Schwartz Funktionen und Faltung

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 21.03.2011

Alexander Katzur

Die Nachfolgende Arbeit beruht auf den Seiten 235-243 des Lehrbuches *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications* von Gerald B. Folland. Sie liefert eine Einführung in die Theorie der Schwartzräume, wobei die meisten Resultate sogar auf Obermengen der Schwartzräume gezeigt werden. Zudem beschäftigt sie sich mit der Faltung zweier Funktionen. Hierbei wird besonders auf die Frage eingegangen, auf welchen Mengen die durch Faltung erhaltene Funktion endlich existiert. Des Weiteren erhalten wir das Ergebnis, dass die gefaltete Funktion, unter gewissen Voraussetzungen, mindestens genau so glatt ist, wie jede der Ausgangsfunktionen.
Zum Abschluss beweisen wir noch zwei Theoreme, welche Aussagen über die Konvergenzeigenschaften spezieller Folgen gefalteter Funktionen treffen.
Die vorliegende Arbeit kann zudem als Vorbereitung auf den nachfolgenden Vortrag *Fourier-Analysis* gesehen werden, da dort einige der Ergebnisse dieser Arbeit Verwendung finden.

§1 Einführung und Notationen

Im Folgenden werden einige Notationen und die Vektorräume eingeführt, mit denen wir im Weiteren arbeiten. Die Notationen sind konsistent zu denen des Buches.

Soweit nicht anders angegeben, arbeiten wir während der gesamten Arbeit auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$, wobei n auch im Weiteren immer für dessen Dimension steht. Zudem verwenden wir immer das Lebesgue Maß m, so dass im Folgenden die abkürzende Schreibweise $L^p(E,m) = L^p(E)$ für $E \subset \mathbb{R}^n$, messbar, benutzt wird. Hierbei ist

$$L^p(E,m) := \{f : E \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ messbar}, \ \|f\|_p < \infty\}, \ 1 \leq p \leq \infty,$$

und

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty; \quad \|f\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{x \in E} |f(x)|.$$

Als weitere Funktionennorm verwenden wir noch $\|f\|_u = \sup_{x \in E} |f(x)|$.
Für $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ ist außerdem $C^k(U)$ die Menge der k-fach partiell stetig

differentierbaren Funktionen und $C^\infty(U) := \bigcap_{k=1}^\infty C^k(U)$. Weiterhin ist für beliebiges $E \subset \mathbb{R}^n$

$$C_c^\infty(E) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \operatorname{supp}(f) \subset E,\ \operatorname{supp}(f)\ \textit{kompakt}\},$$

wobei $\operatorname{supp}(f)$ der Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \neq 0\}$ ist. (Diese Definition macht Sinn, da f stetig ist.)
Des Weiteren ist für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad |x| := \sqrt{x \cdot x}$$

und die partielle Ableitung nach x_j

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Für Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad , \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i! \text{ und } \partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

und wenn zusätzlich $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

(1.1) Bemerkung
Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist nicht trivial.

Dazu:

Betrachte die Funktion
$$\eta(t) = \exp(-t^{-1}) \mathcal{X}_{(0,\infty)}(t),$$
wobei $\mathcal{X}$ die Indikatorfunktion ist.

Behauptung: $\eta(t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Da $\lim_{t \downarrow 0} \exp(-t^{-1}) = 0$ ist $\eta(t)$ stetig und nach Konstruktion in $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R} \backslash \{0\})$.

Zudem gilt per Induktion, dass $\frac{d^k}{dt^k}\exp(-t^{-1}) = g_k(t^{-1})\exp(-t^{-1})$ mit $g_k(t)$ Polynom vom Grad $2k$, denn für $k=1$ ist

$$\frac{d}{dt}\exp(-t^{-1}) = \frac{1}{t^2}\exp(-t^{-1}) = g_1(t^{-1})\exp(-t^{-1}),\ g_1(x) = x^2$$

und im Induktionsschritt

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\exp(-t^{-1}) &= \frac{d}{dt}g_k(t^{-1})\exp(-t^{-1}) = \left(\frac{d}{dt}g_k(t^{-1}) + g_k(t^{-1})t^{-2}\right)\exp(-t^{-1})\\ &= g_{k+1}(t^{-1})\exp(-t^{-1})\end{aligned}$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{Grad}(g_k) = 2k$ ist der Grad von g_{k+1} demnach $2(k+1)$.
Damit folgt, dass $\lim_{t\downarrow 0}\frac{d^k}{dt^k}\exp(-t^{-1}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und demnach die Behauptung.

Wenn wir nun die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto \eta(1-|x|^2) = \begin{cases}\exp[(|x|^2-1)^{-1}] & ,\ |x| < 1\\ 0 & ,\ |x| \geq 1\end{cases}$$

definieren, dann ist $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{supp}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x| \leq 1\}$, also $\psi \in C_c^\infty$.

Wir führen nun den Raum der Schwartzfunktionen ein. Dieser ist von besonderem interesse in der Fourier-Analysis, da die Fourier-Transformation auf ihm einen Isomorphismus bildet. Dies wird im Vortrag „Fourier-Analysis“bewiesen.

(1.2) Definition (Schwartzraum)
Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum der $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen, bei denen jede Ableitung schneller gegen 0 strebt, als jede beliebige Potenz von $1+|x|$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ :\ \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty\ \forall N \in \mathbb{N}_0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\},$$

wobei

$$\|f\|_{(N,\alpha)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)|$$

und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. ◇

Dieser Raum ist nicht trivial, da zum Beispiel $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f_\alpha(x) = x^\alpha \exp(-|x|^2)$ für jeden Multiindex α in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.

(1.3) Bemerkung
$\|f\|_{(N,\alpha)}$ ist Halbnorm für alle $N \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. $\diamond$

i) $\|f\|_{(N,\alpha)} \geq 0$

ii) $\|cf\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha cf(x)| = |c| \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)|$

$$= |c|\|f\|_{(N,\alpha)},\ c \in \mathbb{R}$$

iii) $\|f+g\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha(f(x)+g(x))|$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)+\partial^\alpha g(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)| + \sup_{y\in\mathbb{R}^n}(1+|y|)^N|\partial^\alpha g(y)|$$

$$= \|f\|_{(N,\alpha)} + \|g\|_{(N,\alpha)}$$

Durch die Halbnormen $\|.\|_{(N,\alpha)}$ wird eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

(1.4) Definition und Lemma (induzierte Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)
Wir definieren die durch die Halbnormen $\|.\|_{(N,\alpha)}$ induzierte Metrik auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gemäß

$$d(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_{(N_k,\alpha_k)}}{1+\|f-g\|_{(N_k,\alpha_k)}}.$$

Dabei ist $\{(N_i,\alpha_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n$. $\diamond$

Beweis

i) $d(f,f) = 0$

ii) $d(f,g) = 0 \Rightarrow 0 = \|f-g\|_{(0,0)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)-g(x)|$

$$= \|f-g\|_u \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

iii) $d(f,g) = d(g,f)$, klar, wegen der Symmetrie der Halbnormen.

iv) Seien $f,g,h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\|f-g\|_{(N,\alpha)} \leq \|f-g\|_{(N,\alpha)} + \|g-h\|_{(N,\alpha)}$$

und

$$\xi : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \text{ steigt in } x$$

$$\Rightarrow \frac{\|f-h\|_{(N,\alpha)}}{1+\|f-h\|_{(N,\alpha)}} \leq \frac{\|f-g\|_{(N,\alpha)} + \|g-h\|_{(N,\alpha)}}{1+\|f-g\|_{(N,\alpha)} + \|g-h\|_{(N,\alpha)}}$$

$$\leq \frac{\|f-g\|_{(N,\alpha)}}{1+\|f-g\|_{(N,\alpha)}} + \frac{\|g-h\|_{(N,\alpha)}}{1+\|g-h\|_{(N,\alpha)}},$$

und somit folgt

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h).$$

Beachte, dass d für alle $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert ist, da $d(f,g) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. □

Man beachte, dass der Schwartzraum Teilmenge eines jeden $L^p(\mathbb{R}^n)$-Raumes, $1 \leq p \leq \infty$ ist, und somit die Ergebnisse, die wir auf den L^p-Räumen erhalten, auch für den Schwartzraum Gültigkeit besitzen.

(1.5) Proposition
Es gilt: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall p \in [1,\infty]$. Weiterhin ist die Einbettung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig , d.h. dass eine Funktionenfolge, die in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, auch in $\|.\|_p$ konvergiert. ◇

Beweis
Sei zunächst $p = \infty$. Da für alle Multiindizes α gilt

$$\|\partial^\alpha f\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty$$

folgt die Behauptung sofort.

Sein nun $1 \leq p < \infty$, dann

$$(1+|x|)^N \geq |x|^N\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall N \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow (1+|x|)^{-N} \leq |x|^{-N}\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

Wählen wir nun $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$ und $N > n/p$, dann gilt insbesondere

$$
\begin{aligned}
& (1+|x|)^{-Np} \leq |x|^{-Np}, \ x \in B^c \\
\overset{A.6b)}{\Longrightarrow} \quad & (1+|x|)^{-Np} \in L^1(B^c) \\
\Longrightarrow \quad & (1+|x|)^{-N} \in L^p(B^c).
\end{aligned}
$$

Da zudem $(1+|x|)^{-Np}$ beschränkt ist auf B gilt $(1+|x|)^{-Np} \in L^1(B)$ und damit insgesamt, dass $(1+|x|)^{-N} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
& C_{N,\alpha} := \|f\|_{(N,\alpha)} \geq (1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)| \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{C_{N,\alpha}}{(1+|x|)^N} \geq |\partial^\alpha f(x)|
\end{aligned}
$$

und damit $\partial^\alpha f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nun zur Stetigkeit der Einbettung:
Seien $g_k, \ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ so, dass $d(g_k, g) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, wobei $d(.,.)$ die induzierte Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Dann folgt mit A.22, dass

$$\|g_k - g\|_{(N,\alpha)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für alle $(N, \alpha) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n$.

Sei zunächst wieder $p = \infty$, dann gilt

$$\|g_k - g\|_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{esssup}} |g_k(x) - g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g_k(x) - g(x)| = \|g_k - g\|_{(0,0)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und für $1 \leq p < \infty$

$$
\begin{aligned}
\|g_k - g\|_p \quad &= \quad \left[\int_{R^n} |g_k(x) - g(x)|^p dx \right]^{1/p} \\
&\overset{N>n/p}{\leq} \left[\int_{R^n} \left(\frac{\|g_k - g\|_{(N,0)}}{(1+|x|)^N} \right)^p dx \right]^{1/p} \\
&= \underbrace{\|(1+|x|)^{-N}\|_p}_{\overset{\text{s.o.}}{<}\infty} \|g_k - g\|_{(N,0)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Stetigkeit der Einbettung für $1 \leq p \leq \infty$ gezeigt und wir sind fertig. □

Nun wollen wir etwas über die Struktur des Schwartzraumes aussagen.

(1.6) Proposition (Proposition 8.2)
Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Frechetraum (siehe A.15), mit der Topologie, die durch die $\|.\|_{(N,\alpha)}$ erzeugt wird. $\diamond$

Beweis
Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \neq g$ und $N \in \mathbb{N}_0$ fest. Dann ist $f - g \neq 0$ und damit existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|f-g\|_{(N,0)} > 3\varepsilon$. Sein nun $U := \{h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f-h\|_{(N,0)} < \varepsilon\}$ und $V := \{h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ : \ \|g-h\|_{(N,0)} < \varepsilon\}$, dann gilt für $h \in U$:

$$\|g-h\|_{(N,0)} = \|g-f+f-h\|_{(N,0)} \geq \left| \underbrace{\|g-f\|_{(N,0)}}_{>3\varepsilon} - \underbrace{\|f-h\|_{(N,0)}}_{<\varepsilon} \right| > 2\varepsilon$$

Demnach ist $h \notin V$ und analoges gilt für $h \in V$. Deshalb ist der Schwartzraum mit der Topologie der Halbnormen Hausdorffsch. Also bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist.
Sei nun $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k, j \geq k_0 : \ d(f_k, f_j) < \varepsilon,$$

wobei $d(.,.)$ die indizierte Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Mit A.22 folgt dann

$$\|f_k - f_j\|_{(N,\alpha)} \underset{k_0 \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall N, \alpha.$$

Insbesondere gilt, da

$$\|f_k - f_j\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |\partial^\alpha (f_k(x) - f_j(x))| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (f_k(x) - f_j(x))|,$$

dass

$$\|\partial^\alpha (f_k(.) - f_j(.))\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (f_k(x) - f_j(x))| \longrightarrow 0$$

und somit für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die gleichmäßige Konvergenz der $\{\partial^\alpha f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine stetige Funktion g_α.

Wir zeigen nun per Induktion über $|\alpha|$, dass $\partial^\alpha g_0 = g_\alpha$ für alle Multiindizes α gilt.

$|\alpha| = 1$: Sei e_j der j-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$, dann gilt

$$f_k(x + te_j) - f_k(x) = \int_0^t \partial_j f_k(x + se_j) ds$$

und demnach

$$\lim_{k\to\infty}(f_k(x+te_j)-f_k(x)) = \lim_{k\to\infty}\int_0^t \partial_j f_k(x+se_j)ds$$

$$\Leftrightarrow \quad g_0(x+te_j)-g_0(x) = \int_0^t g_{e_j}(x+se_j)ds$$

Also gilt mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung A.10, dass $g_{e_j} = \partial_j g_0 \; \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ und somit der Induktionsanfang.
$|\alpha| = k+1$: Es existiert ein $j \in \{1,\ldots,n\}$, so dass $\alpha_j > 0$. Dann ist $|\alpha - e_j| = k$ und mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir analog zum Induktionsanfang

$$\partial^{\alpha-e_j}g(x+te_j)-\partial^{\alpha-e_j}g(x) = g_{\alpha-e_j}(x+te_j)-g_{\alpha-e_j}(x) = \int_0^t g_\alpha(x+se_j)ds$$

und somit

$$g_\alpha = \partial_j g_{\alpha-e_j} \overset{IV}{=} \partial_j\partial^{\alpha-e_j}g_0 = \partial^\alpha g_0.$$

Daher ist $g_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per Induktion.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\|g_0\|_{(N,\alpha)} &= \|g_0 - f_k + f_k\|_{(N,\alpha)} \\
&\leq \|g_0 - f_k\|_{(N,\alpha)} + \|f_k\|_{(N,\alpha)} \\
&= \|g_0 - f_k\|_{(N,\alpha)} + C_{k,N,\alpha} \\
&\overset{k \text{ groß genug}}{\leq} \varepsilon + C_{k,N,\alpha} < \infty, \; \forall (N,\alpha) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n
\end{aligned}$$

Also folgt insgesamt, dass $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und damit ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Frechetraum. □

Nun wollen wir noch ein paar äquivalente Charakterisierungen für Elemente des Schwartzraumes angeben.

(1.7) Proposition (Proposition 8.3)
Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind äquivalent

a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

b) $x^\beta \partial^\alpha f$ beschränkt für alle Multiindizes α, β

c) $\partial^\alpha \left(x^\beta f\right)$ beschränkt für alle Multiindizes α, β $\diamond$

Beweis
„a) $\Rightarrow$ b)“: Es ist für $|\beta| \leq N$

$$|x^\beta| = \left|x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\right| \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{|x_i|^{|\beta|}\right\}$$

$$\leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left\{|x_i|^N\right\} \leq \left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)^N$$

$$\leq (1 + \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})^N = (1 + |x|)^N$$

Damit ist für beliebige Multiindizes α, β und N groß genug

$$|x^\beta||\partial^\alpha f(x)| \leq (1+|x|)^N |\partial^\alpha f(x)| \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta||\partial^\alpha f(x)| \leq \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty.$$

„b) $\Rightarrow$ a)“: Wir definieren $h(x) := \sum_{i=1}^n |x_i|^N$ und $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}$. Da B kompakt und $h(x) > 0$ auf B nimmt h auf B sein Minimum $\delta > 0$ an (Weierstraß). Beachte, dass für jeden Einheitsvektoren e_j des $\mathbb{R}^n$ gilt $h(e_j) = 1$ und somit $\delta \leq 1$. Für $N = 0$ ist die Beschränktheit von $\|f\|_{(0,\alpha)}$ trivial. Sei also im Folgenden $N \geq 1$.

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : \ h\left(\frac{x}{|x|}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|x|^N} |x_i|^N \geq \delta$$

$$\Rightarrow h(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^N \geq \delta |x|^N \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Zudem gilt:

$$(1+|x|)^N \leq \begin{cases} (2|x|)^N & , |x| \geq 1 \\ 2^N & , |x| < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ (1+|x|)^N \leq 2^N + (2|x|)^N \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Damit erhalten wir eine obere Schranke für $(1+|x|)^N$ gemäß

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N &\overset{(2)}{\leq} 2^N(1+|x|^N) \overset{(1)}{\leq} 2^N\left(1+\delta^{-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^N\right) \\ &= 2^N\delta^{-1}\left(\delta+\sum_{i=1}^{n}|x_i^N|\right) \\ &\leq 2^N\delta^{-1}\left(\underbrace{1}_{=|x^0|}+\sum_{\substack{|\beta|=N\\ \exists i:\beta_i=N}}|x^\beta|\right) \\ &\leq 2^N\delta^{-1}\left(\sum_{|\beta|\leq N}|x^\beta|\right).\end{aligned}$$

Demnach folgt für alle $(N,\alpha)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0^n$

$$(1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x)| \leq 2^N\delta^{-1}\underbrace{\left(\sum_{|\beta|\leq N}|x^\beta|\right)}_{\text{endliche Summe}}|\partial^\alpha f(x)| \overset{Vor.}{<} \infty \ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

und damit insgesamt, dass $\|f\|_{(N,\alpha)}$ beschränkt für alle $(N,\alpha)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0^n$.

„b) $\Rightarrow$ c)“: Nach der Produktregel für Ableitungen gilt

$$\partial^\alpha(x^\beta f) = \sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\delta!}(\partial^\gamma f)(\partial^\delta x^\beta).$$

Also ist $\partial^\alpha(x^\beta f)$ darstellbar als Linearkombination der $x^\xi\partial^\delta f$ für Multiindizes ξ,δ und damit auch beschränkt für alle Multiindizes α,β.

„c) $\Rightarrow$ b)“: Behauptung: $x^\beta\partial^\alpha f$ lässt sich für beliebige Multiindizes α,β als Linearkombination der $\partial^\gamma(x^\delta f)$ schreiben.
Den Beweis werden wir per Induktion über $|\alpha|$ führen.

Induktionsanfang $|\alpha|=0$: Wähle $\gamma=0$ und $\delta=\beta$.

Sei die Behauptung gezeigt für $|\alpha| \leq k$, dann gilt für $|\alpha| = k+1$:

$$\begin{aligned}\delta^{\alpha}(x^{\beta} f) &= \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!\delta!} \left(\partial^{\gamma} x^{\beta}\right) \left(\partial^{\delta} f\right) \\ &= \sum_{\substack{\gamma+\delta=\alpha \\ \delta\neq\alpha}} \frac{\alpha!}{\gamma!\delta!} \underbrace{\left(\partial^{\gamma} x^{\beta}\right) \left(\partial^{\delta} f\right)}_{\text{nach IV als lin. Komb. darstellbar}} + x^{\beta}\partial^{\alpha} f\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $|\alpha| = k+1$ und somit folgt aus der Beschränktheit der $\partial^{\alpha}(x^{\beta} f)$ auch die der $x^{\beta}\partial^{\alpha} f$. $\square$

— Translation und Stetigkeit —

Da wir im nächsten Kapitel die Faltung zweier Funktionen betrachten, ist es ratsam sich zunächst mit der Stetigkeit der Translation auf verschiedenen Funktionenräumen zu befassen. Diese wird im Folgenden bei der Einführung der Faltung benötigt.
Dazu führen wir die folgende Notation ein:
Falls f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\tau_y f(x) = f(x-y).$$

Man beachte, dass die Normen $\|.\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\|.\|_u$ invariant unter Translation sind.

(1.8) Definition (gleichmäßige Stetigkeit)
f ist gleichmäßig stetig, wenn $\|\tau_y f - f\|_u \to 0$ für $y \to 0$. $\diamond$

(1.9) Bemerkung
Die obige Definition der gleichmäßigen Stetigkeit ist äquivalent zur $\varepsilon - \delta$ Definition.

Diesen Zusammenhang kann man sich wie folgt klarmachen:

$$\begin{aligned}&\|\tau_y f - f\|_u \to 0,\ y \to 0 \\ \Leftrightarrow\ &\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \to 0,\ y \to 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall|y| < \delta\ :\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x - z| < \delta \ : \ |f(z) - f(x)| < \varepsilon$$

◇

(1.10) Lemma (Lemma 8.4)
Wenn $f \in C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \ : \ \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$, dann ist f gleichmäßig stetig. ◇

Beweis
Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$\forall x \in \text{supp}(f) \ \exists \delta_x > 0 : \ |f(x - y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y| < \delta_x. \tag{3}$$

Wenn wir durch $B_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - x| < \delta\}$ die offene Kugel mir Radius δ um x definieren, dann gilt

$$\text{supp}(f) \subset \bigcup_{x \in \text{supp}(f)} B_{\frac{\delta_{x_j}}{2}}(x_j).$$

Da supp(f) kompakt ist existiert eine endliche Teilüberdeckung, also existieren $x_1, \ldots, x_N$, so dass

$$\text{supp}(f) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{\frac{\delta_{x_j}}{2}}(x_j).$$

Wir setzen nun

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{j \in \{1,\ldots,N\}} \{\delta_{x_j}\}$$

und

$$K := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists x \in \text{supp}(f) : \ |x - y| \leq \delta\}.$$

K ist nach Konstruktion abgeschlossen und beschränkt.

$$\Rightarrow \forall |y| < \delta : \ \text{supp}(\tau_y f) \subset K, \ \text{supp}(f) \subset K, \ K \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow \|\tau_y f - f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)| = \sup_{x \in K} |f(x - y) - f(x)|$$

Da K kompakt ist, existiert dieses Supremum und wird in einem Punkt, sagen wir x' angenommen. Wir betrachten zwei Fälle:

i) $x' \in$supp(f), dann:

$$\exists x_i,\ i \in \{1,\dots,N\}:\ x' \in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i) \overset{(3)}{\Rightarrow} |f(x_i) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{|y|<\delta}{\Rightarrow} x' - y \in B_{\delta_{x_i}}(x_i) \overset{(3)}{\Rightarrow} |f(x' - y) - f(x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ii) $x' - y \in$supp(f), dann:

$$\exists x_i,\ i \in \{1,\dots,N\}:\ x' - y \in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i) \overset{(3)}{\Rightarrow} |f(x_i) - f(x' - y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{|y|<\delta}{\Rightarrow} x' \in B_{\delta_{x_i}}(x_i) \overset{(3)}{\Rightarrow} |f(x') - f(x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und demnach gilt

$$\begin{aligned}\|\tau_y f - f\|_u &= \sup_{x\in K} |f(x-y) - f(x)| = |f(x'-y) - f(x')| \\ &= |f(x'-y) - f(x_i) + f(x_i) - f(x')| \\ &\leq |f(x'-y) - f(x_i)| + |f(x_i - f(x')| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Somit ist f gleichmäßig stetig. □

Eine wichtige Eigenschaft der Translation ist:

(1.11) Proposition (Proposition 8.5)
Sei $1 \leq p < \infty$, dann ist Translation eine stetige Operation in der L^p-Norm, d.h. für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lim_{y\to 0} \|\tau_{y+z} f - \tau_z f\|_p = 0.$$ ◇

Beweis
Zunächst gilt $\tau_{y+z} f(x) = f(x - y - z) = \tau_z f(x - y) = \tau_z \tau_y f(x)$. Demnach können wir $\tau_z f$ durch f ersetzen und somit o.B.d.A. $z = 0$ betrachten.

Weiterhin gilt für $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $|y| \leq 1$, dass $\operatorname{supp}(\tau_y g)$ kompakt ist. Daher ist für eine Kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y g - g|^p = \int_K |\tau_y g - g|^p \leq \|\tau_y g - g\|_u^p \, m(K) \overset{\text{L 1.10}}{\longrightarrow} 0, \ y \to 0$$

und somit ist die Behauptung für $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gezeigt.
Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt mit Prop. A.21:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n): \ \|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \|\tau_y f - f\|_p &= \|\tau_y f - \tau_y g + \tau_y g - g + g - f\|_p \\ &\leq \underbrace{\|\tau_y (f-g)\|_p}_{<\varepsilon/3} + \|\tau_y g - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{<\varepsilon/3} \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_y g - g\|_p \end{aligned}$$

Für y klein genug ist $\|\tau_y g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ und damit folgt die Behauptung. □

Dies gilt nicht für $p = \infty$, da z.B. die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ x \mapsto \mathcal{X}_{[0,1]}(x), \ \mathcal{X} \text{ Indikatorfunktion}$$

in $L^\infty(\mathbb{R})$ ist und für $y \neq 0$ gilt $\|\tau_y f - f\|_\infty = 1$.

§2 Faltung

Im Folgenden werden wir uns mit der Faltung zweier Funktionen beschäftigen. Man beachte, dass die hierbei erzielten Ergebnisse auch für periodische Funktionen des $\mathbb{R}^n$ Gültigkeit besitzen. Zur Vereinfachung wählen wir die Periode in jeder Variablen als 1, so dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ periodisch ist, wenn

$$f(x + k) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Demnach ist jede periodische Funktion vollständig durch ihre Werte auf dem Einheitswürfel

$$Q := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$$

bestimmt. Deshalb kann man periodische Funktionen auch als Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

ansehen. Dieser wiederum lässt sich mit der Menge aller $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ identifizieren, so dass $|z_j| = 1$ für alle j, indem man die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\exp(2\pi i x_1), \ldots, \exp(2\pi i x_n))$$

betrachtet. Somit ist $\mathbb{T}^n$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Wenn wir die nachfolgenden Ergebnisse zur Faltung auf periodische Funktionen anwenden wollen, muss der Integrationsbereich von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T}^n$ verkleinert werden. Dies findet in der weiteren Arbeit keine Verwendung, wird jedoch in Vortrag 3 zur „Fourier-Analysis"benötigt.

(2.1) Definition (Faltung)
Seien f und g zwei messbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir die Faltung von f mit g als die Funktion $f * g$ gemäß

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y)dy,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, für die dieses Integral existiert. ◇

Die Frage, die sich nun stellt, ist, welche Bedingungen an f und g notwendig sind, damit $f * g$ wenigstens fast überall existiert.
Im Weiteren benötigen wir die Tatsache, dass für eine messbare Funktion f gilt, dass $K(x,y) := f(x-y)$ messbar ist auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(2.2) Proposition (Exercise 5, p 245)
Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $s(x,y) := x - y$, dann ist $s^{-1}(E)$ Lebesgue-messbar, wenn E Lebesgue-messbar ist. Somit ist s messbar. ◇

Beweis
Sei $E \subset \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\begin{aligned} s^{-1}(E) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ x - y \in E\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ y \in \mathbb{R}^n,\ x \in \{z + y \ : \ z \in E\}\} \\ &= \{(z+y, y) \ : \ y \in \mathbb{R}^n,\ z \in E\}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Matrix

$$D := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

wobei I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist. Für D gilt

$$\det D = \frac{1}{2^n} \det \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \det(I_n) \ \det(I_n + I_n {I_n}^{-1} I_n) = 1$$

und für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(D(x_1, y_1)) \cdot (D(x_2, y_2)) &= \frac{1}{2}(x_1 - y_1, x_1 + y_1) \cdot (x_2 - y_2, x_2 + y_2) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_{1_i} - y_{1_i})(x_{2_i} - y_{2_i}) + \sum_{i=1}^{n} (x_{1_i} + y_{1_i})(x_{2_i} + y_{2_i}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} x_{1_i} x_{2_i} - \sum_{i=1}^{n} y_{1_i} x_{2_i} - \sum_{i=1}^{n} x_{1_i} y_{2_i} + \sum_{i=1}^{n} y_{1_i} y_{2_i} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} x_{1_i} x_{2_i} + \sum_{i=1}^{n} y_{1_i} x_{2_i} + \sum_{i=1}^{n} x_{1_i} y_{2_i} + \sum_{i=1}^{n} y_{1_i} y_{2_i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_{1_i} x_{2_i} + \sum_{i=1}^{n} y_{1_i} y_{2_i} \\
&= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2).
\end{aligned}$$

Demnach ist D Rotationsmatrix und es gilt

$$\begin{aligned}
Ds^{-1}(E) &= \{ D(z + y, y) \ : \ y \in \mathbb{R}^n, \ z \in E \} \\
&= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(z, z + 2y) \ : \ y \in \mathbb{R}^n, \ z \in E \right\} \\
&= \left\{ x \ : \ \sqrt{(2)}x \in E \right\} \times \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Diese Menge ist messbar, wenn E messbar ist. Dann gilt mit Satz A.4, dass auch $s^{-1}(E)$ messbar ist und somit folgt die Behauptung. $\square$

Demnach ist $K = f \circ s$ messbar, wenn f messbar ist.

Die Faltung zweier Funktionen hat die folgenden Eigenschaften.

(2.3) Eigenschaften (Proposition 8.6)
Unter der Annahme, dass die folgenden Integrale existieren, gilt

a) $f * g = g * f$

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$

c) für $z \in \mathbb{R}^n$: $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$

d) wenn A der Abschluss der Menge $\{x + y \ : \ x \in \operatorname{supp}(f),\ y \in \operatorname{supp}(g)\}$, dann ist $\operatorname{supp}(f * g) \subset A$. ◇

Beweis
zu a):

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy \overset{z=x-y}{=} \int f(z)g(x-z)dz = g * f(x)$$

zu b):

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &\overset{a)}{=} (g * f) * h(x) \\
&= \int \int f(y)g(x-z-y)h(z)dydz \\
&\overset{Fubini}{=} \int \int f(y)g(x-z-y)h(z)dzdy \\
&= (g * h) * f(x) \\
&\overset{a)}{=} f * (g * h)(x)
\end{aligned}$$

zu c):

$$\begin{aligned}
\tau_z(f * g)(x) &= (f * g)(x-z) \\
&= \int f(x-z-y)g(y)dy \\
&= \int \tau_z f(x-y)g(y)dy
\end{aligned}$$

$$= (\tau_z f) * g(x)$$

und

$$\tau_z(f * g)(x) \overset{a)}{=} \tau_z(g * f)(x) \overset{s.o.}{=} (\tau_z g) * f(x) \overset{a)}{=} f * (\tau_z g)(x)$$

zu d): Angenommen $x \notin A$. Dann gilt für alle $y \in$supp(g), dass $x - y \notin$supp(f). Damit ist $f(x-y)g(y) = 0$ für alle y und damit $f * g(x) = 0$. Somit folgt die Behauptung. □

— Existenz —

Nun noch einige Ergebnisse die uns Voraussetzungen für die Existenz der Faltung, zumindest fast überall, liefern.

(2.4) Proposition (Young Ungleichung, Proposition 8.7)
Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann existiert $f * g(x)$ für fast alle x, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. ◇

Beweis
Definiere $h(x, y) := f(y)g(x-y)$. Dann ist, da $f(y)$ für fast alle y endlich ist, $h(., y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für fast alle y. Zudem ist die Funktion

$$y \mapsto \|h(., y)\|_p = |f(y)| \|\tau_y g\|_p = |f(y)| \|g\|_p \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Damit lässt sich die Minkowski Ungleichung A.17 b) anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p = \|g * f\|_p &= \left\| \int f(y) g(. - y) dy \right\|_p \\
&\leq \int \|f(y) g(. - y)\|_p dy \\
&= \int |f(y)| \|g(. - y)\|_p dy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_p
\end{aligned}$$

□

(2.5) Proposition (Proposition 8.8)
Seien p, q konjugierte Exponenten, d.h. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (insbesondere also auch $p=1$, $q=\infty$ und umgekehrt). Sei $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, dann existiert $f*g(x)$ für alle x, $f*g$ ist beschränkt und gleichmäßig stetig und $\|f*g\|_u\leq\|f\|_p\|g\|_q$.
Wenn $1<p<\infty$, dann ist $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$, wobei

$$C_0(\mathbb{R}^n):=\{f\in C(\mathbb{R}^n)\ :\ \forall\varepsilon>0 \text{ ist } \{x:|f(x)|>\varepsilon\} \text{ kompakt}\}. \qquad \diamond$$

Beweis
Man beachte, dass für $p=1,\ q=\infty$ gilt

$$\|fg\|_1=\int|f(x)||g(x)|dx\leq\|g\|_\infty\int|f(x)|dx=\|f\|_1\|g\|_\infty, \tag{4}$$

da g für fast alle x beschränkt ist.
Demnach gilt für alle $x\in\mathbb{R}^n$ mit (4) und der Hölder Ungleichung A.16

$$\|f(x-.)g\|_1=\int|f(x-y)||g(y)|dy\leq\|f(x-.)\|_p\|g\|_q=\|f\|_p\|g\|_q, \tag{5}$$

für $1\leq p\leq\infty$, und somit

$$|f*g(x)|=\left|\int f(x-y)g(y)dy\right|\leq\int|f(x-y)||g(y)|dy\overset{(5)}{\leq}\|f\|_p\|g\|_q.$$

$$\Rightarrow\|f*g\|_u=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int f(x-y)g(y)dy\right|\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|f\|_p\|g\|_q=\|f\|_p\|g\|_q \tag{6}$$

Damit ist $f*g$ beschränkt für alle x und damit existent. Sei im Weiteren o.B.d.A. $1\leq p<\infty$, sonst vertausche einfach die Rollen von f und g, dann

$$\begin{aligned}\|\tau_y(f*g)-f*g\|_u&=\|(\tau_y f)*g-f*g\|_u\\&=\|(\tau_y f-f)*g\|_u\\&\overset{(6)}{\leq}\|\tau_y f-f\|_p\|g\|_q\end{aligned}$$

Nach Proposition 1.11 gilt dann $\|\tau_y f-f\|_p\to 0,\ y\to 0$ und damit folgt die gleichmäßige Stetigkeit.

Nun betrachten wir noch $1<p,q<\infty$. Wähle Folgen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen mit kompakten Träger, so dass

$$\|f_k-f\|_p\to 0,\ \|g_k-g\|_q\to 0,\ k\to\infty,$$

(z.B. $f_k(x) := \mathcal{X}_{(-k,k)}(|x|)f(x)$ und $g_k(x) := \mathcal{X}_{(-k,k)}(|x|)g(x)$, $\mathcal{X}$ Indikatorfunktion). Aus 2.3 d) folgt nun, dass der Träger von $f_k * g_k$ kompakt ist und somit $f_k * g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ (s.o.). Zudem ist

$$\begin{aligned}\|f_k * g_k - f * g\|_u &= \|f_k * g_k - f * g_k + f * g_k - f * g\|_u \\ &\leq \|(f_k - f) * g_k\|_u + \|f * (g_k - g)\|_u \\ &\leq \|f_k - f\|_p \|g_k\|_q + \|f\|_p \|g_k - g\|_q \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Dann folgt mit A.14, dass $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. □

(2.6) Proposition (Proposition 8.9)
Angenommen $1 \leq p, q, r \leq \infty$ und $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Dann

a) [Young Ungleichung, allgemeine Form] Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

b) Sei zusätzlich $p > 1, q > 1$ und $r < \infty$. Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in$ *schwach* $L^q(\mathbb{R}^n)$ (siehe A.18), dann ist $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_r \leq C_{pq}\|f\|_p [g]_q$, wobei C_{pq} unabhängig von f und g ist.

c) Angenommen $p = 1$ und $r = q > 1$. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in$ *schwach* $L^q(\mathbb{R}^n)$, dann $f * g \in$ *schwach* $L^q(\mathbb{R}^n)$ und $[f * g]_q \leq C_q \|f\|_1 [g]_q$, wobei C_q unabhängig von f und g. ◇

Beweis
zu a):

Sei q beliebig aber fest, dann gilt für $p = 1$, $r = q$ respektive $p = \frac{q}{1-q}$, $r = \infty$ die Behauptung aus Proposition 2.4 respektive 2.5.
Für den allgemeinen Fall gilt $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Definieren wir nun

$$p_0 := 1,\ p_1 := \frac{q}{1-q},\ r_0 := q,\ r_1 := \infty$$

und für $0 < t < 1$

$$\frac{1}{p_t} := (1-t)\frac{1}{p_0} + t\frac{1}{p_1}, \qquad \frac{1}{r_t} := (1-t)\frac{1}{r_0} + t\frac{1}{r_1}.$$

Dann ist für festes $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$

$$T : L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \to L^{r_0}(\mathbb{R}^n) + L^{r_1}(\mathbb{R}^n),\ f \mapsto f * g$$

und es gilt

$$\|Tf\|_{r_0} = \|f * g\|_{r_0} \overset{Prop. 2.4}{\leq} \|f\|_{p_0}\|g\|_q, \ \forall f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ M_0 := \|g\|_q$$

und

$$\|Tf\|_{r_1} = \|f * g\|_{r_1} \overset{Prop. 2.5}{=} \|f * g\|_u = \overset{Prop. 2.5}{\leq} \|f\|_{p_1}\|g\|_q, \ \forall f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ M_1 := \|g\|_q.$$

Dann folgt aus dem Theorem von Riesz und Thorin A.19, dass

$$\|Tf\|_{r_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t} = \|g\|_q \|f\|_{p_t} \ \forall f \in L^{p_t}(\mathbb{R}^n), \ 0 < t < 1.$$

zu b):

Es ist

$$f * g(x) = g * f(x) = \int g(x-y) f(y) dy = \int K(x,y) f(y) dy, \text{ wobei } K(x,y) := g(x-y)$$

Demnach ist $K(x,y)$ messbar und

$$\begin{aligned}
[K(x,.)]_q &= \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^q \ m(\{y \ : \ |g(x-y)| > \alpha\}) \right)^{1/q} \\
&= \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^q \ m(\{x-y \ : \ |g(y)| > \alpha\}) \right)^{1/q} \\
&= \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^q \ m(\{y \ : \ |g(y)| > \alpha\}) \right)^{1/q} \\
&= [g]_q < \infty, \\
[K(.,y)]_q &= \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^q \ m(\{x \ : \ |g(x-y)| > \alpha\}) \right)^{1/q} \\
&= \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^q \ m(\{x \ : \ |g(x)| > \alpha\}) \right)^{1/q} \\
&= [g]_q < \infty.
\end{aligned}$$

Mit $C := [g]_q$ und Theorem A.20 folgt, dass

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) dy$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ konvergiert und

$$\|Tf\|_r \leq B_q [g]_q \|f\|_p.$$

zu c): Sei nun $p = 1$, $r = q > 1$, dann gilt analog zu Teil b)

$$[K(.,y)]_q = [K(x,.)]_q = [g]_q < \infty$$

und damit nach Theorem A.20

$$[Tf]_q \leq B_1 C \|f\|_1 = B_1 [g]_q \|f\|_1. \qquad \square$$

— Faltung und Differentiation —

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Faltung ist, dass unter bestimmten Voraussetzungen an f und g die Funktion $f * g$ mindestens so glatt ist, wie f oder g, denn es gilt dann

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = \partial^\alpha \int f(x-y) g(y) dy = \int \partial^\alpha f(x-y) g(y) dy = (\partial^\alpha f) * g(x)$$

oder auf analogem Wege

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha (g * f) = f * (\partial^\alpha g).$$

Nun werden Bedingungen für f und g gesucht, so dass das Vertauschen des Intergrals und der Ableitung erlaubt ist.

(2.7) Proposition (Proposition 8.10)
Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha g$ beschränkt für $|\alpha| \leq k$, dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ für $|\alpha| \leq k$. ◇

Beweis
Zunächst gilt nach Voraussetzung

$$\exists C > 0 : \ |\partial^\alpha g(x)| \leq C, \ \forall |\alpha| \leq k, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $t^i \in \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i = 0\}$ beliebig, fest. Definiere nun für $r \in \mathbb{Z}$ beliebig

$$h_{t^i} : \mathbb{R}^n \times [r-2, r] \to \mathbb{C}, \ (x,t) \mapsto f(x)g(t^i + e_i t - x)$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_{t^i}(x,t)|dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(t^i + e_i t - x)|dx \\ &\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \\ &= C\|f\|_1 < \infty\end{aligned}$$

Damit ist $h_{t^i}(.,t)$ integrierbar für alle $t \in [r-2, r]$. Zudem existiert

$$\frac{\partial h_{t^i}}{\partial t}(x,t) = f(x)\frac{\partial}{\partial t}g(t^i + e_i t - x)$$

und es gilt

$$\left|\frac{\partial h_{t^i}}{\partial t}(x,t)\right| = \left|f(x)\frac{\partial}{\partial t}g(t^i + e_i t - x)\right| \leq C|f(x)|, \ \forall x, t.$$

Somit folgt aus Theorem A.3:

$$F_{t^i}(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_{t^i}(x,t)dx$$

ist differenzierbar und da $r \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}F'_{t^i}(t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h_{t^i}}{\partial t}(x,t)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial g}{\partial t}(t^i + e_i t - x)dx \\ &= (f * \partial^{e_i} g)(t^i + e_i t), \ \forall (t^i + e_i t) \in \mathbb{R}^n, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $|\alpha| = 1$. Da zudem $\partial^\alpha g$ beschränkt für alle $|\alpha| \leq k$ folgt per Induktion über $|\alpha|$ die Behauptung für alle $|\alpha| \leq k$. □

Mit diesem Ergebnis können wir die folgende Aussage beweisen, welche uns die Vertauschung von Integration und Differentiation auf einer großen Menge von Funktionen erlaubt, sofern g nur kompakten Träger hat.

(2.8) Folgerung (Excercise 7, p 246)
Wenn $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, dann $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ für die $\int_K |f(x)|dx < \infty$ für jede kompakte messbare Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. $\diamond$

Beweis
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, fest. Da die Differenzierbarkeit von $f * g$ in einem Punkt vom Verhalten der Funktion in einer Umgebung dieses Punktes abhängt, wählen wir ein $\delta > 0$ und Betrachten die Funktion auf $B_\delta(x_0)$. Sei $K := \operatorname{supp}(g)$, dann ist K kompakt. Definieren wir $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists y \in K \ mit \ |x - y| \leq 2\delta\}$. Dann gilt für alle $x \in B_\delta(x_0)$, dass $g(x - y) = 0$ für alle $y \in K^c_\delta$. Demnach ist

$$\begin{aligned} f * g(x) = g * f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \mathcal{X}_{K_\delta}(y) f(y) dy \\ &= (g * f\mathcal{X}_{K_\delta})(x), \end{aligned}$$

für alle $x \in B_\delta(x_0)$, wobei $\mathcal{X}$ Indikatorfunktion. Nun ist aber wegen der Kompaktheit von K_δ die Funktion $f\mathcal{X}_{K_\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und demnach folgt aus Proposition 2.7, dass für alle $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\partial^\alpha (g * f\mathcal{X}_{K_\delta})(x) = (\partial^\alpha g) * f\mathcal{X}_{K_\delta}(x).$$

Da zudem

$$\partial^\alpha (g * f)(x) = \partial^\alpha (g * f\mathcal{X}_{K_\delta})(x) = (\partial^\alpha g) * f\mathcal{X}_{K_\delta}(x) = (\partial^\alpha g) * f(x),$$

für alle $x \in B_\delta(x_0)$, folgt somit die k-fache partielle Differenzierbarkeit von $f * g$ auf $B_\delta(x_0)$. Da x_0 beliebig gewählt war erhalten wir insgesamt, dass $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial^\alpha (g * f)(x) = (\partial^\alpha g) * f(x),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Man beachte, dass $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \neq 1$ und ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt also, dass $\mathcal{X}_K f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, wobei $\mathcal{X}_K$ die Indikatorfunktion auf K darstellt. Dieses Ergebnis erhält man unmittelbar aus der Hölder Ungleichung, da

$$\|\mathcal{X}_K f\|_1 \leq \|\mathcal{X}_K\|_q \|f\|_p = (m(K))^{1/q} \|f\|_p < \infty,$$

wobei q der konjugierte Exponent zu p ist und m das Lebesgue Maß.

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Faltung zweier Funktionen des Schwartzraumes wieder im Schwartzraum ist.

(2.9) Proposition (Proposition 8.11)
Wenn $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Beweis
Mit Proposition 2.7 gilt $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \overset{Prop.1.5}{\subset} L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da

$$\begin{aligned} 1+|x| &\leq 1+|x-y|+|y| \\ &\leq 1+|x-y|+|y|+|y||x-y| \\ &= (1+|x-y|)(1+|y|) \end{aligned} \tag{7}$$

gilt

$$\begin{aligned} (1+|x|)^N|\partial^\alpha(f*g)(x)| &\overset{Prop.2.7}{=} \left|\int (1+|x|)^N \partial^\alpha f(x-y)g(y)dy\right| \\ &\leq \int (1+|x|)^N|\partial^\alpha f(x-y)||g(y)|dy \\ &\overset{(7)}{\leq} \int \underbrace{(1+|x-y|)^N|\partial^\alpha f(x-y)|}_{\leq \sup_{(x-y)\in\mathbb{R}^n}(1+|x-y|)^N|\partial^\alpha f(x-y)| = \|f\|_{(N,\alpha)}} (1+|y|)^N|g(y)|dy \\ &\leq \|f\|_{(N,\alpha)} \int |g(y)|(1+|y|)^N dy \\ &= \|f\|_{(N,\alpha)} \int \underbrace{|g(y)|(1+|y|)^{N+n+1}}_{\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n}(1+|y|)^{N+n+1}|g(y)| = \|g\|_{(N+n+1,0)}} (1+|y|)^{-(n+1)}dy \\ &\leq \|f\|_{(N,\alpha)}\|g\|_{(N+n+1,0)} \int (1+|y|)^{-(n+1)}dy \overset{Beh.}{<} \infty, \end{aligned}$$

Beweis der Behauptung:

$$(1+|y|)^{-(n+1)} \leq |y|^{-(n+1)} \qquad \underset{a=n+1}{\overset{A.6}{\Longrightarrow}} (1+|y|)^{-(n+1)} \in L^1(B^c),$$

wobei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$. Zudem ist $(1+|y|)^{-(n+1)}$ auf B beschränkt und B hat endliches Lebesgue-Maß. Daher folgt, dass $(1+|y|)^{-(n+1)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und somit die Behauptung. □

Notation: Sei ϕ eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, $t > 0$, dann ist

$$\phi_t(x) := t^{-n}\phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

(2.10) Bemerkung
Wenn $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\int \phi_t$ unabhängig von t, da

$$\int \phi = \int \phi(y)dy \overset{A.4}{=} t^{-n} \int \phi\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int \phi_t$$

Zudem gilt für $t \to 0$, dass sich die Masse von ϕ_t im Nullpunkt bündelt, da für alle $\varepsilon > 0$ ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq k_\varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon > \int\limits_{|y|>k} |\phi(y)|dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{(k,\infty)}(|y|)|\phi(y)|dy \\
&= t^{-n} \int \mathcal{X}_{(k,\infty)}\left(\frac{|x|}{t}\right) \left|\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right| dx \\
&= t^{-n} \int \mathcal{X}_{(tk,\infty)}(|x|) \left|\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right| dx \\
&= \int\limits_{|x|>tk} |\phi_t(x)|\, dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

◇

Wir kommen nun zu den beiden Hauptergebnissen dieser Arbeit.

(2.11) Satz (Theorem 8.14)
Angenommen $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \phi(x)dx = a$.

a) Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, dann $f * \phi_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} af$ in der L^P-Norm.

b) Wenn f beschränkt und gleichmäßig stetig, dann gilt $f * \phi_t \underset{t\to 0}{\overset{glm.}{\longrightarrow}} af$.

c) Wenn $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, f stetig auf $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, dann $f * \phi_t \to af$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U, für $t \to 0$. $\diamond$

Beweis
zu a): Es gilt

$$\begin{aligned} f * \phi_t(x) - af(x) &= \int f(x-y)\phi_t(y)dy - \int f(x)\phi_t(y)dy \\ &= \int [f(x-y) - f(x)]\phi_t(y)dy \\ &= \int [f(x-y) - f(x)]t^{-n}\phi(t^{-1}y)dy \\ &\underset{A.4}{\overset{y=tz}{=}} \int [f(x-tz) - f(x)]\phi(z)dz \\ &= \int [\tau_{tz}f(x) - f(x)]\phi(z)dz. \end{aligned}$$

Außerdem ist $f * \phi_t \in L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Youngs Ungleichung 2.4. Weiterhin ist die Funktion

$$\begin{aligned} z \mapsto \|[f(.-tz) - f(.)]\phi(z)\|_p &= \left(\int |(f(x-tz) - f(x))\phi(z)|^p \, dx\right)^{1/p} \\ &= |\phi(z)| \|\tau_{tz}f - f\|_p \\ &\leq 2|\phi(z)| \|f\|_p \in L^1(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Also können wir Minkowskis Ungleichung A.17b) anwenden:

$$\begin{aligned} \|f * \phi_t - af\|_p &= \left\| \int [f(x-tz) - f(x)]\phi(z)dz \right\|_p \\ &\overset{A.17b)}{\leq} \int \|[f(x-tz) - f(x)]\phi(z)\|_p dz \\ &= \int \|\tau_{tz}f - f\|_p |\phi(z)| dz. \end{aligned}$$

Nun ist $\|\tau_{tz}f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$ und $\|\tau_{tz}f - f\|_p \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ nach Proposition 1.11.
Also gilt $\|\tau_{tz}f - f\|_p|\phi(z)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ für fast alle z und

$$\|\tau_{tz}f - f\|_p|\phi(z)| \leq 2\|f\|_p|\phi(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \forall t.$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz A.2 ist dann

$$0 = \int 0 = \lim_{t\to 0} \int \|\tau_{tz} f - f\|_p |\phi(z)| dz$$

und somit folgt die Behauptung.

zu b): Sei nun f beschränkt und gleichmäßig stetig, dann gilt analog zu a)

$$f * \phi_t(x) - af(x) = \int [f(x - tz) - f(x)]\phi(z)dz$$

und aus Proposition 2.7 folgt, dass $f * \phi_t - af \in C(\mathbb{R}^n)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f * \phi_t - af\|_u &= \left\| \int [f(x - tz) - f(x)|\phi(z)dz \right\|_u \\ &= \left\| \int [f(x - tz) - f(x)]\phi(z)dz \right\|_\infty \end{aligned}$$

und da f beschränkt, sowie $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, gilt

$$\underbrace{[f(. - tz) - f(.)]}_{\text{beschränkt } \forall x} \quad \underbrace{\phi(z)}_{\text{f.ü. beschränkt}} \quad \in L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

für fast alle $z \in \mathbb{R}^n$.
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} z \mapsto \|[f(. - tz) - f(.)]\phi(z)\|_\infty &= \|f(. - tz) - f(.)\|_\infty |\phi(z)| \\ &\le 2\|f\|_\infty |\phi(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

und somit lässt sich die Minkowski Ungleichung A.17 b) anwenden:

$$\begin{aligned} \left\| \int [f(x - tz) - f(x)]\phi(z)dz \right\|_\infty &\overset{A.17b)}{\le} \int \|[f(. - tz) - f(.)]\phi(z)\|_\infty dz \\ &= \int \|f(. - tz) - f(.)\|_\infty |\phi(z)| dz \end{aligned}$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f folgt, dass

$$\|f(. - tz) - f(.)\|_\infty = \|\tau_{tz} f - f\|_\infty \to 0, \ t \to 0$$

und damit sind die Voraussetzungen

i) $\|\tau_{tz}f - f\|_\infty |\phi(z)| \to 0$, $t \to 0$ fast überall

ii) $\|\tau_{tz}f - f\|_\infty |\phi(z)| \leq 2 \underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{beschränkt}} |\phi(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

des Satzes über majorisierte Konvergenz A.2 erfüllt und es gilt insgesamt

$$0 \leq \lim_{t\to 0} \|f * \phi_t - at\|_u \leq \lim_{t\to 0} \int \|\tau_{tz}f - f\|_\infty |\phi(z)| dz = \int 0 = 0$$

und demnach die gleichmäßige Konvergenz.

zu c): Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $E \subset \mathbb{R}^n$, E kompakt, so dass $\int_{E^c} |\phi| < \varepsilon$. Sei zudem $K \subset U$, K kompakt. Dann existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass

$$\bigcup_{x\in K} B_{\delta_1}(x) \subset U,$$

wobei $B_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - x| < \delta\}$ die offene Kugel mir Radius δ um x ist. Da zudem E kompakt ist, existiert $\delta_2 := \max\{|z| \ : \ z \in E\}$. Dann ist

$$|z| \frac{\delta_1}{2\delta_2} = \underbrace{\frac{|z|}{\delta_2}}_{\leq 1} \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$$

für alle $z \in E$. Demnach gilt für $0 \leq t \leq \frac{\delta_1}{2\delta_2}$:

$$x - tz \in U \ \forall x \in K, \ z \in E.$$

Somit ist

$$X := K - tE = \{x - tz \ : \ x \in K, \ z \in E\}$$

kompakt und $X \subset U$, für t hinreichend klein.
Nun ist, da X ein Kompaktum und f stetig auf U, $f(x)\mathcal{X}_X(x)$ gleichmäßig stetig auf X (analog zum Beweis von Lemma 1.10) und somit gilt für t hinreichend klein

$$\sup_{x\in K,\ z\in E} |f(x - tz) - f(x)| = \sup_{x\in K,\ z\in E} |\tau_{tz}f(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber (für t hinreichend klein)

$$\sup_{x\in K} |f * \phi_t(x) - af(x)| = \sup_{x\in K} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{tz}f(x) - f(x)]\phi(z)dz \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{x\in K} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{tz} f(x) - f(x)||\phi(z)|dz \\
&= \sup_{x\in K} \left[\int_E + \int_{E^c} \right] |f(x-tz) - f(x)||\phi(z)|dz \\
&= \sup_{x\in K} \int_E \underbrace{|f(x-tz) - f(x)|}_{\leq \varepsilon} |\phi(z)|dz + \sup_{x\in K} \int_{E^c} \underbrace{|f(x-tz) - f(x)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} |\phi(z)|dz \\
&\leq \varepsilon \int |\phi| + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{E^c} |\phi(z)|dz}_{<\varepsilon} \\
&< \varepsilon \int |\phi| + 2\varepsilon \|f\|_\infty \\
&< C\varepsilon
\end{aligned}
$$

für eine Konstante $C > 0$ und damit folgt die Behauptung. □

Aus diesem Satz erhalten wir das folgende nützliche Ergebnis. Dies wird im Vortrag zur „Fourier-Analysis“Verwendung finden.

(2.12) Korollar (Proposition 8.17)
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und damit auch $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ und in $C_0(\mathbb{R}^n)$.◇

Beweis
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$, dann existiert nach Proposition A.21 ein $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei weiterhin $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $\int \phi = 1$ (wähle zum Beispiel die Funktion $\phi = \left(\int \psi\right)^{-1} \psi$, wobei ψ wie in Bemerkung 1.1).
Dann ist $g * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Eigenschaft 2.3 d) und Proposition 2.7 und somit $\|g * \phi_t - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für hinreichend kleines t, nach Satz 2.11 a). Demnach erhalten wir

$$\|f - g * \phi_t\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * \phi_t\|_p \leq \varepsilon$$

für hinreichend kleines t und die Behauptung ist gezeigt für $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, dann gibt es nach Proposition A.14 ein $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass $\|f - g\|_u < \frac{\varepsilon}{2}$. Man beachte, dass g gleichmäßig stetig ist (Beweis analog zu Lemma

1.10).
Wählen wir nun ϕ_t wie oben, dann gilt nach Satz 2.11 b), dass $\|g - g * \phi_t\|_u < \frac{\varepsilon}{2}$ für t hinreichend klein. Somit erhalten wir insgesamt, dass

$$\|f - g * \phi_t\|_u \leq \|f - g\|_u + \|g - g * \phi_t\|_u < \varepsilon$$

für t hinreichend klein. Damit sind wir fertig. □

Mit etwas stärkeren Bedingungen an ϕ lässt sich sogar zeigen, dass $f * \phi_t \to af$ fast überall für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Der Beweis erfolgt mit einem standard Trick in der Fourier-Analysis.

(2.13) Satz (Theorem 8.15)
Angenommen $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(n+\varepsilon)}$ für $C, \varepsilon > 0$ und $\int \phi(x)dx = a$. Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt

$$f * \phi_t(x) \to af(x),\ t \to 0$$

für alle x in der Lebesgue Menge L_f von f (A.7). Insbesondere also für fast alle x und jedes x in dem f stetig ist. ◇

Beweis
Da $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(n+\varepsilon)}$ ist insbesondere für $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$

$$(1 + |x|)^{-(n+\varepsilon)} \leq |x|^{-n},\ \forall x \notin B.$$

Damit folgt aus Korollar A.6 b), dass $\phi \in L^1(B^c)$ ist und da ϕ beschränkt auf B gilt $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Demnach haben wir tatsächlich eine Einschränkung auf ϕ im Vergleich zu Satz 2.11.
Falls die Konvergenz auf der Lebesgue Menge von f gilt, dann folgt aus Satz A.8 die Konvergenz für fast alle x. Falls f in x stetig ist, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(y) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall y :\ |x - y| < \delta.$$

Sei nun $0 < r < \delta$, dann ist

$$\frac{1}{m(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{<\varepsilon} dy < \frac{m(B_r(x))}{m(B_r(x))}\varepsilon = \varepsilon$$

und damit ist $x \in L_f$.

Sei nun $x \in L_f$ (siehe A.7), dann gilt

$$\forall \delta > 0 \ \exists \eta > 0 \ : \int\limits_{|y|<r} |f(x-y) - f(x)| dy \leq \delta r^n, \ r \leq \eta. \tag{8}$$

Wir definieren nun

$$I_1 := \int\limits_{|y|<\eta} |f(x-y) - f(x)||\phi_t(y)| dy$$

$$I_2 := \int\limits_{|y|\geq\eta} |f(x-y) - f(x)||\phi_t(y)| dy$$

Behauptung:

i) I_1 ist beschränkt durch $A\delta$, wobei A unabhängig von t und δ ist

ii) $I_2 \to 0, \, t \to 0$

Damit hätten wir

$$\begin{aligned} |f * \phi_t(x) - af(x)| &= \left| \int [f(x-y) - f(x)] \phi_t(y) gy \right| \\ &\leq \int |[f(x-y) - f(x)]||\phi_t(y)| dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Dann ist aber

$$\limsup_{t \to 0} |f * \phi_t(x) - af(x)| \leq A\delta$$

und da $\delta > 0$ beliebig gewählt war sind wir fertig.

Wir wollen nun die Behauptung beweisen:

zu i): Sei $K \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$2^K \leq \frac{\eta}{t} < 2^{K+1}, \text{ falls } \frac{\eta}{t} \geq 1, \qquad K = 0, \text{ falls } \frac{\eta}{t} < 1.$$

Wir zerlegen die offene Kugel $B_\eta(0)$ mit Radius η um 0 in die Kreisringe

$$\{y \in \mathbb{R}^n \ : \ 2^{-k}\eta \leq |y| < 2^{1-k}\eta\}, \ k \in \mathbb{N}, \ 1 \leq k \leq K$$

und die Kugel $B_{2^{-K}\eta}(0)$.

Da nach Voraussetzung $|\phi(x)| \leq C(1+|x|)^{-(n+\varepsilon)}$ gilt auf dem k-ten Kreisring

$$\begin{aligned}
\left|t^{-n}\phi\left(\frac{y}{t}\right)\right| &\leq Ct^{-n}\left(1+\left|\frac{y}{t}\right|\right)^{-(n+\varepsilon)} \\
&\leq Ct^{-n}\left|\frac{y}{t}\right|^{-(n+\varepsilon)} \\
&\leq Ct^{-n}\left(\frac{2^{-k}\eta}{t}\right)^{-(n+\varepsilon)}
\end{aligned}$$

und auf $B_{2^{-K}\eta}(0)$

$$|\phi_t(y)| \overset{s.o.}{\leq} Ct^{-n}\left(\frac{2^{-K}\eta}{t}\right)^{-(n+\varepsilon)} \leq Ct^{-n},$$

da

$$2^K \leq \frac{\eta}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2^{-K}\eta}{t} \geq 1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
I_1 = &\int\limits_{|y|<\eta} |f(x-y)-f(x)||\phi_t(y)|dy \\
= &\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{2^{-k}\eta\leq|y|<2^{1-k}\eta} |f(x-y)-f(x)||\phi_t(y)|dy + \int\limits_{|y|<2^{-K}\eta} |f(x-y)-f(x)||\phi_t(y)|dy \\
\leq &\sum_{k=1}^{K} Ct^{-n}\left[\frac{2^{-k}\eta}{t}\right]^{-(n+\varepsilon)} \int\limits_{2^{-k}\eta\leq|y|<2^{1-k}\eta} |f(x-y)-f(x)|dy \\
&+ Ct^{-n}\int\limits_{|y|<2^{-K}\eta} |f(x-y)-f(x)|dy \\
\overset{(8)}{\leq} &\sum_{k=1}^{K} C\delta(2^{1-k}\eta)^n t^{-n}\left[\frac{2^{-k}\eta}{t}\right]^{-(n+\varepsilon)} + C\delta t^{-n}(2^{-K}\eta)^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad C\delta 2^n \left[\frac{\eta}{t}\right]^{-\varepsilon} \sum_{k=1}^{K} (2^\varepsilon)^k + C\delta t^{-n}(2^{-K}\eta)^n \\
&= \quad C\delta 2^n \left[\frac{\eta}{t}\right]^{-\varepsilon} \left(\frac{2^{(K+1)\varepsilon}-1}{2^\varepsilon - 1} - 1\right) + C\delta t^{-n}(2^{-K}\eta)^n \\
&= \quad C\delta 2^n \left[\frac{\eta}{t}\right]^{-\varepsilon} \frac{2^{(K+1)\varepsilon}-2^\varepsilon}{2^\varepsilon - 1} + C\delta \left(\frac{2^{-K}\eta}{t}\right)^n \\
&\leq \quad C\delta 2^n \left[\frac{\eta}{t}\right]^{-\varepsilon} \frac{2^{(K+1)\varepsilon}}{2^\varepsilon - 1} + C\delta \left(\frac{2^{-K}\eta}{t}\right)^n \\
&= \quad C\delta 2^n \left[\frac{2^{-K}\eta}{t}\right]^{-\varepsilon} 2^\varepsilon (2^\varepsilon - 1)^{-1} + C\delta \left(\frac{2^{-K}\eta}{t}\right)^n \\
&\leq \quad \underbrace{2^n C(2^\varepsilon(2^\varepsilon - 1)^{-1} + 1)}_{:=A}\,\delta,
\end{aligned}
$$

da $\frac{2^{-K}\eta}{t} \geq 1$.

Damit folgt i).

zu ii): Sei p' der konjugierte Exponent zu p, also $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ und $\mathcal{X}$ die Indikatorfunktion von $\{y \;:\; |y| \geq \eta\}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|y|\geq\eta} |f(x-y) - f(x)||\phi_t(y)|dy \\
&\leq \int_{|y|\geq\eta} (|f(x-y)| + |f(x)|)|\phi_t(y)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\mathcal{X}(y)\phi_t(y)|dy + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\mathcal{X}(y)\phi_t(y)|dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\mathcal{X}(y)\phi_t(y)|dy + |f(x)|\|\mathcal{X}\phi_t\|_1
\end{aligned}
$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\mathcal{X}(y)\phi_t(y)|dy$$

$$= \begin{cases} \|f(x-.)\mathcal{X}\phi_t\|_1 \leq \|f(x-.)\|_1\|\mathcal{X}\phi_t\|_\infty = \|f\|_1\|\mathcal{X}\phi_t\|_\infty, \text{ falls } p=1 \\ \|f(x-.)\mathcal{X}\phi_t\|_1 \leq \|f(x-.)\|_\infty\|\mathcal{X}\phi_t\|_1 = \|f\|_\infty\|\mathcal{X}\phi_t\|_1, \text{ falls } p=\infty \\ \|f(x-.)\mathcal{X}\phi_t\|_1 \overset{\text{Hölder } A.16}{\leq} \|f(x-.)\|_p\|\mathcal{X}\phi_t\|_{p'} = \|f\|_p\|\mathcal{X}\phi_t\|_{p'}, \text{ falls } 1<p<\infty. \end{cases}$$

Es reicht also zu zeigen, dass für $1 \leq q \leq \infty$ und speziell für $q=1$, $q=p'$ gilt

$$\|\mathcal{X}\phi_t\|_q \to 0,\ t \to 0.$$

Sei zunächst $q=\infty$, dann:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\phi_t\|_\infty &\leq \underbrace{|\mathcal{X}(y)|}_{\leq 1} Ct^{-n} \underbrace{\left[1+\left|\frac{y}{t}\right|\right]}_{\geq 1+\frac{\eta}{t},\text{ da } |y|\geq\eta}{}^{-(n+\varepsilon)} \\ &\leq Ct^{-n}\underbrace{\left[1+\left|\frac{\eta}{t}\right|\right]}_{\geq\frac{\eta}{t}}{}^{-(n+\varepsilon)} \\ &\leq C\eta^{-(n+\varepsilon)}t^\varepsilon \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Für $q<\infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}\phi_t\|_q^q &= \int_{|y|\geq\eta} t^{-nq}|\phi(t^{-1}y)|^q dy \\ &\overset{zt=y}{=} t^n \int_{|z|\geq\eta/t} t^{-nq}|\phi(z)|^q dz \\ &= t^{n(1-q)} \int_{|z|\geq\eta/t} |\phi(z)|^q dz \\ &\leq t^{n(1-q)} \int_{|z|\geq\eta/t} C^q(1+|z|)^{-(n+\varepsilon)q} dz \end{aligned}$$

$$= C^q t^{n(1-q)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{[\eta/t,\infty)}(|z|)(1+|z|)^{-(n+\varepsilon)q} dz \tag{9}$$

Setzen wir nun

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathcal{X}_{[\eta/t,\infty)}(|z|)(1+|z|)^{-(n+\varepsilon)q}$$

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{C},\ x \mapsto \mathcal{X}_{[\eta/t,\infty)}(x)(1+x)^{-(n+\varepsilon)q},$$

dann gilt mit Korollar A.5

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{X}\phi_t\|_q^q &\overset{(9)}{\leq} C^q t^{n(1-q)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{[\eta/t,\infty)}(|z|)(1+|z|)^{-(n+\varepsilon)q} dz \\
&\overset{A.5}{=} C^q t^{n(1-q)} \sigma(S^{n-1}) \int\limits_0^\infty \mathcal{X}_{[\eta/t,\infty)}(r)(1+r)^{-(n+\varepsilon)q} r^{n-1} dr \\
&\leq C^q t^{n(1-q)} \sigma(S^{n-1}) \int\limits_{\eta/t}^\infty r^{-(n+\varepsilon)q} r^{n-1} dr \\
&= C^q t^{n(1-q)} \sigma(S^{n-1}) \int\limits_{\eta/t}^\infty r^{n-1-(n+\varepsilon)q} dr \\
&= C^q t^{n(1-q)} \sigma(S^{n-1}) \left[\frac{1}{n-(n+\varepsilon)q} r^{n-(n+\varepsilon)q} \right]_{\eta/t}^\infty \\
&\overset{q\geq 1}{=} C^q t^{n(1-q)} \sigma(S^{n-1}) \frac{1}{(n+\varepsilon)q-n} \left(\frac{\eta}{t}\right)^{n-(n+\varepsilon)q} \\
&= C_2 t^{\varepsilon q} \xrightarrow[t\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

wobei $C_2 = C^q \sigma(S^{n-1}) \frac{1}{(n+\varepsilon)q-n} \eta^{n-(n+\varepsilon)q} > 0$ eine Konstante ist.

Demnach sind die Behauptungen war und damit der Satz gezeigt. □

Wenn wir dieses Ergebnis mit dem aus Folgerung 2.8 kombinieren, dann erhalten wir, dass für beliebiges $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, und $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, mit $\int g(x)dx = 1$, die Funktion

$$f * g_t \in \mathbb{C}^k(\mathbb{R}^n)$$

für alle $t > 0$ ist und

$$f * g_t(x) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f(x)$$

für jedes x in der Lebesguemenge L_f von f. Wir können also für jedes Element aus $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, Folgen von beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen konstruieren, die fast überall punktweise gegen f konvergieren.
Ähnliche Ergebnisse erhält man durch Kombination von Proposition 2.7 oder Folgerung 2.8 mit Satz 2.11.

§ A Verwendete Ergebnisse

— *Ergebnisse aus [1]* —

(A.1) Definition (σ-endlichen Maß, semiendliches Maß, p 25)
Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist μ

i) σ-endlich, falls $E_i \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}$, existieren, so dass $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ und $\mu(E_i) < \infty$ für alle i.

ii) semiendlich, falls für jedes $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E) = \infty$ ein $F \in \mathcal{M}$ mit $F \subset E$ existiert, so dass $0 < \mu(F) < \infty$. $\diamond$

(A.2) Satz (Satz über majorisierte Konvergenz, Theorem 2.24, p 54)
Sei $\{f_n\}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

i) $f_n \to f$ fast überall.

ii) eine nicht-negative Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass $|f_n| \leq g$, fast überall und für alle n.

Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$. $\diamond$

(A.3) Satz (Theorem 2.27, p 56)
Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Angenommen $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $-\infty < a < b < \infty$ und $f(., t) : X \to \mathbb{C}$ integrierbar, für jedes $t \in [a, b]$. Sei $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$.

b) Angenommen $\partial f / \partial t$ existiert und es gibt ein $g \in L^1(\mu)$, mit

$$|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq g(x)$$

für alle x und t. Dann ist F differenzierbar und

$$F'(t) = \int (\partial f / \partial t)(x, t) d\mu(x).$$

$\diamond$

(A.4) Satz (Theorem 2.44, p 73)
Angenommen $T \in GL(n, \mathbb{R})$ der Menge der invertierbaren Lineartransformationen auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $T(x) = Ax + b$ für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Falls f eine Lebesgue-messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $f \circ T$ das auch. Wenn zusätzlich $f \geq 0$ oder $f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$, dann

$$\int f(x)dx = |\det A| \int f \circ T(x)dx.$$

◇

(A.5) Korollar (Corollary 2.51, p 79)
Wenn f eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, f nicht-negativ oder integrierbar, so dass $f(x) = g(|x|)$ für eine Funktion g auf $(0, \infty)$, dann

$$\int f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr,$$

für ein eindeutiges Borelmaß σ auf $\mathbb{R}^{n-1}$. Dabei ist $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}$. ◇

(A.6) Korollar (Corollary 2.52, p 79)
Seien c und C positive Konstanten und sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < c\}$. Sei zudem f eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$.

a) Falls ein $a < n$ existiert, so dass $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ für alle $x \in B$, dann ist $f \in L^1(B)$. Falls jedoch $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ für alle $x \in B$, dann ist $f \notin L^1(B)$.

b) Falls ein $a > n$ existiert, so dass $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ für alle $x \in B^c$, dann ist $f \in L^1(B^c)$. Falls jedoch $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ für alle $x \in B^c$, dann ist $f \notin L^1(B^c)$. ◇

(A.7) Definition (Lebesgue Menge von f, p 97)
Die Lebesgue Menge von f wird definiert als

$$L_f := \{x \ : \ \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|dy = 0\},$$

wobei $B_r(x)$ die offene Kugel mit Radius r um x ist. ◇

(A.8) Satz (Theorem 3.20, p 98)
Wenn $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $m((L_f)^c) = 0$. ◇

(A.9) Definition (Absolute Stetigkeit, p 105)
F ist absolut stetig auf $[a, b]$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede endliche Menge disjunkter Intervalle $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ gilt

$$\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \delta \ \Rightarrow \ \sum_{j=1}^{N} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

◇

(A.10) Satz (Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung, Theorem 3.35, p 106)
Für $-\infty < a < b < \infty$ und $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ sind äquivalent

a) F ist absolut stetig auf $[a,b]$ (siehe A.9)

b) $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ für ein $f \in L^1([a,b], m)$

c) F ist f.ü. differenzierbar auf $[a,b]$, $F' \in L^1([a,b], m)$ und $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$.$\diamond$

(A.11) Definition (Hausdorffraum, p 117)
Ein topologischer Raum X ist ein Hausdorffraum, falls für $x \neq y$ disjunkte offene Mengen U und V existieren, so dass $x \in U$ und $y \in V$. $\diamond$

(A.12) Definition (kompakter topologischer Raum, p 128)
Ein topologischer Raum X ist kompakt, falls für jede Kollektion offener Mengen $\{U_a\}_{a\in A}$ mit $\bigcup\limits_{a\in A} U_a = X$ ein endliches $B \subset A$ existiert, mit $\bigcup\limits_{a\in B} U_a = X$. $\diamond$

(A.13) Definition (lokal kompakter topologischer Raum, p 131)
Ein topologischer Raum X ist lokal kompakt, falls jeder Punkt in X eine kompakte Nachbarschaft besitzt. $\diamond$

(A.14) Proposition (Proposition 4.35, p 132)
Wenn X ein lokal konvexer Hausdorffraum ist, dann ist $C_0(X)$ der Abschluss von $C_c(X)$ in der Metrik $\rho(f,g) := \|f - g\|_u$. $\diamond$

(A.15) Definition (Frechetraum, p 167)
Ein vollständiger topologischer Hausdorffraum, dessen Topologie durch eine abzählbare Familie von Halbnormen bestimmt wird, ist ein Frechetraum. $\diamond$

(A.16) Satz (Hölder Ungleichung, Theorem 6.2, p 182)
Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $1 < p < \infty$, so dass $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Wenn f und g messbare Funktionen auf X sind, dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \qquad \diamond$$

(A.17) Satz (Minkowski-Ungleichung für Integrale, Theorem 6.19, p 194)
Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und sei f eine $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-messbare Funktion auf $X \times Y$. Dann gilt

a) Wenn $f \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$, dann

$$\left[\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leq \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y).$$

b) Wenn $1 \leq p \leq \infty$, $f(.,y) \in L^p(\mu)$ für fast alle y und die Funktion $y \mapsto \|f(.,y)\|_p$ in $L^1(\nu)$, dann gilt

  i) $f(x,.) \in L^1(\nu)$ für fast alle x

  ii) $x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ ist in $L^p(\mu)$

  iii) $\| \int f(.,y)d\nu(y)\|_p \leq \int \|f(.,y)\|_p d\nu(y)$ ◇

(A.18) Definition (schwach L^p, p 197-198)
Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und f eine messbare Funktion auf X. Für $0 < p < \infty$ ist $f \in$ *schwach* $L^p(\mathbb{R}^n)$, falls $[f]_p < \infty$, wobei

$$[f]_p := \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p} = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \mu(\{x \ : \ |f(x)| > \alpha\})\right)^{1/p}$$

Hierbei heißt λ_f die Verteilungsfunktion von f. ◇

(A.19) Satz (Riesz-Thorin Interpolationstheorem, Theorem 6.27, p 200)
Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ Maßräume und seien p_0, p_1, q_0, $q_1 \in [1, \infty]$. Falls $q_0 = q_1 = \infty$, dann sein ν zusätzlich semiendlich. Definiere für $0 < t < 1$ p_t und q_t durch

$$\frac{1}{p_t} := (1-t)\frac{1}{p_0} + t\frac{1}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} := (1-t)\frac{1}{q_0} + t\frac{1}{q_1}.$$

Wenn T eine lineare Abbildung von $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ nach $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ ist, so dass

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \forall f \in L^{p_0}(\mu)$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}, \forall f \in L^{p_1}(\mu)$$

Dann gilt

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}, \forall f \in L^{p_t}(\mu), \ 0 < t < 1.$$ ◇

(A.20) Satz (Theorem 6.36, p 206)
Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $1 < q < \infty$. Sei K eine messbare Funktion auf $X \times Y$, so dass für ein $C > 0$ gilt, dass $[K(x,.)]_q \leq C$ für fast alle $x \in X$ und $[K(.,y)]_q \leq C$ für fast alle $y \in Y$.
Falls $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\nu)$, dann konvergiert das Integral

$$Tf(x) := \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$$

absolut für fast alle $x \in X$ und es existieren Konstanten B_p unabhängig von K, so dass

$$[Tf]_q \leq B_1 C\|f\|_1 \ (p = 1), \qquad \|Tf\|_r \leq B_p C\|f\|_p \ (p > 1,\ r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 > 0).$$

◇

(A.21) Proposition (Proposition 7.9, p 217)
Ist μ ein Radon-Maß auf X, X lokal kompakter Hausdorffraum, dann ist $C_c(X)$ dicht in $L^p(\mu)$ für $1 \leq p < \infty$. ◇

— sonstige Ergebnisse —

(A.22) Lemma
Sei $\{(N_i, \alpha_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n$, $d(f,g) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|f-g\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1+\|f-g\|_{(N_i,\alpha_i)}}$ und seien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{S}$, so dass $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$, dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0 \iff \forall i \geq 1,\ \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

◇

Beweis
"$\Rightarrow$": Für $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1 + \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}} \leq 2^i d(f_k, f) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} : \lim_{k\to\infty} \frac{\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1 + \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}} = 0.$$

"$\Leftarrow$": Es ist

$$d(f_k, f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \frac{\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1 + \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}} + \underbrace{\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1 + \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}}_{\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N}}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow\ d(f_k, f) \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \frac{\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1 + \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ für $i = 1, \ldots, N$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \frac{\|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1 + \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt insgesamt, dass

$$\forall k \geq k_0 : d(f_k, f) < \varepsilon. \qquad \square$$

Literatur

[1] Folland, Gerald B. (1999). *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, Second Edition*, John Wiley and Sons, Inc., New York.