Fourier-Analysis

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 21.03.2011

Stephanie Feddern

Die vorliegende Seminararbeit basiert auf den Seiten 247-254 des Buches *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications* von Gerald B. Folland. Sie gibt eine Einführung in die Fourier-Analysis, indem zunächst die Fourier-Transformation für spezielle periodische, messbare Funktionen definiert wird. Anschließend werden diese Resultate auf spezielle messbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ übertragen. Ein Hauptresultat ist der Satz über die inverse Fourier-Transformation, der unter gewissen Bedingungen die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Fourier-Transformation ermöglicht.

§1 Einführung

Eines der fundamentalen Prinzipien der harmonischen Analysis ist das Ausnutzen von Symmetrien.
Betrachtet man einen Raum, auf dem eine Gruppe operiert, so ist die Idee, Funktionen zu untersuchen, die sich auf einfache Weise unter der Gruppenoperation transformieren lassen. Ziel ist es, beliebige Funktionen in Summen oder Integrale dieser simpleren Funktionen zu zerlegen.

Im Folgenden betrachten wir die Räume $\mathbb{R}^n$ sowie $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Beides sind Abelsche Gruppen mit der Addition als Gruppenoperation. In der harmonischen Analysis sind unsere Bausteine Funktionen, bei denen die Translation des Additionsoperators durch Multiplikation der Funktion mit einem Faktor vom Betrag 1 dargestellt werden kann. Man sucht also Funktionen für die gilt, dass für alle x ein $\phi(x)$ mit $|\phi(x)| = 1$ existiert, so dass $f(y + x) = \phi(x)f(y)$.
Haben f und ϕ diese Eigenschaft, dann ist $f(x) = \phi(x)f(0)$, also ist f vollständig durch ϕ bestimmt, wenn $f(0)$ gegeben ist.
Weiterhin gilt:

$$\phi(x)\phi(y)f(0) = \phi(x)f(y+0) = \phi(x)f(y) = f(x+y) = \phi(x+y)f(0).$$

Also falls $f \neq 0$, so gilt $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$.

Um alle f zu finden, die sich wie oben beschrieben verhalten, reicht es demnach alle ϕ mit Betrag 1 zu finden, die $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ erfüllen.

Wenn wir zusätzlich fordern, dass ϕ messbar ist, dann erhalten wir eine vollständige Lösung des Problems.

(1.1) Satz
Sei ϕ eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{T}^n$) mit $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ und $|\phi| = 1$. Dann existiert ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\xi \in \mathbb{Z}^n$), so dass $\phi(x) = e^{2\pi i \xi \cdot x}$. ◇

Beweis
Zunächst beweisen wir die Aussage auf $\mathbb{R}$:
Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\int_0^a \phi(t)\,dt \neq 0$. Solch ein a existiert, denn angenommen für alle a gelte $\int_0^a \phi(t)\,dt = 0$. Dann wäre für $r > 0$ und $E_r = [a - \frac{r}{2}, a] \subset B(r,a)$, wobei $a \in L_\phi$, der Lebesguemenge (vgl. Definition A.7), und $B(r,a)$ die offene Kugel um a mit Radius r:

$$\int_0^{a-\frac{r}{2}} \phi(t)\,dt \overset{\text{nach Vor.}}{=} 0 \quad \forall\ r > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{a-\frac{r}{2}}^{a} \phi(t)\,dt = 0 \quad \forall\ r > 0.$$

Außerdem wäre $m(E_r) = \frac{r}{2} > \frac{1}{5}\, m(B(r,a)) = \frac{2}{5}r$, wobei m das Lebesguemaß ist. Daraus folgt dann, dass sich E_r gutartig reduziert („shrinks nicely“, vgl. Definition A.8) und somit folgt mit dem Lebesgueschen Differentiationssatz (A.9):

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \underbrace{\int_{E_r} \phi(y)\,dy}_{=\,0} \ = \ 0 \ = \ \phi(a).$$

Also gilt für alle $x \in L_\phi$, dass $\phi(x) = 0$, was im Widerspruch zu $|\phi| = 1$ steht.

Wir definieren $A := \left(\int_0^a \phi(t)\,dt\right)^{-1}$. Dann gilt:

$$\phi(x) \ = \ \phi(x) A \int_0^a \phi(t)\,dt \ = \ A \int_0^a \phi(x)\phi(t)\,dt \ = \ A \int_0^a \phi(x+t)\,dt \ = \ A \int_x^{x+a} \phi(t)\,dt$$

Daraus folgt, dass ϕ als das Integral einer lokal integrierbaren Funktion stetig ist und daraus folgt wiederum, dass $\phi \in C^1$ als Integral einer stetigen Funktion. Weiterhin gilt

$$\phi'(x) \ = \ A\Big[\phi(x+a) - \phi(x)\Big] \ = \ A\Big[\phi(x)\phi(a) - \phi(x)\Big] = B\phi(x),$$

wobei $B := A\Big[\phi(a) - 1\Big]$.
Damit folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, e^{-Bx}\phi(x) \ = -Be^{-Bx}\phi(x) + e^{-Bx}\phi'(x) \ = -Be^{-Bx}\phi(x) + e^{-Bx}B\phi(x) \ = \ 0,$$

also ist $e^{-Bx}\phi(x) = c$ bzw. $\phi(x) = ce^{Bx}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant ist. Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir $x = 0$ und erhalten mit $\phi(0) = A \int_0^a \phi(t)\,dt = AA^{-1} = 1$:

$$1 = \phi(0) = ce^{B\cdot 0} = c \cdot 1 = c.$$

Also gilt insgesamt $\phi(x) = e^{Bx}$.
Da für alle x gilt, dass

$$1 = |\phi(x)| = |e^{Bx}| = |e^{(a+ib)x}| = |e^{ax} \cdot e^{ibx}| = |e^{ax}| \cdot \underbrace{|e^{ibx}|}_{=1} \Leftrightarrow a = 0,$$

folgt, dass B rein imaginär ist, also wähle $B = 2\pi i\xi$ für $\xi \in \mathbb{R}$.
Damit folgt die Behauptung auf $\mathbb{R}$: $\phi(x) = e^{2\pi i\xi x}$.

Betrachten wir $\mathbb{T}$, so ist ϕ zusätzlich periodisch mit Periode 1. Daher gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} e^{2\pi i\xi x} &= e^{2\pi i\xi(x+k)} = e^{2\pi i\xi x}e^{2\pi i\xi k} \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= e^{2\pi i\xi k} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \xi \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung auch auf $\mathbb{T}$.

Der n-dimensionale Fall folgt leicht aus dem obigen: Dazu betrachten wir die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ und die Funktionen $\psi_j(t) := \phi(te_j)$, $t \in \mathbb{R}$.
Diese erfüllen

$$\psi_j(t+s) = \phi((t+s)e_j) = \phi(te_j + se_j) = \phi(te_j)\phi(se_j) = \psi_j(t)\psi_j(s).$$

Es gilt also nach obigem Beweis $\psi_j(t) = e^{2\pi i\xi_j t}$ und daher

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \prod_{j=1}^n \phi(x_j e_j) = \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \\ &= \prod_{j=1}^n e^{2\pi i\xi_j x_j} = e^{2\pi i \sum_{j=1}^n \xi_j x_j} = e^{2\pi i\xi\cdot x}. \end{aligned}$$

□

Mit diesem Satz haben wir also eine eindeutige Darstellung unserer Grundbausteine gefunden.

§2 Die Fourier-Transformation auf $\mathbb{T}^n$

Wir versuchen nun beliebige Funktionen auf $\mathbb{T}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ als Summen oder Integrale von Funktionen der Form $e^{2\pi i\xi\cdot x}$ darzustellen. Auf $\mathbb{T}^n$ gelingt das sofort für L^2-Funktionen:

(2.1) Satz
Sei $E_\kappa(x) = e^{2\pi i\kappa\cdot x}$. Dann ist $\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{T}^n)$. ◇

Beweis
Zunächst zeigen wir, dass die E_κ orthonormal sind. Normalität ist leicht zu sehen, denn für alle $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\left\langle e^{2\pi i\kappa\cdot x}, e^{2\pi i\kappa\cdot x}\right\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i\kappa\cdot x}\, e^{-2\pi i\kappa\cdot x}\, dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Orthogonalität folgt für beliebige $\kappa, \xi \in \mathbb{Z}^n$ mit $\kappa \neq \xi$:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{2\pi i\kappa\cdot x}, e^{2\pi i\xi\cdot x}\right\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i\kappa\cdot x} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\, dx = \int_0^1 e^{2\pi i(\kappa-\xi)\cdot x}\, dx \\
&= \int_0^1 e^{2\pi i\sum_{j=1}^n[(\kappa_j-\xi_j)x_j]}\, dx = \int_0^1 \prod_{j=1}^n e^{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)x_j}\, dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{j=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)x_j}\, dx_j = 0,
\end{aligned}$$

denn ist $\kappa \neq \xi \in \mathbb{Z}^n$, gibt es mindestens einen Index j, für den $\kappa_j \neq \xi_j$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)x_j}\, dx_j &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)} e^{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)x_j}\Big|_0^1 & \text{, falls } \kappa_j \neq \xi_j \\ x_j\Big|_0^1 & \text{, falls } \kappa_j = \xi_j \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)}\left(e^{2\pi i(\kappa_j-\xi_j)} - 1\right) = 0 & \text{, falls } \kappa_j \neq \xi_j \\ 1 & \text{, falls } \kappa_j = \xi_j \end{cases}.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}$ eine Basis des $L^2(\mathbb{T}^n)$ ist (vgl. Definition A.27). Dazu:
Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen $\mathbb{C}$-Linearkombinationen der E_κ, also:

$$\mathcal{A} := \operatorname{span}\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Diese ist eine Algebra (vgl. Definition A.11): Betrachte $f, g \in \mathcal{A}$, so ist $f = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\kappa E_\kappa$ und $g = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \beta_\lambda E_\lambda$ mit nur endlich vielen $\alpha_\kappa, \beta_\lambda \neq 0$ und es gilt mit $E_\kappa E_\lambda = E_{\kappa+\lambda} \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} fg = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\kappa E_\kappa \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \beta_\lambda E_\lambda &= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\kappa \beta_\lambda E_\kappa \, E_\lambda \\ = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\kappa \beta_\lambda E_{\kappa+\lambda} &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \gamma_\eta E_\eta . \end{aligned}$$

Da nun nur endlich viele der $\gamma_\eta := \alpha_\kappa \beta_\lambda \neq 0$ sind, gilt $fg \in \mathcal{A}$.
Des Weiteren trennt $\mathcal{A}$ die Punkte in $\mathbb{T}^n$ (vgl. Definition A.12): Sind $x, y \in \mathbb{T}^n$ mit $x \neq y$, so gibt es mindestens einen Index $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $x_j \neq y_j$. Wähle $\kappa = e_j$ und betrachte $f = E_{e_j} \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$f(x) = E_{e_j}(x) = e^{2\pi i e_j \cdot x} = e^{2\pi i x_j} \neq e^{2\pi i y_j} = e^{2\pi i e_j \cdot y} = E_{e_j}(y) = f(y).$$

Zusätzlich ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen bezüglich komplexer Konjugation, denn mit $\overline{E_\kappa} = E_{-\kappa} \in \mathcal{A}$ folgt für ein beliebiges $f = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\kappa E_\kappa \in \mathcal{A}$ mit endlich vielen $\alpha_\kappa \neq 0$:

$$\overline{f} = \overline{\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \alpha_\kappa E_\kappa} = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \overline{\alpha_\kappa}\,\overline{E_\kappa} = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \overline{\alpha_\kappa} E_{-\kappa} \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathbb{T}^n$ kompakt ist und $\overline{\mathcal{A}}$, der Abschluss von $\mathcal{A}$, abgeschlossen in $C(\mathbb{T}^n)$, lässt sich der Satz von Stone-Weierstrass im Komplexen (A.13) anwenden und es folgt, dass $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{T}^n)$ oder $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(\mathbb{T}^n) : f(x_0) = 0\}$ für ein $x_0 \in \mathbb{T}^n$. Der zweite Fall kann direkt ausgeschlossen werden, da $E_0 = 1 \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \mathbb{T}^n$.
Da außerdem $\mathcal{A}$ dicht in $\overline{\mathcal{A}}$ liegt, wissen wir nun, dass die Menge aller endlichen Linearkombinationen $\mathcal{A}$ dicht in $C(\mathbb{T}^n)$ liegt. Dies gilt in der gleichmäßigen Norm und daher in der L^2-Norm, da das Lebesguemaß von $\mathbb{T}^n$ endlich ist: Sei $f \in \mathcal{A}$ und $g \in C(\mathbb{T}^n)$, so dass gilt: $\|f - g\|_u < \epsilon$, dann ist

$$\begin{aligned} \|f-g\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2} &\leq \|f-g\|_u \Big(\int_{\mathbb{T}^n} dx \Big)^{1/2} \\ = \|f-g\|_u \Big(m(\mathbb{T}^n) \Big)^{1/2} &< \epsilon \Big(m(\mathbb{T}^n) \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $C(\mathbb{T}^n)$ seinerseits dicht in $L^2(\mathbb{T}^n)$ nach Proposition A.18, da $C_c(\mathbb{T}^n) \subset C(\mathbb{T}^n)$.
Daher haben wir eine orthonormale Menge gefunden, die einen Raum aufspannt, der dicht in $L^2(\mathbb{T}^n)$ liegt. Und damit ist $\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{T}^n)$. □

Mithilfe dieses Resultats, können wir die folgenden Begriffe definieren:

(2.2) Definition (Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{T}^n)$)
Für $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ definieren wir die *Fourier-Transformation* $\hat{f} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ durch:

$$\hat{f}(\kappa) = \langle f, E_\kappa \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \kappa \cdot x}\, dx.$$

◇

(2.3) Definition (Fourier-Reihe)
Sei $\hat{f}$ wie in Definition (2.2). Dann nennen wir die Reihe

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\kappa) E_\kappa$$

die *Fourier-Reihe* von f. ◇

Der Begriff Fourier-Transformation wird auch für die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ verwendet. Satz 2.1 besagt dann, dass die Fourier-Transformation $L^2(\mathbb{T}^n)$ auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ abbildet: Die Menge $\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}$ ist vollständig, da sonst ein $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ existiert, mit $\langle E_\kappa, f \rangle = 0$ für alle $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ und somit f orthonormal zu $\operatorname{span}\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Basis-Eigenschaft. Damit gilt nach Satz A.14 die Parseval-Gleichung für alle $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, E_\kappa \rangle|^2$$

und weiterhin konvergiert die Fourier-Reihe von f in der L^2-Norm gegen f. Demnach bildet

$$f : L^2(\mathbb{T}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$$

normerhaltend ab.

Die Definition von $\hat{f}(\kappa)$ lässt sich auch auf Funktionen $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ erweitern, denn es gilt

$$|\hat{f}(\kappa)| = \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \kappa \cdot x}\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \kappa \cdot x}|\, dx = \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \text{ für alle } \kappa,$$

und somit lässt sich die Fourier-Transformation als normreduzierende Operator von $L^1(\mathbb{T}^n)$ nach $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ auffassen.
Zwar hat die Fourier-Reihe einer L^1-Funktion nicht unbedingt die schönen Eigenschaften der Fourier-Reihe einer L^2-Funktion, trotzdem existieren Methoden um f

aus $\hat{f}$ zu erhalten. Interessierte Leser werden auf Kapitel 8.4 des Buches verwiesen.

Interpolation zwischen $L^1(\mathbb{T}^n)$ und $L^2(\mathbb{T}^n)$ liefert das folgende Resultat:

(2.4) Satz (Hausdorff-Young Ungleichung)
Es sei $1 \leq p \leq 2$ und q der konjugierte Exponent zu p, es gelte also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Ist $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, dann gilt $\hat{f} \in l^q(\mathbb{Z}^n)$ und $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$. ◇

Beweis
Die Aussage lässt sich mit Hilfe des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin (A.17) zeigen. Dazu definieren wir in gleicher Notation wie dort

$$T: \; L^1(\mathbb{T}^n) + L^2(\mathbb{T}^n) \longrightarrow l^\infty(\mathbb{Z}^n) + l^2(\mathbb{Z}^n), \quad f \mapsto \hat{f}.$$

Man beachte, dass $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ und $l^2(\mathbb{Z}^n)$ die Räume L^∞ bzw L^2 mit speziellen Maßen sind.
Es gilt also $p_0 = 1, p_1 = 2, q_0 = \infty$ und $q_1 = 2$.
Wir hatten oben schon gesehen, dass für $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt, dass $|\hat{f}(\kappa)| \leq \|f\|_1$ für alle κ.
Also ist auch $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
Wie oben gilt für $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, dass $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Dann stimmen die in Satz A.17 verwendeten p_t und q_t mit unserem p und q aus den Voraussetzungen überein, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_t} &= \frac{t}{2} + 1 - t = 1 - \frac{t}{2} && \Rightarrow \quad 1 < p_t < 2 \text{ und} \\ \frac{1}{q_t} &= \frac{t}{2} && \Rightarrow \quad 2 < q_t < \infty. \end{aligned}$$

und daher $1/p_t + 1/q_t = 1$. Da außerdem nach Voraussetzung $f \in L^{p_t}(\mathbb{T}^n)$ ist, folgt mit dem Interpolationssatz die Behauptung: $\|\hat{f}\|_{q_t} \leq \|f\|_{p_t} < \infty$, und daher $\hat{f} \in l^q(\mathbb{Z}^n)$. □

Man kann also die Fourier-Transformation von $L^2(\mathbb{T}^n)$ nicht nur auf $L^1(\mathbb{T}^n) + L^2(\mathbb{T}^n)$ erweitern, sondern auf $L^p(\mathbb{T}^n)$ mit $1 \leq p \leq 2$, wobei der Zielraum $l^q(\mathbb{Z}^n)$, mit $q = \frac{p}{p-1}$, ist.

§3 Die Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$

— *Die Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$* —

Der Fall $\mathbb{R}^n$ ist komplizierter. Das intuitive Analogon zu Definition 2.2 der Fourier-Transformation ist

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx$$

und zu Definition 2.3 der Fourier-Reihe

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i \xi \cdot x}\, d\xi.$$

Diese Integrale sind aber mit Vorsicht zu genießen. Zunächst ist die Konvergenz der Fourier-Transformation für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nicht klar, da $\|f\|_1$ nicht notwendiger Weise endlich ist.
Da es aber sicherlich konvergiert, wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, da

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 < \infty,$$

wollen wir die Fourier-Transformation zunächst einmal für L^1-Funktionen definieren:

(3.1) Definition (Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wie die *Fourier-Transformation* von f durch

$$\mathcal{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx.$$

◇

Für diese lässt sich folgendes Resultat zeigen:

(3.2) Lemma
Es gilt für die Fourier-Transformation von f:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to BC(\mathbb{R}^n),$$

wobei $BC(\mathbb{R}^n)$ die beschränkten und stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. ◇

Beweis
Es ist leicht zu sehen, dass für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $\|\hat{f}\|_u \leq \|f\|_1$, denn:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, |e^{-2\pi i \xi \cdot x}|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \ \text{ unabhängig von } \xi \end{aligned}$$

Also gilt dies insbesondere auch für das Supremum.
Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (A.1) können wir zeigen, dass $\hat{f}$ stetig ist. Dazu betrachten wir eine beliebige Folge $\{\xi_k\} \subset \mathbb{R}^n$, mit $\xi_k \longrightarrow \omega$ für $k \longrightarrow \infty$, $\omega \in \mathbb{R}^n$ beliebig und fest. Es gilt

$$\Big| f(x) \Big(e^{-2\pi i \xi_k \cdot x} - e^{-2\pi i \omega \cdot x} \Big) \Big| = |f(x)| \, \Big| e^{-2\pi i \xi_k \cdot x} - e^{-2\pi i \omega \cdot x} \Big| \leq 2\, |f(x)|$$

mit $|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle x, und

$$\lim_{k \to \infty} f(x) \Big(e^{-2\pi i \xi_k \cdot x} - e^{-2\pi i \omega \cdot x} \Big) = 0.$$

Daher folgt die Stetigkeit in ω:

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \Big| \hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\omega) \Big| &= \lim_{k \to \infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi_k \cdot x}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \omega \cdot x}\, dx \Big| \\ &= \lim_{k \to \infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Big(e^{-2\pi i \xi_k \cdot x} - e^{-2\pi i \omega \cdot x} \Big)\, dx \Big| \\ &\leq \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \Big| e^{-2\pi i \xi_k \cdot x} - e^{-2\pi i \omega \cdot x} \Big|\, dx = 0. \end{aligned}$$

Da ω beliebige gewählt war, folgt die Behauptung. □

Nun wollen wir einige elementare Eigenschaften von $\mathcal{F}$ zusammenfassen:

(3.3) Satz
Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

a) $(\tau_y f)^\wedge = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \hat{f}(\xi)$ und $\tau_\eta(\hat{f}) = \hat{h}$, wobei $h(x) = e^{2\pi i \eta \cdot x} f(x)$.

b) Ist T eine invertierbare lineare Transformation auf $\mathbb{R}^n$ und $S = (T^*)^{-1}$ die Inverse der Transponierten, dann gilt $(f \circ T)^\wedge = |\det T|^{-1} \hat{f} \circ S$. Insbesondere: Ist T eine Rotationsmatrix, gilt $(f \circ T)^\wedge = \hat{f} \circ T$; und wenn $Tx = t^{-1}x$ $(t > 0)$, dann gilt $(f \circ T)^\wedge(\xi) = t^n \hat{f}(t\xi)$, so dass $(f_t)^\wedge(\xi) = \hat{f}(t\xi)$ mit der Notation aus A.23.

c) $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.

d) Ist $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq k$, dann ist $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha \hat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]\hat{}$.

e) Ist $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq k$ und $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq k-1$, dann ist $(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

f) (**Riemann-Lebesgue Lemma**) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. ◇

Beweis

a) Es gilt mit Notation A.20: $\tau_y f(x) = f(x-y)$. Damit folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(\tau_y f)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_y f(x) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi\cdot(x+y)}\,dx = e^{-2\pi i \xi\cdot y} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx \\ &= e^{-2\pi i \xi\cdot y}\,\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}\tau_\eta(\hat{f}) = \hat{f}(\xi-\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(\xi-\eta)\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi\cdot x} e^{2\pi i \eta\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx \\ &= \hat{h}(\xi), \quad \text{mit } h(x) = e^{2\pi i \eta\cdot x} f(x).\end{aligned}$$

b) Es gilt mit Satz A.4

$$\begin{aligned}(f\circ T)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x)) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx \\ &\overset{(A.4)}{=} |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi\cdot T^{-1}x}\,dx \\ &= |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i S\xi\cdot x}\,dx \\ &= |\det T|^{-1}\,\hat{f}(S\xi) = |\det T|^{-1}\,(\hat{f}\circ S)(\xi)\end{aligned}$$

Ist T eine Rotationsmatrix,so gilt $TT^* = I_d$ und damit folgt

$$1 = \det(TT^*) = (\det T)^2 \quad\Rightarrow\quad |\det T| = 1.$$

Außerdem gilt $S = (T^*)^{-1} = T$ und damit gilt mit obigem Beweis $(f \circ T)\hat{} = \hat{f} \circ T$. Ist $Tx = t^{-1}x$ $(t > 0)$, dann ist $|\det T| = t^{-n}$ und mit $T = T^*$ folgt $Sx = tx$. Dann folgt unmittelbar $(f \circ T)\hat{}(\xi) = t^n \hat{f}(t\xi)$.
Laut Notation A.23 ist für ϕ auf $\mathbb{R}^n$ und $t > 0$:

$$\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x).$$

Es gilt also

$$(f_t)\hat{}(\xi) \overset{(A.23)}{=} t^{-n}\ (f \circ T)\hat{}(\xi) = t^{-n}t^n \hat{f}(t\xi) = \hat{f}(t\xi).$$

c) Mit $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Definition A.21 bzw. Satz A.22) folgt

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy\ e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot (x-y)} e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy\, dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i \xi \cdot (x-y)}\, dx\ g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy \\
&= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \xi \cdot y}\, dy \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

d) Der Beweis erfolgt per Induktion nach $|\alpha|$:
IA: $|\alpha| = 1$.
Ist $|\alpha| = 1$, gibt es genau einen Index j mit $\alpha_j = 1$ und es gilt

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx$$

Nun benutzen wir Satz A.3 b), um zu zeigen, dass wir Integration und Differentiation vertauschen dürfen.
Dazu sei $t_k \in \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = 0\}$ beliebig und fest gewählt, e_k der k-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ und wir definieren f_{t_k} wie folgt:

$$f_{t_k}: \mathbb{R}^n \times [m-2, m], \quad (x,t) \mapsto f(x) e^{-2\pi i (t_k + e_k t)\cdot x}, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ beliebig.}$$

Dann ist $f_{t_k}(\cdot,t)$ integrierbar für alle $t \in [m-2,m]$ und

$$F_{t_k}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f_{t_k}(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(t_k+e_k t)\cdot x}\,dx = \hat{f}(t_k+e_k t).$$

Außerdem existiert die Ableitung

$$\frac{\partial f_{t_k}}{\partial t}(x,t) = f(x)\; e^{-2\pi i t_k\cdot x}(-2\pi i x_k)\; e^{-2\pi i x_k}$$

und daher ist für alle x,t:

$$\left|\frac{\partial f_{t_k}}{\partial t}(x,t)\right| = \left|f(x)e^{-2\pi i t_k\cdot x}(-2\pi i x_k)e^{-2\pi i x_k}\right| = 2\pi\;|x_k f(x)|.$$

Da nach Voraussetzung $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ist die Ableitung also durch eine L^1-Funktion beschränkt.
Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt und es folgt, dass F_{t_k} differenzierbar ist und $F'_{t_k}(t) = \int \frac{\partial f_{t_k}}{\partial t}(x,t)\,dx$.
Da t beliebig aus $[m-2,m]$ gewählt war, und m wiederrum auch beliebig war, gilt die Behauptung für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem sind auch t_k und k beliebig, deshalb gilt nun mit Satz A.3 b), dass

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\hat{f}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial}{\partial \xi_j}e^{-2\pi i \xi\cdot x}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-2\pi i x_j)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx = [(-2\pi i x_j)f]\hat{}.\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

IV: Sei die Behauptung wahr für ein r mit $|\alpha| = r < k$.

IS: Sei nun $|\alpha| = r+1 (\leq k)$. Dann gibt es einen Index j, so dass $\alpha_j > 0$ und $|\alpha_j - e_j| = r$ und es gilt

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \hat{f} &= \partial^{e_j}\,\partial^{\alpha-e_j}\hat{f}\\ &\overset{IV}{=} \partial^{e_j}[(-2\pi i x)^{\alpha-e_j} f]\hat{}\\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\int_{\mathbb{R}^n}(-2\pi i x)^{\alpha-e_j} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\end{aligned}$$

Da $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nach Voraussetzung, gilt analog zum Induktionsanfang, dass

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \hat{f} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^{\alpha - e_j} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^{\alpha - e_j} f(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^{\alpha - e_j} f(x)(-2\pi i x_j) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^{\alpha} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= [(-2\pi i x)^\alpha f]\hat{}
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung für alle α mit $|\alpha| \leq k$.

e) Auch dieser Beweis erfolgt per Induktion nach $|\alpha|$:
IA: $|\alpha| = 1$:
Zunächst betrachten wir den Fall $n = 1$. Da $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ folgt dann mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
(f')\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx \\
&= f(x) e^{-2\pi i \xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)(-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x}\, dx \\
&= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx \\
&= (2\pi i \xi) \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Der Fall $n > 1$ folgt analog: Da $|\alpha| = 1$ gibt es einen Index j mit $\alpha_j = 1$. Die

Behauptung folgt dann mit partieller Integration in der j-ten Komponente:

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) &= (\frac{\partial}{\partial x_j} f)^\wedge(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-2\pi i \xi_j) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= (2\pi i \xi_j)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

IV: Sei die Behauptung wahr für ein r mit $|\alpha| = r < k$.

IS: Sei nun $|\alpha| = r+1 (\leq k)$. Dann gibt es einen Index j, so dass $\alpha_j > 0$ und $|\alpha_j - e_j| = r$ und somit ist $\partial^{\alpha - e_j} f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt erneut mit partieller Integration nach der j-ten Komponente:

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{e_j}\, \partial^{\alpha - e_j} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \partial^{\alpha - e_j} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\alpha - e_j} f(x)(-2\pi i \xi_j) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\alpha - e_j} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= (2\pi i \xi_j)(\partial^{\alpha - e_j} f)^\wedge(\xi) \\
&\overset{IV}{=} (2\pi i \xi_j)(2\pi i \xi)^{\alpha - e_j} \hat{f}(\xi) \\
&= (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

f) Hier nutzen wir Teil e). Dazu betrachten wir $f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ und prüfen die Voraussetzungen (für $k = 1$): f ist klarer Weise in $C^1(\mathbb{R}^n)$ und da f kompakten

Träger hat, ist f auch in $C_0(\mathbb{R}^n)$. Außerdem hat dann auch jede partielle Ableitung $\partial^j f$ kompakten Träger und mit der Stetigkeit folgt $\partial^j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle j. Wir wissen, dass die Fourier-Transformation einer L^1-Funktion beschränkt ist. Also ist auch $(\partial^j f)\hat{}(\xi)$ beschränkt für alle j. Mit Teil e) gilt nun:

$$(\partial^j f)\hat{}(\xi) = (2\pi i \xi_j)\hat{f}(\xi)$$

und damit ist auch $|\xi_j|\hat{f}(\xi)$ beschränkt für alle j. Es folgt, dass $\sum_{j=1}^n |\xi_j|\hat{f}(\xi)$ beschränkt ist und es gilt

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j|\hat{f}(\xi) \geq |\xi|\hat{f}(\xi).$$

Daraus folgt, dass $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, denn für $\xi \to \infty$, muss $\hat{f}(\xi)$ verschwinden, damit der Ausdruck beschränkt bleibt.
Nun liegt $C^1(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$, da $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^1(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition A.26 dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.
Nun wählen wir für beliebiges $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $g_n \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $g_n \to g$ in der L^1-Norm. Dann konvergiert $\hat{g_n}$ gleichmäßig gegen $\hat{g}$, denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |\hat{g_n}(\xi) - \hat{g}(\xi)| &= \lim_{n\to\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} g_n(x) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i \xi\cdot x}\, dx \Big| \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi\cdot x}\big(g_n(x) - g(x)\big)\, dx \Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \big|e^{-2\pi i \xi\cdot x}\big|\, \big|g_n(x) - g(x)\big|\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_n(x) - g(x)|\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - g(x)\|_1 = 0 \ \text{ unabhängig von } \xi.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\|\hat{g_n} - \hat{g}\|_u \leq \|g_n - g\|_1 \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.
Da $C_0(\mathbb{R}^n)$ nach Proposition A.10 abgeschlossen in der gleichmäßigen Norm ist, folgt die Behauptung: $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. □

Die Eigenschaften d) und e) aus obigem Satz liefern eine fundamentale Eigenschaft der Fourier-Transformation: Die Glattheit von $\hat{f}$ wird durch die Abklingrate der Funktion f im Unendlichen festgelegt und umgekehrt.

Wir betrachten im nächsten Korollar die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, der wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \text{ für alle } N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha \text{ Multiindex} \Big\}.$$

Dabei ist

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^N \left|\partial^\alpha f(x)\right|$$

für irgendein $N \in \mathbb{N}_0$ und einen Multiindex α.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Teilmenge des $L^1(\mathbb{R}^n)$, wie im nachfolgenden Beweis deutlich wird.

(3.4) Korollar
$\mathcal{F}$ bildet den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich selbst ab. ◇

Beweis
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $x^\alpha \partial^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha|\, |\partial^\beta f(x)|\, dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{|\alpha|}\, |\partial^\beta f(x)|\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{|\alpha|+2n}\, |\partial^\beta f(x)|\, \frac{1}{(1+|x|)^{2n}}\, dx \\
&\le \|f\|_{(|\alpha|+2n,\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{2n}}\, dx < \infty,
\end{aligned}$$

denn wegen $(1+|x|)^{-2n} \le |x|^{-2n}$ für alle $x \in B^c(0,1)$ ist nach Korollar A.5 b) $(1+|x|)^{-2n} \in L^1(B^c(0,1))$ und zusätzlich beschränkt auf $B(0,1)$. Daraus folgt, dass $(1+|x|)^{-2n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Außerdem gilt klarer Weise $x^\alpha \partial^\beta f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, somit ist $x^\alpha \partial^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ für alle Multiindizes α, β.
Dann folgt aus Satz 3.3 d), dass $(\partial^\beta f)\hat{} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle β und

$$\begin{aligned}
(x^\alpha \partial^\beta f)\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} \Big((-2\pi i x)^\alpha \partial^\beta f \Big)\hat{}(\xi) \\
&\overset{(3.3)d}{=} \frac{1}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \Big(\partial^\beta f \Big)\hat{}(\xi) \\
&\overset{(3.3)e}{=} \frac{1}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \Big((2\pi i \xi)^\beta \hat{f}(\xi) \Big) \\
&= (-1)^{|\alpha|} (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} \partial^\alpha \Big(\xi^\beta \hat{f}(\xi) \Big).
\end{aligned}$$

Demnach ist $\partial^\alpha(\xi^\beta \hat{f})$ beschränkt für alle α, β als Fourier-Transformation einer L^1-Funktion und somit nach Proposition A.19 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Weiterhin gilt $\int (1+|x|)^{-n-1}\, dx < \infty$, analog zu obiger Argumentation, und damit

$$\begin{aligned}
\|(x^\alpha \partial^\beta f)\check{}\|_u &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(x^\alpha \partial^\beta f)\check{}(\xi)| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \partial^\beta f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \Big| \\
&\le \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|\, \underbrace{|e^{-2\pi i \xi \cdot x}|}_{=1}\, dx \\
&= \underbrace{\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|\, dx}_{\text{unabhängig von } \xi} = \|x^\alpha \partial^\beta f\|_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)(1+|x|)^{n+1}|\, (1+|x|)^{-n-1}\, dx \\
&\le \|x^\alpha \partial^\beta f(x)(1+|x|)^{n+1}\|_u \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1}\, dx}_{=:\, C} \\
&= C \|x^\alpha \partial^\beta f(x)(1+|x|)^{n+1}\|_u.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{(N,\beta)} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^N \left|\partial^\beta \hat{f}(\xi)\right| \\
&\overset{\text{Beweis }(A.19)}{\leq} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_1 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\xi^\gamma\right| \left|\partial^\beta \hat{f}(\xi)\right| \\
&\overset{\text{Beweis }(A.19)}{\leq} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_1 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\xi^\gamma\, \partial^\beta \hat{f}(\xi)\right| \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_1 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\frac{1}{2\pi i}\right|^{|\gamma|} \left|(2\pi i\xi)^\gamma\, \partial^\beta \hat{f}(\xi)\right| \\
&\overset{(3.3)d}{=} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_1 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\frac{1}{2\pi}\right|^{|\gamma|} \left|(2\pi i\xi)^\gamma\, \left[(-2\pi i x)^\beta f\right]\hat{}(\xi)\right| \\
&\overset{(3.3)e}{=} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_1 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\frac{1}{2\pi}\right|^{|\gamma|} \left| \left[\partial^\gamma(-2\pi i x)^\beta f\right]\hat{}(\xi)\right| \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \underbrace{C_1(2\pi)^{|\beta|}}_{=:\, C_2} \sum_{|\gamma|\leq N} \left| \left[\partial^\gamma x^\beta f\right]\hat{}(\xi)\right| \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_2 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\left[\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha_1!\alpha_2!}(\partial^{\alpha_1}x^\beta)(\partial^{\alpha_2}f)\right]\hat{}(\xi)\right| \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_2 \sum_{|\gamma|\leq N} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha_1!\alpha_2!}\left|\left[(\partial^{\alpha_1}x^\beta)(\partial^{\alpha_2}f)\right]\hat{}(\xi)\right| \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_2 \sum_{|\gamma|\leq N} \left|\left[g_\gamma(x)\partial^\gamma f\right]\hat{}(\xi)\right|, \text{ wobei } g_\gamma \text{ ein Polynom vom Grad } \beta \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C_2 \sum_{|\gamma|\leq N} \|(g_\gamma(x)\partial^\gamma f)\hat{}\|_u \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} C\, C_2 \sum_{|\gamma|\leq N} \|(1+|x|)^{n+1} g_\gamma(x)\partial^\gamma f\|_u \;=\; (\star)
\end{aligned}
$$

Da $g_\gamma(x)$ ein Polynom vom Grad β ist, existiert ein Kompaktum $K\subset\mathbb{R}^n$, so dass $|g_\gamma(x)|\leq(1+|x|)^{|\beta|+1}$ für alle $x\notin K$ und da $(1+|x|)^{|\beta|+1}\geq 1$, existiert $C_\gamma := \max(1, \max_{x\in K}|g_\gamma(x)|)$, so dass $C_\gamma(1+|x|)^{|\beta|+1}\geq|g_\gamma(x)|$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
(\star) &\le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \underbrace{C\, C_2 \max_{|\gamma|\le N}(C_\gamma)}_{=:\, C_{N,\beta}} \sum_{|\gamma|\le N} \left\| (1+|x|)^{n+1}(1+|x|)^{|\beta|+1}\partial^\gamma f \right\|_u \\
&= C_{N,\beta} \sum_{|\gamma|\le N} \|f\|_{(|\beta|+n+2,\gamma)}.
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Stetigkeit der Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Alternativ: Man kann sich die Arbeit erleichtern, indem man ein Resultat über den Schwartz-Raum aus der Seminararbeit von Alexander Katzur verwendet:

Proposition (1.5 aus der Arbeit von A.Katzur)
Es gilt: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall p \in [1,\infty]$. Weiterhin ist die Einbettung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig , d.h. dass eine Funktionenfolge, die in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, auch in $\|.\|_p$ konvergiert. ◇

Zusätzlich kann man die länglichen Abschätzungen durch Ausnutzen folgender Bemerkung umgehen:

Bemerkung:
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f_n \to f \text{ in } S(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n : \\
&\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha x^\beta (f_n(x) - f(x)) \right| \to 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n : \\
&\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta \partial^\alpha (f_n(x) - f(x)) \right| \to 0
\end{aligned}
$$

Diese Äquivalenz wird hier nicht bewiesen.
Es folgt unmittelbar, dass $f \mapsto \partial^\alpha x^\beta f$ stetig auf $S(\mathbb{R}^n)$ ist, was uns bei dem Teil zur Stetigkeit weiterhilft. ◇

Nun zum Beweis von 3.4:
Zunächst gilt, dass $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$:
Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so folgt für alle Multiindizes β, dass $x^\beta f \in S(\mathbb{R}^n)$ nach Konstruktion des Schwartz-Raumes. Außerdem gilt mit obiger Proposition, dass
$S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit Satz 3.3 d) folgt demnach $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Es gilt sogar $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wie oben gesehen.

Zuletzt bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist.
Dazu betrachten wir für beliebiges $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Folge $\{f_k\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \longrightarrow f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.
Nach obiger Bemerkung folgt, dass $x^\alpha \partial^\beta (f_k - f) \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und damit auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Proposition 1.4 aus der Arbeit von A.Katzur).
Es gilt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (A.1), dass auch

$$\Big(x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)\Big)^\wedge \overset{\text{s.o.}}{=} C\partial^\alpha \Big(\xi^\beta (\hat{f}_k - \hat{f})\Big) \longrightarrow 0 \ \text{ unabhängig von } \xi.$$

Da die Fourier-Transformation beschränkt und stetig ist nach Lemma 3.2 ist die Konvergenz gleichmäßig. Das bedeutet aber $\hat{f}_k - \hat{f} \longrightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und daher die Stetigkeit auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Wir erhalten insbesondere, dass die Fourier-Transformation eines Elementes des Schwartz-Raums wieder in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Dieses Resultat werden wir später noch verwenden.

Nun werden wir eine wichtige spezielle Fourier-Transformation berechnen, die wir im Beweis zu Satz 3.8 brauchen werden:

(3.5) Proposition
Ist $f(x) = e^{-\pi a |x|^2}$ mit $a > 0$, dann gilt $\hat{f}(\xi) = a^{-n/2} e^{-\pi |\xi|^2 / a}$. ◇

Beweis
Zunächst betrachten wir den Fall $n = 1$:
Da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt mit $f'(x) = -2x\pi a e^{-\pi a x^2}$ und Satz 3.3 Teil d) und e):

$$\begin{aligned} (\hat{f})'(\xi) &\overset{(3.3)d}{=} \big[-2\pi i x f\big]^\wedge(\xi) = \big[-2\pi i x e^{-\pi a x^2}\big]^\wedge(\xi) = \frac{i}{a}(f')^\wedge(\xi) \\ &\overset{(3.3)e}{=} \frac{i}{a}(2\pi i \xi)\hat{f}(\xi) = \frac{-2\pi}{a}\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} e^{\frac{\pi\xi^2}{a}} \hat{f}(\xi) &= \frac{2\pi\xi}{a} e^{\frac{\pi\xi^2}{a}} \hat{f}(\xi) + e^{\frac{\pi\xi^2}{a}} (\hat{f})'(\xi) \\ &= \frac{2\pi\xi}{a} e^{\frac{\pi\xi^2}{a}} \hat{f}(\xi) + e^{\frac{\pi\xi^2}{a}} \frac{-2\pi}{a}\xi \hat{f}(\xi) = 0, \end{aligned}$$

also ist $e^{\frac{\pi\xi^2}{a}}\,\hat{f}(\xi) = c$, mit $c \in \mathbb{R}$ konstant. Um diese Konstante zu bestimmen, setzen wir $\xi = 0$. Dann ist $\hat{f}(0) = c$ und mit Proposition A.6 gilt:

$$\begin{aligned} c &= \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^0\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2}\,dx \\ &\overset{(A.6)}{=} \left(\frac{\pi}{\pi a}\right)^{1/2} = a^{-1/2}. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung:

$$e^{\frac{\pi\xi^2}{a}}\,\hat{f}(\xi) = a^{-1/2} \quad\Leftrightarrow\quad \hat{f}(\xi) = a^{-1/2}e^{\frac{-\pi\xi^2}{a}}.$$

Der n-dimensionale Fall lässt sich auf obigen Fall zurückführen, indem man ausnutzt, dass $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a|x|^2}e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi a\sum_{j=1}^n x_j^2}e^{-2\pi i\sum_{j=1}^n \xi_j x_j}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^n e^{-\pi a x_j^2}e^{-2\pi i\xi_j x_j}\,dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x_j^2}e^{-2\pi i\xi_j x_j}\,dx_j \\ &= \prod_{j=1}^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x_j^2}e^{-2\pi i\xi_j x_j}\,dx_j}_{\hat{f}(\xi)\text{ in 1D}} \\ &\overset{\text{Fall } n=1}{=} \prod_{j=1}^n a^{-1/2}e^{\frac{-\pi\xi_j^2}{a}} \\ &= a^{-n/2}e^{\frac{-\pi|\xi|^2}{a}}. \end{aligned}$$

□

— *Die inverse Fourier-Transformation* —

Nun können wir die Fourier-Transformation invertieren:

(3.6) Definition (Inverse Fourier-Transformation)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die *inverse Fourier-Transformation* durch

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

$\diamond$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zeigen wir, dass $(\hat{f})^\vee = f$. Einfaches Anwenden des Satzes von Fubini schlägt fehl, denn der Integrand von

$$(\hat{f})^\vee = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i\xi\cdot y} e^{2\pi i\xi\cdot x}\, dy\, d\xi$$

ist nicht in $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, da

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, |e^{-2\pi i\xi\cdot y}|\, |e^{2\pi i\xi\cdot x}|\, dy\, d\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy\, d\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_1\, d\xi.$$

Einen Ausweg bietet die Einführung einer Folge von Hilfsfunktion um die Anwendung des Satzes von Fubini zu ermöglichen. Die Betrachtung des Grenzwertes liefert uns dann das gewünschte Resultat.
Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

(3.7) Lemma
Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$. $\diamond$

Beweis
Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\int \hat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i\xi\cdot x} g(\xi)\, dx\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(x)\, d\xi\, dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x} g(x)\, dx\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{g}(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

$\square$

Ein analoges Resultat gilt für die inverse Fourier-Transformation, welches im folgenden Satz ebenfalls benötigt wird:
Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\int \check{f} g = \int f \check{g}$. Dies lässt sich erneut leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi &= \int \hat{f}(-\xi) g(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i \xi \cdot x} g(\xi)\, dx\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} g(x)\, d\xi\, dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot x} g(x)\, dx\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \hat{g}(-\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \check{g}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

Nun kommen wir zu einem Hauptresultat dieser Arbeit:

(3.8) Satz (Satz über die inverse Fourier-Transformation)
Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann stimmt f fast überall mit einer stetigen Funktion f_0 überein und es gilt $(\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f_0$. ⋄

Beweis
Für gegebenes $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir:

$$\phi(\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot x - \pi t^2 |\xi|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt mit Proposition 3.5:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2} e^{-2\pi i y\cdot\xi}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot(y-x)-\pi t^2|\xi|^2}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\sum_{j=1}^n \xi_j(y_j-x_j)-\pi t^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2}\, d\xi \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi_j(y_j-x_j)} e^{-\pi t^2\xi_j^2}\, d\xi_j \\
&\overset{\text{s. Beweis(3.5)}}{=} \prod_{j=1}^n (t^2)^{-1/2} e^{-\pi(y_j-x_j)^2/t^2} \\
&= t^{-n} e^{-\pi|y-x|^2/t^2} \\
&= g_t(x-y),
\end{aligned}$$

mit $g(x) := e^{-\pi|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und der Notation aus A.23: $g_t(x) = t^{-n}g(t^{-1}x)$.
Da $\hat{f}$ nach Voraussetzung in $L^1(\mathbb{R}^n)$, gilt mit Lemma 3.7:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \phi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, \hat{\phi}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, g_t(x-\xi)\, d\xi = f * g_t(x).$$

Es gilt mit Proposition A.6, dass

$$\int g(x)\, dx = \int e^{-\pi|x|^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{\pi}\right)^{n/2} = 1.$$

Da weiterhin $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ist $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\partial^\alpha g(x)|$ beschränkt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $N \in N_0$. Also insbesondere für $|\alpha| = 0$ und ein $C > 0$:

$$(1+|x|)^N|g(x)| \leq C \quad \Leftrightarrow \quad |g(x)| \leq C(1+|x|)^{-N}$$

Da dies für alle $N \in N_0$ gilt, wähle N so, dass $N \geq n+\epsilon$, damit ist

$$|g(x)| \leq C(1+|x|)^{-N} \leq C(1+|x|)^{-(n+\epsilon)}$$

Daher sind die Voraussetzungen von Satz A.25 erfüllt und es folgt

$$f * g_t(x) \longrightarrow f \quad \text{für} \quad t \to 0$$

für fast alle x.
Andererseits kann man, da

$$\lim_{t\to 0} \phi(\xi)\hat{f}(\xi) = \lim_{t\to 0} e^{2\pi i\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi) = e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)$$

und außerdem

$$|\phi(\xi)\hat{f}(\xi)| = |e^{2\pi i\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)| = |\underbrace{e^{-\pi t^2|\xi|^2}}_{\leq 1}\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|,$$

wobei $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nach Voraussetzung, den Satz von der majorisierten Konvergenz (A.1) anwenden. Daher gilt

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,d\xi = (\hat{f})\check{}(x).$$

Insgesamt erhalten wir $f = (\hat{f})\check{}$ fast überall.
Analog gehen wir vor, um $f = (\check{f})\hat{}$ zu zeigen: Dazu definieren wir

$$\phi(\xi) = e^{-2\pi i\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2}.$$

Dann gilt analog zu obigem Beweis:

$$\begin{aligned}\check{\phi}(y) = \hat{\phi}(-y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x-\pi t^2|\xi|^2}e^{2\pi i y\cdot\xi}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot(x-y)-\pi t^2|\xi|^2}\,d\xi \\ &= t^{-n}e^{-\pi|x-y|^2/t^2} \\ &= g_t(x-y),\end{aligned}$$

Wie bereits oben gesehen, lässt sich Lemma 3.7 auf $\check{f}$ übertragen, so dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{f}(\xi)\ \phi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\ \check{\phi}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\ g_t(x-\xi)\,d\xi = f * g_t(x).$$

Auf gleiche Weise wie oben folgt nun

$$f * g_t(x) \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} f \quad \text{für} \quad t \to 0.$$

sowie

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi)\check{f}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\check{f}(\xi)\,d\xi = (\check{f})\hat{}(x).$$

Insgesamt erhalten wir also das analoge Resultat $f = (\check{f})\hat{}$ fast überall.
Da $(\hat{f})\check{}$ und $(\check{f})\hat{}$ Fourier-Transformationen von L^1-Funktionen sind, sind sie stetig. Damit folgt die Behauptung. □

Wir haben mit obigem Satz also eine Möglichkeit gefunden, eine L^1-Funktion f aus ihrer Fourier-Transformierten fast überall zu rekonstruieren, falls $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Es folgen unmittelbar die folgenden beiden Resultate:

(3.9) Korollar
Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} = 0$, dann ist $f = 0$ fast überall. ◇

Beweis
Da $\hat{f} = 0$ ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $(\hat{f})^\vee = 0$. Mit obigem Satz (3.8) folgt, dass $f = (\hat{f})^\vee$ fast überall und damit die Behauptung. □

(3.10) Korollar
Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein topologischer Isomorphismus. ◇

Beweis
Zunächst ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Beweis von Korollar 3.4) und laut Korollar 3.4 bildet $\mathcal{F}$ den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich selbst ab. Da $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$, gilt dasselbe auch für die Abbildung $f \mapsto \check{f}$ und mit dem Satz über die inverse Fourier-Transformation (3.8) sind die Abbildungen invers zueinander. Damit folgt die Behauptung.

— *Die Erweiterung der Fourier-Transformation auf* $L^2(\mathbb{R}^n)$ —

Die Frage ist nun, ob man die Fourier-Transformation auch auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ erweitern kann. Eine Antwort liefert folgendes Resultat, welches ein Analogon zu Satz 2.1 auf $\mathbb{R}^n$ ist:

(3.11) Satz (Satz von Plancherel)
Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}\big|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)}$ lässt sich eindeutig als unitärer Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. ◇

Beweis
Sei $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.
Da $\hat{f}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ist auch $\hat{f}(-x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aber $\hat{f}(-x) = f\check{\ }(x)$ und somit ist mit dem Satz über die inverse Fourier-Transformation $\hat{\hat{f}}(-x) = (f\check{\ })\check{\ }(x) = f$ fast überall.

Daher ist $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $(f^\vee)^\wedge$ als Fourier-Transformation einer L^1-Funktion beschränkt ist. Es folgt mit Proposition A.16, dass $\mathcal{X} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ denn es gilt
$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.
Des Weiteren liegt $\mathcal{X}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$: Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}$ den Schwartz-Raum in sich selbst abbildet (vgl. Korollar 3.4), gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{X}$ Außerdem liegt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition A.26 dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Betrachten wir nun $f, g \in \mathcal{X}$ und sei $h = \overline{\hat{g}}$: Dann gilt mit dem Satz über die inverse Fourier-Transformation (3.8):

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{g}(x)} e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{g}(x) e^{2\pi i \xi \cdot x}}\, dx \\
&= \overline{(\hat{g})^\vee(\xi)} \\
&\overset{(3.8)}{=} \overline{g(\xi)} \quad \text{fast überall.}
\end{aligned}$$

Daher folgt mit Lemma 3.7:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{h}(\xi)\, d\xi \overset{(3.7)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) h(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)\, d\xi$$

und somit

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

$\mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ erhält demnach das Skalarprodukt von $L^2(\mathbb{R}^n)$, ist also eine unitäre Abbildung (vgl. Definition A.15). Insbesondere erhalten wir für $f = g$, dass $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Außerdem gilt mit dem Satz über die inverse Fourier-Transformation (3.8), dass $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Da $\mathcal{X}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$, ist auch $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Wählen wir nun für beliebiges $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge $\{f_k\} \in \mathcal{X}$, die gegen f konvergiert, dann ist wegen der Isometrieeigenschaft von $\mathcal{F}$ auch $\{\hat{f}_k\}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{X}$. Da $\mathcal{X}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, konvergiert diese gegen ein Element aus $L^2(\mathbb{R}^n)$. Demnach ist $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Es gilt sogar $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$, da eine Isometrie Banachräume auf abgeschlossene Mengen abbildet.
Also lässt sich $\mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ zu einem unitären Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.
Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Fortsetzung mit $\mathcal{F}$ auf ganz $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmt. Aber für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, wie im Beweis von Satz 3.8, folgt mit der Youngschen Ungleichung (A.22), dass $f * g_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dabei

ist $g_t = t^{-n} g(t^{-1}x)$ wie in Notation A.23.
Da weiterhin mit der speziellen Fourier-Transformation aus Proposition 3.5:

$$\begin{aligned}(f * g_t)\hat{}(\xi) &\overset{(3.3)c}{=} \hat{f}(\xi)(\hat{g_t})(\xi) = \hat{f}(\xi)t^{-n}\Big(e^{-\pi|x|^2/t^2}\Big)\hat{}(\xi) \\ &\overset{3.5}{=} \hat{f}(\xi)t^{-n}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/(1/t^2)} = \hat{f}(\xi)e^{-\pi t^2|\xi|^2}\end{aligned}$$

und $\hat{f}$ beschränkt ist, ist $(f * g_t)\hat{} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Demnach ist $f * g_t \in \mathcal{X}$.
Da $\int g(x)\,dx = 1$, folgt mit Satz A.24 a), dass $f * g_t \to f$ in der L^1-Norm und der L^2-Norm für $t \to 0$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\Big|(f * g_t)\hat{}(\xi) - \hat{f}(\xi)\Big| &= \lim_{t\to 0}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(f * g_t)(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx\Big| \\ &= \lim_{t\to 0}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi\cdot x}\big((f * g_t)(x) - f(x)\big)\,dx\Big| \\ &\le \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\big|e^{-2\pi i\xi\cdot x}\big|\,\big|(f * g_t)(x) - f(x)\big|\,dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|(f * g_t)(x) - f(x)|\,dx \\ &= \lim_{t\to 0}\|f * g_t - f\|_1 = 0 \text{ unabhängig von } \xi,\end{aligned}$$

also gilt sogar gleichmäßige Konvergenz von $(f * g_t)\hat{}$ gegen $\hat{f}$. Außerdem gilt auch $(f * g_t)\hat{} \to \hat{f}$ in der L^2-Norm: Wie bereits oben gesehen, gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ und mit der Linearität der Fourier-Transformation folgt schließlich:

$$0 = \lim_{t\to 0}\Big\|f * g_t - f\Big\|_2 = \lim_{t\to 0}\Big\|\Big(f * g_t - f\Big)\hat{}\Big\|_2 = \lim_{t\to 0}\Big\|(f * g_t)\hat{} - \hat{f}\Big\|_2.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Wir haben nun also den Definitionsbereich der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ ausgeweitet. Wie im Fall $\mathbb{T}^n$ erhalten wir einen normerhaltenden Operator, wenn wir $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ einschränken.

Ebenso wie auf $\mathbb{T}^n$ liefert uns der Interpolationssatz von Riesz-Thorin (A.17) das folgende Resultat für die dazwischenliegenden L^p-Räume:

(3.12) Satz (Hausdorff-Young Ungleichung auf $\mathbb{R}^n$)
Es sei $1 \leq p \leq 2$ und q der konjugierte Exponent zu p, es gelte also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$. ◇

Beweis
Der Beweis verläuft komplett analog zu dem von Satz (2.4). □

Diesmal erhalten wir, dass sich die Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht nur auf $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ erweitern lässt, sondern auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p \leq 2$, wobei der Zielraum $L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $q = \frac{p}{p-1}$ ist.

Der Vollständigkeit halber definieren wir nun die Fourier-Integraldarstellung:

(3.13) Definition (Fourier-Integraldarstellung)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die *Fourier-Integraldarstellung* durch

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \, d\xi.$$

Diese stellt f als Superposition von Funktionen der Form $e^{2\pi i \xi \cdot x}$ dar. ◇

Mit obiger Definition haben wir nun das zu Beginn gesteckte Ziel zumindest für L^1-Funktionen erreicht, deren Fourier-Transformation auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist: Wir können diese als Integral von Grundbausteinen der Form $e^{2\pi i \xi \cdot x}$ darstellen.
Die Fourier-Integraldarstellung kann man auch für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren, jedoch ist die punktweise Konvergenz nicht notwendiger Weise gegeben.

— *Die Poissonsche Summenformel* —

Zum Abschluss wollen wir noch einmal auf den Raum $\mathbb{T}^n$ zurückkommen und uns folgende Fragestellung ansehen:
Kann man aus einer gegebenen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine periodische Funktion konstruieren?
Intuitiv erhält man zwei mögliche Ansätze: Einerseits kann man $\mathbb{R}^n$ in n-dimensionale Würfel der Kantenlänge 1 zerlegen und f über all diese Würfel summieren, also $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x-k)$. Falls diese Reihe konvergiert, ist sie mit Sicherheit eine periodische Funktion. Andererseits kann man $\hat{f}$ auf $\mathbb{Z}^n$ einschränken und die Fourier-Reihe

$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{f} e^{2\pi i\kappa\cdot x}$ betrachten. Beide Ansätze werden in folgendem Satz analysiert:

(3.14) Satz
Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k f$ punktweise f.ü. und in $L^1(\mathbb{T}^n)$ gegen eine Funktion Pf mit $\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1$. Weiterhin ist die Fourier-Transformation auf $\mathbb{T}^n$ gleich der Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$ für alle $\kappa \in \mathbb{Z}^n$: $(Pf)\hat{}(\kappa) = \hat{f}(\kappa)$ ⋄

Beweis
Sei $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$. Dann ist $\mathbb{R}^n$ disjunkte Vereinigung der Würfel

$$Q + k := \{x + k : x \in Q\}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_Q \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\tau_k f(x)|\,dx &= \int_Q \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\tau_k f(x)|\,dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_Q |f(x-k)|\,dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{Q+k} |f(x)|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \\
&= \|f\|_1 < \infty, \quad \text{da } f \in L^1
\end{aligned}$$

Daher lässt sich Satz A.2 anwenden. Zunächst folgt dann, dass die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k f$ punktweise fast überall auf Q konvergiert und in $L^1(\mathbb{T}^n)$ gegen eine Funktion $Pf \in L^1(\mathbb{T}^n)$, da jede Äquivalenzklasse in $\mathbb{T}^n$ genau einen Repräsentanten in Q hat und sie somit maßtheoretisch äquivalent sind. Außerdem gilt $\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1$, denn

$$\|Pf\|_1 = \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k f \Big\|_1 = \int_Q \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k f(x) \Big|\,dx \leq \int_Q \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\tau_k f(x)|\,dx \overset{\text{(s.o)}}{=} \|f\|_1.$$

Des Weiteren folgt aus dem Satz, dass

$$\begin{aligned}
(Pf)\hat{}(\kappa) &= \int_Q \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x-k) e^{-2\pi i\kappa\cdot x}\,dx &&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_Q f(x-k) e^{-2\pi i\kappa\cdot x}\,dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{Q+k} f(x) e^{-2\pi i\kappa\cdot(x+k)}\,dx &&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{Q+k} f(x) e^{-2\pi i\kappa\cdot x}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i\kappa\cdot x}\,dx &&= \hat{f}(\kappa).
\end{aligned}$$

□

Wir erhalten also, dass beide oben dargestellten Ansätze funktionieren und zur gleichen Antwort führen.

Wenn wir Bedingungen an f stellen, um zu garantieren, dass obige Reihe absolut punktweise konvergiert, können wir eine verfeinerte Aussage treffen:

(3.15) Satz (Poissonsche Summenformel)
Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und es gelte $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-n-\epsilon}$ und $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-n-\epsilon}$ für $C, \epsilon > 0$. Dann gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \hat{f} e^{2\pi i \kappa \cdot x},$$

wobei beide Reihen absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergieren. Insbesondere gilt für $x = 0$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}.$$

◇

Beweis
Es sei x ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$. Dann gilt für $|k| \neq 0$:

$$\begin{aligned}(1+|x+k|) &\geq \Big(1 + \big||k|-|x|\big|\Big) = \left(1 + |k| \left|1 - \frac{|x|}{|k|}\right|\right) \\ &\geq \begin{cases} 1+|k| & ,\text{falls } \frac{|x|}{|k|} \in [0,2] \\ 1 & ,\text{falls } \frac{|x|}{|k|} > 2 \end{cases},\end{aligned}$$

denn

$$\left|1 - \frac{|x|}{|k|}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{|k|} \in [0,2] \quad \text{und} \quad \left|1 - \frac{|x|}{|k|}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{|k|} > 2.$$

Nach Wahl von x gilt außerdem, dass $|x| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$ und damit folgt

$$(1+|x+k|) \geq \begin{cases} 1+|k| & ,\text{falls } \frac{\sqrt{n}}{4} \leq |k| \\ 1 & ,\text{falls } \frac{\sqrt{n}}{4} > |k| \end{cases}.$$

Daher erhalten wir:

$$|f(x+k)| \overset{\text{nach Vor.}}{\leq} C(1+|x+k|)^{-n-\epsilon} \leq \begin{cases} C(1+|k|)^{-n-\epsilon} & ,\text{falls } \frac{\sqrt{n}}{4} \leq |k| \\ C & ,\text{falls } \frac{\sqrt{n}}{4} > |k| \end{cases}$$

und

$$C \underbrace{\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| < \frac{\sqrt{n}}{4}}} 1}_{\text{endlich } =: C_1} + C \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ |k| \geq \frac{\sqrt{n}}{4}}} (1+|k|)^{-n-\epsilon} \leq C\, C_1 + C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-n-\epsilon}$$

konvergiert nach dem Integralkriterium, wenn $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-\epsilon}\,dx$ konvergiert. Dies ist erfüllt, da mit Korollar A.5 b) und analog zum Beweis von Korollar 3.4 gilt, dass $(1+|x|)^{-n-\epsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-\epsilon}\,dx < \infty$.
Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß folgt nun die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k)$ gegen Pf aus Satz 3.14.
Da außerdem

$$|\hat{f}(\kappa)e^{2\pi i\kappa\cdot x}| = |\hat{f}(\kappa)| \overset{\text{nach Vor.}}{\leq} C(1+|\kappa|)^{-n-\epsilon},$$

folgt analog wie oben, dass $\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\kappa)e^{2\pi i\kappa\cdot x}$ gleichmäßig und absolut konvergiert. Wegen $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ist aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz auch $Pf \in C(\mathbb{T}^n)$ und daher in $L^2(\mathbb{T}^n)$, da $\mathbb{T}^n$ endliches Lebesguemaß hat. Demnach erhalten wir mit Satz 3.14 und Satz 2.1, dass

$$\Big\| \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\kappa)e^{2\pi i\kappa\cdot x} - Pf \Big\|_2 = 0.$$

Da die Reihe zudem gleichmäßig konvergiert, ist sie punktweise gleich Pf. □

§ A Verwendete Resultate

Hier sind alle Ergebnisse aus dem Buch *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications* von Gerald B. Folland aufgeführt, die für die in dieser Arbeit behandelten Sätze benötigt werden, dabei entsprechen die Zahlen in Klammern der Nummerierung des Buches. Die Seitenzahlen beziehen sich auf die 2. Auflage von 1999. Es wurden an manchen Stellen Ergänzungen vorgenommen, damit alle Bezeichnungen bekannt sind.

(A.1) Satz (2.24, Satz von der majorisierten Konvergenz, Seite 54)
Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum und $\{f_n\}$ eine Folge in $L^1(\mu)$, so dass (a) $f_n \to f$ f.ü. und (b) dass ein nichtnegatives $g \in L^1(\mu)$ existiert mit $|f_n| \leq g$ f.ü. für alle n. Dann ist $f \in L^1(\mu)$ und $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$. ◇

(A.2) Satz (2.25, Seite 55)
Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum und $\{f_j\}$ eine Folge in $L^1(\mu)$, so dass $\sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$. Dann konvergiert $\sum_1^\infty f_j$ f.ü. gegen eine Funktion in $L^1(\mu)$ und $\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$. ◇

(A.3) Satz (2.27, Seite 56)
Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum und $f : X\times[a,b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ sowie $f(\cdot,t) : X \to \mathbb{C}$ integrierbar für alle $t \in [a,b]$. Sei außerdem $F(t) = \int_X f(x,t)\,d\mu(x)$.

a) Angenommen, es existiert ein $g \in L^1(\mu)$, so dass $|f(x,t)| \leq g(x)$ für alle x, t. Ist $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ für alle x, dann gilt $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$; insbesondere: ist $f(x,\cdot)$ stetig für alle x, dann ist F stetig.

b) Angenommen, $\partial f / \partial t$ existiert und es gibt ein $g \in L^1(\mu)$, so dass $|(\partial f/\partial t)(x,t)| \leq g(x)$ für alle x, t.
Dann ist F differenzierbar und $F'(x) = \int (\partial f/\partial t)(x,t)\, d\mu(x)$. ◇

(A.4) Satz (2.44a, Seite 73)
Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

a) Ist f eine Lebesgue messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, dann ist dies auch $f \circ T$. Ist $f \geq 0$ oder $f \in L^1(m)$, wobei m das Lebesguemaß ist, dann gilt

$$\int f(x)\, dx = |\det T| \int f \circ T(x)\, dx$$

◇

(A.5) Korollar (2.52b, Seite 79)
Es seien c und C positive Konstanten und sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < c\}$. Außerdem sei f eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$.

b) Ist $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ auf B^c für ein $a > n$. Dann ist $f \in L^1(B^c)$. [...] ◇

(A.6) Proposition (2.53, Seite 79)
Für $a > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a|x|^2)\, dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

◇

(A.7) Definition (Lebeguemenge L_f, Seite 97)
Die *Lebesguemenge* L_f von f ist definiert als

$$L_f \;:=\; \left\{x : \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(r,x))} \int_{B(r,x)} |f(y) - f(x)|\, dy \;=\; 0\right\},$$

wobei $B(r,x)$ die offene Kugel um x mit Radius r ist. ◇

(A.8) Definition (gutartig reduzieren, Seite 98)
Eine Familie $\{E_r\}_{r>0}$ von Borel-Teilmengen auf $\mathbb{R}^n$ *reduziert gutartig* („shrinks nicely“) zu $x \in \mathbb{R}^n$, wenn

- $E_r \subset B(r,x)$ für alle r, wobei $B(r,x)$ die offene Kugel um x mit Radius r ist, und
- es eine Konstante $\alpha > 0$, unabhängig von r, gibt, so dass $m(E_r) > \alpha m(B(r,x))$. Dabei ist m das Lebesguemaß. ◇

(A.9) Satz (3.21 Lebesguescher Differentiationssatz, Seite 98)
Sei $f \in L^1_{loc}$. Für jedes x in der Lebesgue-Menge von f, insbesondere für fast alle x, gilt

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \text{ und } \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(y)\, dy = f(x)$$

für jede Familie $\{E_r\}_{r>0}$, die gutartig zu x reduziert („shrinks nicely"). ◇

(A.10) Proposition (4.35, Seite 132)
Ist X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, dann ist $C_0(X)$ der Abschluss von $C_c(X)$ in der gleichmäßigen Metrik. ◇

(A.11) Definition (Algebra, Seite 139)
Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{A}$ Teilmenge von $C(X,\mathbb{R})$ (bzw. $C(X)$). Die Menge $\mathcal{A}$ heißt *Algebra*, wenn sie ein reeller (bzw. komplexer) Untervektorraum von $C(X,\mathbb{R})$ (bzw. $C(X)$) ist, so dass $fg \in \mathcal{A}$ für alle $f, g \in \mathcal{A}$. ◇

(A.12) Definition (Separation von Punkten, Seite 139)
Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $C(X,\mathbb{R})$ oder $C(X)$ *separiert* oder *trennt Punkte*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $f(x) \neq f(y)$. ◇

(A.13) Satz (4.51 Satz von Stone-Weierstraß im Komplexen, Seite 141)
Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Ist $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene komplexe Subalgebra von $C(X)$, die Punkte trennt und abgeschlossen unter komplexer Konjugation ist, dann gilt entweder $\mathcal{A} = C(X)$ oder $\mathcal{A} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$ für ein $x_0 \in X$. ◇

(A.14) Satz (5.27, Seite 175)
Ist $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine orthonormale Menge in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann sind äquivalent:

a) (**Vollständigkeit**) Ist $\langle x, u_\alpha\rangle = 0$ für alle α, dann ist $x = 0$.

b) (**Parseval-Gleichung**) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

c) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha$, wobei die Summe auf der rechten Seite nur abzählbar viele von Null verschiedene Einträge hat und in der Norm-Topologie konvergiert, unabhängig von der Reihenfolge der Terme. ⋄

(A.15) Definition (unitäre Abbildung, Seite 176)
Es seinen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume mit zugehörigen Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Eine *unitäre Abbildung* von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ ist eine invertierbare lineare Abbildung $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, die das Skalarprodukt erhält. Es gilt also:

$$\langle Ux, Uy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \text{ für alle } x, y \in \mathcal{H}_1.$$ ⋄

(A.16) Proposition (6.10, Seite 185)
Ist $0 < p < q < r \leq \infty$, gilt $L^p \cap L^r \subset L^q$ [...]. ⋄

(A.17) Satz (6.27 Interpolationssatz von Riesz-Thorin, Seite 200)
Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ Maßräume und $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$. Falls $q_0 = q_1 = \infty$, sei außerdem ν semiendlich. Für $0 < t < 1$, seien p_t und q_t definiert durch

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Ist T eine lineare Abbildung von $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ nach $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$, so dass $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$ für $f \in L^{p_0}(\mu)$ und $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$ für $f \in L^{p_1}(\mu)$, dann gilt $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ für $f \in L^{p_t}(\mu)$, $0 < t < 1$. ⋄

(A.18) Proposition (7.9, Seite 217)
Ist μ ein Radon-Maß auf X, dann ist $C_c(X)$ dicht in $L^p(\mu)$ für $1 \leq p < \infty$. ⋄

(A.19) Proposition (8.3, Seite 237)
Für $f \in C^\infty$ sind äquivalent:

a) $f \in \mathcal{S}$

b) $x^\beta \partial^\alpha f$ ist beschränkt für alle Multiindizes α, β

c) $\partial^\alpha (x^\beta f)$ ist beschränkt für alle Multiindizes α, β.

Dabei bezeichnet $\mathcal{S}$ den Schwartz-Raum:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;=\; \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \text{ für alle } N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha \text{ Multiindex} \Big\},$$

mit

$$\|f\|_{(N,\alpha)} \;=\; \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \left|\partial^\alpha f(x)\right|.$$

Aus dem Beweis gilt:

$$(1+|x|)^N \;\le\; 2^N(1+|x|^N) \;\le\; 2^N\Big[1 + \delta^{-1}\sum_1^n |x_j^N|\Big] \;\le\; 2^N\delta^{-1}\sum_{|\beta|\le N} |x^\beta|,$$

wobei $\delta > 0$ eine Konstante und $N \in \mathbb{N}$ ist. ◇

(A.20) Notation (Seite 238)
Ist f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$, so schreiben wir

$$\tau_y f(x) = f(x-y).$$

◇

(A.21) Definition (Faltung, Seite 239)
Seien f und g messbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Die *Faltung* von f und g ist die Funktion $f * g$ definiert durch

$$f * g(x) \;=\; \int f(x-y)g(y)\,dy$$

für alle x, so dass das Integral existiert. ◇

(A.22) Satz (8.7 Youngsche Ungleichung, Seite 240)
Ist $f \in L^1$ und $g \in L^p$ $(1 \le p \le \infty)$, dann existiert $f * g(x)$ für fast alle x und es gilt $f * g \in L^p$ und $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$. ◇

(A.23) Notation (8.13, Seite 242)
Für eine Funktion ϕ auf $\mathbb{R}^n$ und $t > 0$ schreiben wir

$$\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x).$$

◇

(A.24) Satz (8.14a, Seite 242)
Sei $\phi \in L^1$ und $\int \phi(x)\,dx = a$.

a) Ist $f \in L^p$ $(1 \le p < \infty)$, dann gilt $f * \phi_t \to af$ in der L^p-Norm für $t \to 0$. ◇

(A.25) Satz (8.15, Seite 243)
Angenommen $|\phi(x)| \leq C(1+|x|)^{-(n+\epsilon)}$ für $C, \epsilon > 0$ und $\int \phi(x)dx = a$. Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt

$$f * \phi_t(x) \longrightarrow af(x), \quad t \to 0$$

für alle x in der Lebesgue Menge L_f von f (A.7). Insbesondere also für fast alle x und jedes x in dem f stetig ist. ◇

(A.26) Proposition (8.17, Seite 245)
C_c^∞ (und daher $\mathcal{S}$) ist dicht in L^p $(1 \leq p < \infty)$ und in C_0. ◇

Zusätzlich verwenden wir folgende Definition aus dem Vorlesungsskript *Funktionalanalysis* von R.L. Stens (SS2009)

(A.27) Definition (II(1.10), abzählbare Basis, Seite 28)
Man sagt, dass ein normierter linearer Raum $(X, \|\cdot\|)$ eine *abzählbare Basis* $f_1, f_2, \ldots$ besitzt, falls jedes $f \in X$ darstellbar ist als

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$$

für gewisse $\alpha_k \in \mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine abzählbare Basis heißt *SCHAUDER-Basis*, falls diese Darstellung eindeutig ist, d.h. falls für jedes f die Koeffizienten α_k eindeutig bestimmt sind. ◇