_{u \in U} |\langle f, u \rangle|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{L} |\langle f, \psi_i \rangle|^2 = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{L} |\langle f, \psi_i \rangle|^2$$

und damit

$$\|f\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2.$$

So haben wir die erste Abschätzung schnell erhalten und $A = 1$ verifiziert.
Betrachte noch die Abschätzung nach oben:
Angenommen alle $\psi_1, \ldots, \psi_L$ seien gleich ψ_k, dann gilt für alle f im Erzeugnis dieser L Einheitsvektoren $f = \alpha \psi_k$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$. In diesem Fall folgt:

$$\sum_{i=1}^{L} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 = L |\langle f, \psi_k \rangle|^2 = L \|f\|^2$$

Allgemeiner liefert die *Cauchy*-Ungleichung

$$|\langle f, \psi_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|\psi_i\|^2$$

für Einheitsvektoren $\psi_1, \ldots, \psi_L$ die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{L} |\langle f, \psi_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{L} \|f\|^2 \cdot \|\psi_i\|^2 = \sum_{i=1}^{L} \|f\|^2 = L \|f\|^2.$$

Also erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{L} |\langle f, \psi_i \rangle|^2 \leq L \, \|f\|^2$$

und damit

$$\|f\|^2 \leq \sum_{u \in U} |\langle f, u \rangle|^2 \leq (L + 1) \, \|f\|^2$$

◇

Um den Begriff des Frames besser zu beleuchten, betrachten wir einige wichtige, assoziierte Operatoren.

(1.3) Definition (Frame-Operator)
Sei $\{a_j |\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, eine Teilmenge von $\mathcal{H}$.

a) Der *Koeffizientenoperator* C ist definiert durch

$$C \,:\, \mathcal{H} \to \ell^2(\mathcal{J}) : f \mapsto \{\langle f, a_j\rangle |\, j \in \mathcal{J}\}$$

b) Für eine endliche Folge $c = (c_j)_{j\in\mathcal{J}}$ ist der *Rekonstruktionsoperator* D definiert durch

$$D \,:\, \ell^2(\mathcal{J}) \to \mathcal{H} : c \mapsto \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, a_j$$

c) Der *Frame-Operator* S ist definiert durch

$$S \,:\, \mathcal{H} \to \mathcal{H} : f \mapsto \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, a_j\rangle\, a_j$$

◇

Die wichtigsten Eigenschaften dieser drei Operatoren werden zusammengestellt im folgenden

(1.4) Lemma
Sei $\{e_j |\, j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame von $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) Der Koeffizientenoperator C ist ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}$ nach ℓ^2 mit abgeschlossenem Bild.

b) Der Operator D besitzt eine beschränkte Fortsetzung auf $\ell^2(\mathcal{J})$, kann also von ganz $\ell^2(\mathcal{J})$ nach $\mathcal{H}$ definiert werden, und erfüllt

$$\|\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j\| \le \sqrt{B}\, \|c\|_2 \qquad , \forall\, c \in \ell^2(\mathcal{J}).$$

Bezeichnet man diese Fortsetzung kurzerhand wieder mit D, so gilt:
C und D sind adjungiert, also $C^* = D$.

c) Der Frame-Operator $S = DC = C^*C = DD^*$ bildet $\mathcal{H}$ surjektiv auf sich selbst ab und ist ein positiver, invertierbarer Operator, der

$$A\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \le S \le B\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \qquad \text{und} \qquad B^{-1}\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \le S^{-1} \le A^{-1}\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

erfüllt.
Insbesondere gilt:
$\{e_j |\, j \in \mathcal{J}\}$ ist ein straffer Frame genau dann, wenn gilt $S = A\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.

d) Die optimalen Frame-Schranken A_{opt} und B_{opt} sind gegeben durch

$$A_{opt} = \|S^{-1}\|^{-1} \qquad \text{und} \qquad B_{opt} = \|S\|. \qquad \diamond$$

Beweis

a) Da $\{e_j |\ j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame von $\mathcal{H}$ ist, existieren A , $B > 0$, so dass die Frame-Abschätzungen

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

gelten. Wir betrachten nun das Bild von $f \in \mathcal{H}$ unter C:

$$Cf = \{\langle f, e_j \rangle |\ j \in \mathcal{J}\} = (\langle f, e_j \rangle)_{j \in \mathcal{J}}$$

Cf liegt in $\ell^2(\mathcal{J})$, denn mit der oberen Abschätzung erhalten wir

$$\langle \langle f, e_j \rangle, \langle f, e_j \rangle \rangle_{\ell^2} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, e_j \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle} = \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B \ \|f\|^2 < \infty$$

Die Abgeschlossenheit des Bildes von C erhalten wir aus der unteren Abschätzung

$$\|Cf\|^2 = \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, e_j \rangle|^2 \geq A \|f\|^2 .$$

Dies impliziert

$$\|Cf\| \geq \sqrt{A} \|f\| .$$

Mit $\alpha = \sqrt{A}$ wird nun gezeigt, dass $\mathrm{Bild}(C) = \overline{\mathrm{Bild}(C)}$ gilt.
Sei $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Bild}(C)$ mit dem Grenzwert d. Dann existiert eine Urbildfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $Cf_n = d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt:

$$\|f_n - f_m\| \leq \alpha^{-1} \|C(f_n - f_m)\| \leq \alpha^{-1} \|d_n - d_m\| \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

Also ist $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$ und somit existiert ein $f \in \mathcal{H}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f.$$

Da C beschränkt ist, also stetig, gilt

$$d = \lim_{n \to \infty} d_n = \lim_{n \to \infty} Cf_n = Cf,$$

wodurch d in $\mathrm{Bild}(C)$ liegt. Also ist $\mathrm{Bild}(C) = \overline{\mathrm{Bild}(C)}$ gezeigt.

b) Sei $c = (c_j)_{j\in\mathcal{J}}$ eine endliche Folge.
Dann ist

$$\langle C^*c, f\rangle = \langle c, Cf\rangle_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\overline{\langle f, e_j\rangle} = \sum_{j\in\mathcal{J}} \overline{\langle f, c_je_j\rangle} = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle c_je_j, f\rangle$$
$$= \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} c_je_j, f\rangle = \langle Dc, f\rangle$$

und somit $C^* = D$.
Da C auf $\mathcal{H}$ beschränkt ist mit $\|C\| \leq \sqrt{B}$ (analoges Vorgehen wie unter (a)), ist auch D als Adjungierte zu C durch $\sqrt{B}$ beschränkt.

c) Sei $f \in \mathcal{H}$. Wir rechnen

$$C^*Cf = DCf = D(\,(\langle f, e_j\rangle)_{j\in\mathcal{J}}\,) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j\rangle\, e_j = Sf$$

nach, zeigen dass S selbstadjungiert ist

$$S^* = (C^*C)^* = (DC)^* = C^*D^* = DD^* = DC = S$$

und erhalten dadurch zugleich die zu zeigenden Identitäten.
Schnell ist die Positivität von S gezeigt:

$$\langle Sf, f\rangle = \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j\rangle e_j, f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle\langle f, e_j\rangle e_j, f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j\rangle\langle e_j, f\rangle$$
$$= \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j\rangle\overline{\langle f, e_j\rangle} = \sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, e_j\rangle|^2 \geq 0$$

Mit der gefundenen Identität

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, e_j\rangle|^2$$

betrachten wir die Frame-Abschätzungen erneut:

$$A\,\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\,\|f\|^2$$

Dies ist äquivalent zu

$$A\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\, f, f\rangle \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\, f, f\rangle$$

und da sowohl $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ als auch S positiv sind, also

$$\langle Sf, f\rangle \geq \langle f, f\rangle$$

erfüllen, erhalten wir aus der Frame-Abschätzung:

$$A \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \leq S \leq B \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

Die Invertierbarkeit von S auf $\mathcal{H}$ liefert der Satz von Toeplitz (Im Anhang ist eine Formulierung dieses Satzes gegeben):

$$\|Sf\| \geq A \|f\|$$

erhalten wir aus der Frame-Abschätzung. Auch die Injektivität der Adjungierten, hier natürlich S selbst, ist schnell gezeigt:

$$Sf = 0 \quad \Leftrightarrow \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, e_j \rangle e_j = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \langle f, e_j \rangle = 0 \quad \forall\, e_j \,\text{mit}\, j \in \mathcal{J} \qquad \Rightarrow \qquad f = 0.$$

Da die Existenz der Inversen gezeigt ist, wenden wir S^{-1} auf die gerade gezeigte Abschätzung an und erhalten

$$A \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \, S^{-1} \leq \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \leq B \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \, S^{-1}$$

woraus sowohl

$$S^{-1} \leq A^{-1} \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

als auch

$$S^{-1} \geq B^{-1} \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

und damit

$$B^{-1} \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \leq S^{-1} \leq A^{-1} \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

folgt.

d) Bildet man die Operatornorm über f in der ersten in (c) gezeigte Abschätzung, so erhält man

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \left(|\langle A \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} f, f \rangle| \right) \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \left(\langle Sf, f \rangle \right) \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \left(|\langle B \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} f, f \rangle| \right)$$

und nach kurzem Umformen

$$A \sup_{\|f\| \leq 1} \left(|\langle f, f \rangle| \right) \leq \|S\| \leq B \sup_{\|f\| \leq 1} \left(|\langle f, f \rangle| \right).$$

Nun sieht man

$$\|S\| \leq B,$$

denn

$$\sup_{\|f\|\leq 1} (|\langle f, f\rangle|) \leq 1$$

und somit ist

$$\|S\| \ = B_{opt}.$$

Ein analoges Vorgehen mit der zweiten Abschätzung aus (c) liefert

$$\|S^{-1}\| \leq A^{-1},$$

was äquivalent ist zu

$$A \leq \|S^{-1}\|^{-1}.$$

Schließlich erhält man daraus

$$A_{opt} = \|S^{-1}\|^{-1}.$$

□

Obwohl das Ergebnis aus (b) unspektakulär erscheint, ist diese Erkenntnis sehr wichtig. Sie zeigt nämlich, dass

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j$$

wohldefiniert ist und für beliebige Folgen aus $\ell^2(\mathcal{J})$ konvergiert, auch wenn die Elemente des Frames nicht orthogonal sind.
Dies wird im nächsten Abschnitt, der Darstellungen von Vektoren über Frames behandelt, genauer untersucht.

§ 2 Darstellung über Frames

Wie bereits erwähnt, sind Frames eine Verallgemeinerung von Orthonormalbasen. Dieser Abschnitt behandelt Darstellungen von Elementen des Hilbertraumes über Frames. Dabei wird der *duale* Frame eingeführt und genaueres Augenmerk auf die Entwicklungskoeffizienten gelegt.
Eine nähere Betrachtung der schon oben erwähnten Konvergenzeigenschaft erfolgt im folgenden

(2.1) Korollar
Sei $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, ein Frame von $\mathcal{H}$.
Falls für eine Folge $c \in \ell^2(\mathcal{J})$ die Darstellung

$$f = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j e_j$$

gilt, so existiert für alle $\epsilon > 0$ eine endliche Teilfolge $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\epsilon) \subseteq \mathcal{J}$, so dass

$$\|f - \sum_{j\in\mathcal{F}} c_j e_j\| < \epsilon$$

für jede endliche Teilmenge $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$ gilt.
Man sagt:

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j \qquad \text{konvergiert } \textit{unbedingt} \text{ gegen} \qquad f \in \mathcal{H}.$$

Beweis
Wir wählen aus der Indexmenge $\mathcal{J}$ eine endliche Teilfolge $\mathcal{F}_0$, so dass für eine Obermenge $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$

$$\sum_{j\notin\mathcal{F}} |c_j|^2 < \frac{\epsilon}{\sqrt{B}}$$

gilt. Sei weiter $c_\mathcal{F} = c \cdot \chi_\mathcal{F} \in \ell^2(\mathcal{J})$, wobei $\chi_\mathcal{F}$ die charakteristische Funktion auf $\mathcal{F}$ darstellt. Dann folgt

$$\sum_{j\in\mathcal{F}} c_j\, e_j = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_{\mathcal{F},j}\; e_j = Dc_\mathcal{F}$$

und mit der Beschränktheit von D

$$\|f - \sum_{j\in\mathcal{F}} c_j e_j\| = \|Dc - Dc_\mathcal{F}\| = \|D(c - c_\mathcal{F})\| \leq \sqrt{B}\|c - c_\mathcal{F}\|_2 < \epsilon.$$

□

Unbedingte Konvergenz ist der wichtigste Begriff für nicht-orthogonale Reihen bei unstrukturierten Indexmengen, da sie unter jeder Permutation der Indexmenge konvergieren.

Wir betrachten nun eine Rekonstruktionsformel für $f \in \mathcal{H}$ über die Koeffizienten $\langle f, e_j \rangle$.

(2.2) Korollar
Ist $\{e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, ein Frame für $\mathcal{H}$ mit den Schranken $A, B > 0$, dann ist auch $\{S^{-1}e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame für $\mathcal{H}$ mit den Schranken $A^{-1}, B^{-1} > 0$, der sogenannte *duale* Frame.
Außerdem gelten für jedes $f \in \mathcal{H}$ die Darstellungen

$$f = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, S^{-1}e_j \rangle\, e_j \qquad (*)$$

und

$$f = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j \rangle\, S^{-1}e_j, \qquad (**)$$

wobei die beiden Reihen in $\mathcal{H}$ unbedingt konvergieren. ◇

Beweis
Zunächst sei folgendes bemerkt (hier geht die Selbstadjungiertheit von S^{-1} ein):

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle S^{-1}f, e_j\rangle|^2$$

Dies ist die Darstellung von $\langle Sg, g\rangle$ wobei $g = S^{-1}f$, also folgt

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 = \langle S(S^{-1}f), S^{-1}f\rangle = \langle S^{-1}S(S^{-1}f), f\rangle = \langle S^{-1}f, f\rangle.$$

Über die für S^{-1} gezeigten Abschätzungen erhalten wir damit

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 = \langle S^{-1}f, f\rangle \leq A^{-1}\|f\|^2$$

und sehen, dass $\{S^{-1}e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame mit Schranken A^{-1} und B^{-1} ist. Nun können wir die zu zeigenden Dastellungen für f nachrechnen:

$$f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} f = (S \circ S^{-1})f = S(S^{-1}f) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle S^{-1}f, e_j\rangle\, e_j = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, S^{-1}e_j\rangle\, e_j$$

Analog erhält man

$$f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} f = (S^{-1} \circ S)f = S^{-1}(Sf) = S^{-1}(\sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j\rangle\, e_j) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j\rangle\, S^{-1}e_j$$

Damit sind $(*)$ und $(**)$ gezeigt. Die unbedingt Konvergenz folgt mit dem vorherigen Korollar (2. 1), denn $\{\langle f, e_j\rangle \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ und $\{\langle f, S^{-1}e_j\rangle \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ sind aus ℓ^2, wie

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq B\, \|f\|^2 < \infty$$

und

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2 \leq A^{-1}\, \|f\|^2 < \infty$$

aus den Frame-Abschätzungen zeigen und somit konvergieren $(*)$ und $(**)$ unbedingt. □

Die beiden Darstellungen aus (2.2) sollen noch einmal im Vergleich zur Darstellung mit Orthonormalbasen betrachtet werden:
$(*)$ ist eine nicht-orthogonale Entwicklung, welche die Frame-Vektoren respektiert und die Koeffizienten als Skalarprodukt von f mit dem dualen Frame vorgibt.
$(**)$ hingegen erhält die Koeffizienten als Skalarprodukt von f mit den Frame-Vektoren und entwickelt dann am dualen Frame.

Die Koeffizienten $\langle f, S^{-1}e_j\rangle$ sind im folgenden Sinne kanonisch:

(2.3) Proposition
Ist $\{e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, ein Frame von $\mathcal{H}$ und gilt $f = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j e_j$ für eine Folge $c \in \ell^2(\mathcal{J})$.
Dann gilt

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} |c_j|^2 \geq \sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, S^{-1}e_j\rangle|^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $c_j = \langle f, S^{-1}e_j\rangle$ gilt.

Beweis
Wir definieren $a_j = \langle f, S^{-1}e_j\rangle$ und erhalten damit in $(*)$

$$f = \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, S^{-1}e_j\rangle\, e_j = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\, e_j.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}\langle f, S^{-1}f\rangle &= \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\, e_j, S^{-1}f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j \langle e_j, S^{-1}f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j \langle S^{-1}e_j, f\rangle \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j \overline{\langle f, S^{-1}e_j\rangle} = \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\overline{a_j} = \sum_{j\in\mathcal{J}} |a_j|^2 = \|a\|^2_{\ell 2}.\end{aligned}$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}\langle f, S^{-1}f\rangle &= \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j, S^{-1}f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j \langle e_j, S^{-1}f\rangle = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j \langle S^{-1}e_j, f\rangle \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j \overline{\langle f, S^{-1}e_j\rangle} = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\overline{a_j} = \langle c, a\rangle_{\ell^2}\end{aligned}$$

was uns folgende Gleichheit liefert:

$$\langle c, a\rangle_{\ell^2} = \|a\|^2_{\ell 2}$$

Wir fahren fort mit einer Betrachtung der ℓ^2-Norm

$$\begin{aligned}\|c\|^2_{\ell^2} &= \|c - a + a\|^2_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathcal{J}} (c + a - a)_j \overline{(c - a + a)_j} \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}} ((c_j + a_j) - a_j)(\overline{c_j - a_j} + \overline{a_j}) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}} (c_j + a_j)(\overline{c_j - a_j}) + \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\,(\overline{c_j - a_j}) + \sum_{j\in\mathcal{J}} (c_j + a_j)\overline{a_j} + \sum_{j\in\mathcal{J}} a_j\overline{a_j} \\ &= \|c - a\|^2_{\ell^2} + \langle a, c - a\rangle_{\ell^2} + \langle c - a, a\rangle_{\ell^2} + \|a\|^2_{\ell^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|c-a\|_{\ell^2}^2 + \langle a, c\rangle_{\ell^2} - \langle a, a\rangle_{\ell^2} - \langle c, a\rangle_{\ell^2} + \langle a, a\rangle_{\ell^2} + \|a\|_{\ell^2}^2 \\
&= \|c-a\|_{\ell^2}^2 + \|a\|_{\ell^2}^2 - \|\overline{a}\|_{\ell^2}^2 + \|a\|_{\ell^2}^2 \\
&= \|c-a\|_{\ell^2}^2 + \|a\|_{\ell^2}^2 \geq \|a\|_{\ell^2}^2
\end{aligned}
$$

und erhalten daraus die Behauptung, denn Gleichheit liegt genau dann vor, wenn

$$\|c-a\|_{\ell^2}^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = a. \qquad \square$$

Da wir die Koeffizienten nun genauer untersucht haben, stellt sich die Frage, wann diese Koeffizienten eindeutig sind. Ein Kriterium dafür liefert das

(2.4) Lemma
Sei $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ abzählbare Indexmenge, ein Frame von $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Die Koeffizienten $c \in \ell^2(\mathcal{J})$ in $(*)$ sind eindeutig.

b) Der Koeffizientenoperator C bildet surjektiv nach $\ell^2(\mathcal{J})$ ab.

c) Für jede endliche Folge $c \in \ell^2(\mathcal{J})$ existieren $A', B' > 0$, so dass

$$A'\|c\|_{\ell^2} \leq \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j \leq B'\|c\|_{\ell^2}\ .$$

d) Der Rahmen $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ ist das Bild einer Orthonormalbasis $\{g_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ unter einem invertierbaren, beschränkten Operator T.

e) Die Grammatrix G mit den Einträgen $G_{j,m} = \langle e_m, e_j\rangle$ mit $m, j \in \mathcal{J}$ definiert einen positiven, invertierbaren Operator auf $\ell^2(\mathcal{J})$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation. Dabei wird der Folgenvektor c mit dem i-ten Folgenglied in der i-ten Komponente von rechts an die Matrix G mutipliziert.
Dies liefert:

$$Gc = (\sum_{i\in\mathcal{J}} c_i\langle e_i, e_j\rangle)_{j\in\mathcal{J}} \ \in \ell^2(\mathcal{J})$$

$\diamond$

Beweis
(a) $\Leftrightarrow$ (b)
Seien die Koeffizienten $\{c_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ eindeutig. Dies ist äquivalent dazu, dass D injektiv ist, denn zwei Folgen, die beide zum gleichen $f \in \mathcal{H}$ entwickelt werden können, müssen auf Grund der Eindeutigkeit gleich sein. Wiederum äquivalent hierzu ist die Surjektivität von $D^* = C$, denn durch C wird jede Koeffizientenfolge, die sich zur Entwicklung eines Elementes des Hilbertraumens eignet, extrahiert.

(a) $\Rightarrow$ (c)
Für den Operator D ist bereits gezeigt, dass er beschränkt ist und

$$\|Dc\| = \|\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j\| \le \sqrt{B}\|c\|$$

erfüllt. Damit erhält man $B' = \sqrt{B}$. Da D nach (a) $\Leftrightarrow$ (b) injektiv und auf Grund von $(*)$ surjektiv ist, existiert nach dem *Satz von der inversen Abbildung* ein stetiger Operator D^{-1} (siehe dazu den formulierten Satz im Anhang). Das bedeutet, auch D^{-1} ist beschränkt und somit existiert ein $A > 0$ mit

$$\|D^{-1}f\| \le A\|f\|.$$

Durch die Wahl $f = Dc$ erhält man mit $A' = A^{-1}$

$$A'\|D^{-1}Dc\| = A'\|c\| \le \|Dc\|$$

und damit für alle $f \in \mathcal{H}$ die Behauptung

$$A'\|c\| \le \|\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j\| \le B'\|c\|.$$

(c) $\Rightarrow$ (d)
Sei $\{g_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ mit der gleichen Indexmenge $\mathcal{J}$ wie der Frame. Eine solche Orthonormalbasis erhält man aus dem Frame durch das *Gram-Schmidt*'sche Orthonormalisierungsverfahren angewand auf den Frame, denn die Frame-Elemente sind auf Grund der Gleichheit in

$$A\,\|f\|^2 \le \sum_{j\in\mathcal{J}} |\langle f, e_j\rangle|^2$$

linear unabhängig.
Für $f = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, g_j$ definiere man $Tf = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j$. Damit gilt

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \|\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j g_j\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j g_j, \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j g_j\rangle}$$

$$= \sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, \overline{c_j} \langle g_j, \sum_{j\in\mathcal{J}} g_j\rangle} = \sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}} |c_j|^2} = \|c\|_{\ell^2}$$

Die Abschätzungen in (c) liefern für alle $f \in \mathcal{H}$

$$\|Tf\| = \|\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j e_j\| \ge A'\|c\| = A'\|f\|$$

und
$$\|Tf\| = \| \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j e_j\| \leq B'\|c\| = B'\|f\|.$$
Damit ist T wohldefiniert und ein invertierbarer Operator und es gilt wie gewünscht für ein g_k aus der Othonormalbasis
$$Tg_k = e_k.$$

(d) $\Rightarrow$ (a)
Gelte $Tf_j = e_j$ für alle $j \in \mathcal{J}$, wobei $\{f_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ eine Orthonormalbasis und T ein invertierbarer, beschränkter Operator ist, so gilt
$$\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j = T(\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j f_j) = 0$$
was auf Grund der Injektivität von T äquivalent ist zu
$$\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j f_j = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_j = 0\,,\ \forall\, j \in \mathcal{J}.$$

(c) $\Leftrightarrow$ (e)
Für eine endliche Folge $c = \{c_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ gilt
$$\begin{aligned}\langle Gc, c\rangle &= \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} G_{m,j}\, c_j\, \overline{c_m} = \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle e_j, e_m\rangle\, c_j\, \overline{c_m} \\ &= \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle c_j\, e_j, c_m\, e_m\rangle = \sum_{m\in\mathcal{J}} \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j, c_m\, e_m\rangle \\ &= \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j, \sum_{m\in\mathcal{J}} c_m\, e_m\rangle = \| \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j\|^2\end{aligned}$$
und äquivalent dazu
$$\sqrt{\langle Gc, c\rangle} = \| \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j\|.$$
Insbesondere sei bemerkt, dass G selbstadjungiert ist, denn
$$\langle Gc, c\rangle = \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle e_j, e_m\rangle c_j \overline{c_m} = \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \overline{\langle e_m, e_j\rangle} c_j \overline{c_m} = \langle c, Gc\rangle.$$
Mit den Abschätzungen aus (c) gilt
$$\langle Gc, c\rangle = \| \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j e_j\|^2 \geq (A')^2\|c\|^2,$$
was gemeinsam mit der Selbstadjungiertheit äquivalent zur Positivität von G ist. $\square$

Die Eigenschaft eine Frames, eindeutige Koeffizientenfolgen zu haben, führt zur folgenden

(2.5) Definition (*Riesz*-Basis)
Ein Frame, der eine und damit alle Bedingungen des Lemmas (2.4) erfüllt, heißt eine *Riesz-Basis* von $\mathcal{H}$. $\diamond$

§ 3 Der Frame-Algorithmus

Die in Korollar (2.2) gefundenen Reihenentwicklungen sind nur dann anwendbar, wenn man den dualen Frame explizit berechnen kann. Oftmals ist es aber effizienter und angenehmer, eine iterative Rekonstruktionsmethode zur Hand zu haben.
Eine solche bietet der Frame-Algorithmus.

(3.1) Algorithmus (Frame-Algorithmus)
Gegeben sei ein $\lambda \in (0, \frac{2}{B})$.
Setze $\delta = \max\{|1-\lambda A|, |1-\lambda B|\} < 1$ und definiere rekursiv

$$f_0 = 0, \qquad\qquad f_{n+1} = f_n + \lambda S(f - f_n).$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ mit der Abschätzung $\|f - f_n\| \leq \delta^n \|f\|$.
Weiter sei bemerkt, dass

$$f_1 = \lambda S f = \lambda \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle f, e_j \rangle \, e_j$$

den Frame als Input erhält und eine Koeffizientenfolge für den Frame ausgibt.
Dieser Algorithmus ermöglicht es also, weitere Approximationen f_n zu berechnen und f komplett zu rekonstruieren.

Beweis
Aus

$$A \ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \leq S \leq B \ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

erhält man duch Muliplikation mit $-\lambda$ und anschließender Addition mit $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$

$$(1-\lambda A) \ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \geq \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S \geq (1-\lambda B) \ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} .$$

Durch Bildung der Operatornorm gilt dann

$$\sup_{\|f\|\leq 1} \left(|\langle f - \lambda A f, f \rangle| \right) \geq \| \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S \| \geq \sup_{\|f\|\leq 1} \left(|\langle f - \lambda B f, f \rangle| \right),$$

was äquivalent ist zu

$$\sup_{\|f\|\leq 1}\left(|\langle f,f\rangle - \lambda A\langle f,f\rangle|\right) \geq \|\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S\| \geq \sup_{\|f\|\leq 1}\left(|\langle f,f\rangle - \lambda B\langle f,f\rangle|\right).$$

Da $\langle f,f\rangle$ maximal 1 werden kann für $\|f\| \leq 1$, folgt

$$|1-\lambda A| \geq \|\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S\| \geq |1-\lambda B|.$$

Also ist

$$\|\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S\| \leq \max\{|1-\lambda A|, |1-\lambda B|\} = \delta < 1.$$

Der Beweis der angegebenen Fehlerabschätzung wird mit Vollständiger Induktion über n erbracht:
(IA): Für $n = 0$ gilt

$$\|f - f_0\| = \|f\| \leq 1 \cdot \|f\| = \delta^0 \|f\|.$$

(IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\|f - f_n\| \leq \delta^n \|f\|.$$

(IS): Wir schließen von n auf $n+1$.

$$\begin{aligned}\|f - f_{n+1}\| &= \|f - f_n - \lambda S(f - f_n)\| = \|(\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S)(f - f_n)\| \\ &\leq \|\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - \lambda S\| \cdot \|f - fn\| \leq \delta \cdot \|f - f_n\| \\ &\leq \delta \cdot \delta^n \|f\| = \delta^{n+1}\|f\|.\end{aligned}$$

□

Es ist möglich, den Frame-Operator so umzuschreiben, dass er direkt mit den Einträgen der Grammatrix $G_{j,m} = \langle e_m, e_j\rangle$ arbeitet.
Wie diese Umschreibung aussieht, zeigt die folgende

(3.2) Bemerkung
Sei im k-ten Schritt des Algorithmus $f_k = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j^{(k)} e_j$ mit der Koeffizientenfolge $c^{(k)}$.
Für diese Folge erhält man die Rekursion

$$c^{(k+1)} = c^{(k)} + c^{(1)} - \lambda G c^{(k)}.$$

◇

Beweis
Nach der Iterationsvorschrift hat $f_1 = \lambda S f$ die Koeffizientenfolge $\lambda\langle f, e_j\rangle = c^{(1)}$ zur Darstellung im Frame und bekanntlich ist $G_{j,m} = \langle e_m, e_j\rangle$.
Außerdem gilt

$$\begin{aligned} S f_k = S(\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j^{(k)} e_j) &= \sum_{m\in\mathcal{J}} \langle \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j^{(k)} e_j, e_m\rangle\, e_m \\ &= \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle c_j^{(k)} e_j, e_m\rangle\, e_m = \sum_{m\in\mathcal{J}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \langle e_j, e_m\rangle\, c_j^{(k)} e_m \\ &= \sum_{m\in\mathcal{J}} (Gc^{(k)})_m\, e_m. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also die Behauptung

$$\begin{aligned} c^{(k+1)} &= C f_{k+1} = C f_k + \lambda C S f - \lambda C S f_k \\ &= c^{(k)} + \lambda\langle f, e_j\rangle - \lambda G c^{(k)} \\ &= c^{(k)} + \lambda c^{(1)} - \lambda G c^{(k)}. \end{aligned}$$

□

Oftmals wird der Frame-Algorithmus in der Literatur als eine effiziente Rekonstruktionsmethode angegeben, aber auf Grund seiner sehr langsamen Konvergenz sollte man auf seine Anwendung verzichten. Das Problem der langsamen Konvergenz ergibt sich daraus, dass für sehr kleine λ das δ annähernd 1 wird, womit

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$$

nur sehr langsam geschieht.
Selbst mit dem optimalen Parameter $\lambda_{\text{opt}} = \frac{2}{A+B}$ ergibt sich

$$\delta = \max\{|1 - \frac{2}{A+B}A|, |1 - \frac{2}{A+B}B|\} = \frac{B-A}{A+B} = \frac{\frac{B}{A}-1}{\frac{B}{A}+1}.$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus hängt also nicht nur vom zugrunde liegenden Frame selber ab, sondern auch von den Schranken A und B.
Die Abhängigkeit von den Schranken ist zugleich das Hauptproblem, denn es ist extrem schwierig, überhaupt Schranken zu ermitteln, davon die optimalen Schranken zu finden, ganz zu schweigen. Abgesehen von einigen Spezialfällen ist die Größenordnung von $\frac{B}{A}$ gewöhnlicher Weise sehr viel größer als die optimale Größenordnung $\frac{B_{\text{opt}}}{A_{\text{opt}}}$.
Der Bruch $\frac{B_{\text{opt}}}{A_{\text{opt}}}$ wird auch die *Konditionszahl* des Frames genannt.

In der Praxis wird der Frame-Algorithmus mit verschiedenen Methoden der Numerischen Analysis kombiniert. Dabei zeichnet sich die sogenannte *conjugate gradient method* als besonders effizient aus, denn diese ist deutlich schneller als der hier definierte Frame-Algorithmus, da dort weder die Schranken noch ein Parameter λ benötigt werden.
Um konkret ein $f \in \mathcal{H}$ zu approximieren, sollte man sich also nicht allein auf den hier behandelten Algorithmus beschränken, sondern die obigen Hinweise auf verbesserte Verfahren nutzen.

Einige hilfreiche Beobachtungen über den Zusammenhang von Frames, straffen Frames und Orthonormalbasen liefert das abschließende

(3.3) Lemma

a) Ist $\{e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ein straffer Frame mit $A = B = 1$ und gilt $\|e_j\| = 1$ für alle $j \in \mathcal{J}$, dann gilt $\{e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ist eine Orthonormalbasis.

b) Ist $\{e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame, so gilt, dass $\{S^{-\frac{1}{2}} e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ein straffer Frame mit $A = B = 1$ ist.
Dabei ist $S^{-\frac{1}{2}}$ definiert als der eindeutige positive Operator, der mit sich selbst komponiert S^{-1} ergibt. Zur Existenz von $S^{-\frac{1}{2}}$ sei auf *Funktional Analysis* von **Walter Rudin** verwiesen, genauer auf Theorem 12.33 , S. 314. Das Theorem ist im Anhang formuliert.

c) Der *inverse Frame-Operator* S^{-1} ist gegeben durch

$$S^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : f = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, S^{-1} e_j \rangle S^{-1} e_j.$$

Damit ist S^{-1} ein Frame-Operator, der den dualen Frame $\{S^{-1} e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ respektiert. $\diamond$

Beweis

a) Man wähle e_m fest für ein $m \in \mathcal{J}$. Da nach Vorraussetzung $\|e_m\| = 1$ erfüllt ist, folgt auch $\|e_m\|^2 = 1$. Dies liefert

$$\begin{aligned} 1 = 1 \cdot \|e_m\|^2 = \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle e_m, e_j \rangle|^2 &= |\langle e_m, e_m \rangle|^2 + \sum_{j \in \mathcal{J} \setminus \{m\}} |\langle e_m, e_j \rangle|^2 \\ &= 1 + \sum_{j \in \mathcal{J} \setminus \{m\}} |\langle e_m, e_j \rangle|^2, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$0 = \sum_{j \in \mathcal{J} \setminus \{m\}} |\langle e_m, e_j \rangle|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \langle e_m, e_j \rangle \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}.$$

Gemeinsam mit $\langle e_m, e_m \rangle = 1$ liefert dies

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

was bedeute, dass $\{e_j |\, j \in \mathcal{J}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist.

b) S^{-1} ist positiv, beschränkt und invertierbar, also können wir das angegebene Zitat verwenden.
Zuerst schreibe man dann $f \in \mathcal{H}$ um (man bedenke, dass $S^{-\frac{1}{2}}$ genau wie S^{-1} selbstadjungiert ist):

$$f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\, f = S^{-\frac{1}{2}} S S^{-\frac{1}{2}} f = S^{-\frac{1}{2}} (\sum_{j \in \mathcal{H}} \langle S^{-\frac{1}{2}} f, e_j \rangle\, e_j) = \sum_{j \in \mathcal{H}} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} e_j \rangle S^{-\frac{1}{2}} e_j$$

Desweiteren gilt damit

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} e_j \rangle\, S^{-\frac{1}{2}} e_j, f \rangle &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle \langle f, S^{-\frac{1}{2}} e_j \rangle\, S^{-\frac{1}{2}} e_j, f \rangle \\ = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, S^{-\frac{1}{2}} e_j \rangle \langle S^{-\frac{1}{2}} e_j, f \rangle &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \overline{\langle S^{-\frac{1}{2}} e_j, f \rangle} \langle S^{-\frac{1}{2}} e_j, f \rangle \\ = \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, S^{-\frac{1}{2}} e_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\{S^{-\frac{1}{2}} e_j |\, j \in \mathcal{J}\}$ ein straffer Frame mit den Schranken $A = B = 1$. Da die $S^{-\frac{1}{2}} e_j$ im Allgemeinen nicht normiert sind, muss nicht notwendigerweise eine Orthonormalbasis vorliegen.

c) Die Aussage wird durch schlichtes Nachrechnen gezeigt:

$$S^{-1} f = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\, S^{-1} f = S^{-1} S S^{-1} f = S^{-1} (\sum_{j \in \mathcal{J}} \langle S^{-1} f, e_j \rangle\, e_j) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle S^{-1} f, e_j \rangle\, S^{-1} e_j$$

□

§4 Anhang

— Der Satz von Toeplitz —

In der Formulierung aus der Vorlesung *Funktionalanalysis* bei Priv.-Doz. Dr. Alfred Wagner im Wintersemester 10/11:

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.
Ein beschränkter, linearer Operator T mit Definitionsbereich $\mathcal{H}$ hat genau dann eine lineare, beschränkte, auf ganz $\mathcal{H}$ definierte Inverse, wenn gilt:

a) Es existiert ein $d > 0$, so dass für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\|Tx\| \geq d\|x\|$$

und

b) $T^*x = 0$ impliziert $x = 0$.

— Der Satz von der inversen Abbildung —

In der Formulierung aus der Vorlesung *Funktionalanalysis* bei Priv.-Doz. Dr. Alfred Wagner im Wintersemester 10/11:

Seien X und Y zwei Banachräume und T eine stetige, lineare Abbildung von X nach Y.
Dann gilt:
T ist bijektiv, genau dann wenn T^{-1} eine stetige, lineare Abbildung von Y nach X ist.

— Quadratwurzel eines positiven, beschränkten Operators —

Zitiert aus **Walter Rudin**, *Funktional Analysis*, S. 314:

Jeder positive, beschränkte Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ besitzt eine eindeutige positive, beschränkte Quadratwurzel S auf $\mathcal{H}$, also einen Operator S mit $S^2 = T$.
Ist T invertierbar, so ist auch S invertierbar.