

# DIE FENSTER-FOURIERTRANSFORMATION

FELIX VOIGTLÄNDER

ZUSAMMENFASSUNG. Die Fouriertransformation  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gibt ein Frequenzspektrum der Funktion  $f$  an, wenn man  $f = f(t)$  als Funktion der Zeit und  $\widehat{f} = \widehat{f}(\omega)$  als Funktion der Frequenz betrachtet. Bei der Fouriertransformation erhält man allerdings ein Frequenzspektrum der gesamten Funktion *unabhängig von der Zeit*.

Bei der in dieser Ausarbeitung betrachteten Fenster-Fouriertransformation möchte man dagegen eine Darstellung erhalten, die Informationen über das *zeitliche Auftreten* von bestimmten Frequenzen liefert, das gelieferte Frequenzspektrum soll also abhängig von der Zeit sein. Dazu *lokalisiert* man für eine gegebene Zeit  $t_0 \in \mathbb{R}$  die gegebene Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mittels eines *Abschneidefensters*  $g \in L^2(\mathbb{R})$  zu  $t \mapsto f(t) \cdot \overline{g(t - t_0)}$ . Der Wert der Fouriertransformation dieser lokalisierten Funktion an der Stelle  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  liefert dann den Wert  $(V_g f)(t_0, \omega_0)$  der Fenster-Fouriertransformation von  $f$  bezüglich des Fensters  $g$  an der Stelle  $(t_0, \omega_0)$ .

Im Folgenden werden die Eigenschaften der Fenster-Fouriertransformation näher untersucht. Dabei wird gezeigt, dass für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  die Fenster-Fouriertransformation  $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^{2d}) \cap C_0(\mathbb{R}^{2d})$  quadratintegrierbar, gleichmäßig stetig und beschränkt ist und es wird eine Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation hergeleitet. Schließlich werden wir näher auf die geeignete Wahl des Fensters  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  eingehen.

## 1. Definition der Fenster-Fouriertransformation und elementare Eigenschaften

**Definition 1.** Sei  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  beliebig. Dann ist für  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  die *Fenster-Fouriertransformation* von  $f$  bezüglich der *Fenster-Funktion*  $g$  definiert durch:

$$V_g f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, (x, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t - x)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt.$$

Die schon in der Einleitung erwähnte Idee der Fenster-Fouriertransformation ist in Abbildung 1.1 zu sehen. Das Fenster  $g$  wird zu  $g(\cdot - x)$  auf  $x$  zentriert und mit  $f$  multipliziert, um nur einen kleinen, um  $x$  zentrierten Bereich von  $f$  mittels der Fouriertransformation zu analysieren. Natürlich ist diese Anschauung nur sinnvoll, falls  $g$  einen um 0 zentrierten, relativ kleinen Träger besitzt. Da das Fenster in Abhängigkeit von  $x$  verschoben wird, spricht man auch von einem „sliding window“.

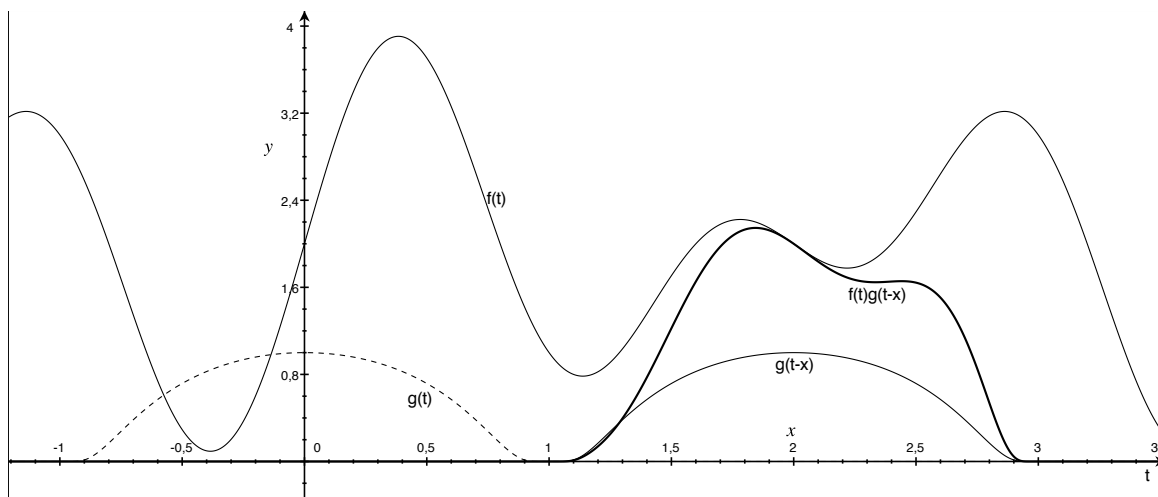


ABBILDUNG 1.1. Idee des „sliding window“.

Da die Fenster-Fouriertransformation, betrachtet als Abbildung  $(f, g) \mapsto V_g f$  sesquilinear ist, zeigen wir zur Vereinfachung einiger Beweise zunächst das folgende einfache Lemma, das in völliger Analogie zur Äquivalenz von Beschränktheit und Stetigkeit von linearen Abbildungen zu sehen ist:

**Lemma 2.** Seien  $V, W, E$  normierte Vektorräume und  $T : V \times W \rightarrow E$  eine sesquilineare Abbildung, die beschränkt ist, das heißt, es existiert ein  $C \geq 0$ , so dass für alle  $(v, w) \in V \times W$  gilt:

$$\|T(v, w)\|_E \leq C \cdot \|v\|_V \cdot \|w\|_W.$$

Dann ist  $T$  stetig.

*Beweis.* Seien  $(v_0, w_0) \in V \times W$  beliebig und  $((v_n, w_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (V \times W)^{\mathbb{N}}$  eine Folge mit  $(v_n, w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (v_0, w_0)$ . Dann erhält man auf Grund der Sesquilinearität von  $T$ :

$$\begin{aligned} \|T(v_0, w_0) - T(v_n, w_n)\|_E &= \|T(v_0, w_0) - T(v_0, w_n) + T(v_0, w_n) - T(v_n, w_n)\|_E \\ &= \|T(v_0, w_0 - w_n) + T(v_0 - v_n, w_n)\|_E \\ &\leq \|T(v_0, w_0 - w_n)\|_E + \|T(v_0 - v_n, w_n)\|_E \\ &\leq C \cdot \|v_0\|_V \cdot \|w_0 - w_n\|_W + C \cdot \|v_0 - v_n\|_V \cdot \|w_n\|_W \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \cdot \|v_0\|_V \cdot 0 + C \cdot 0 \cdot \|w\|_W = 0. \end{aligned}$$

Also folgt  $T(v_n, w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(v_0, w_0)$ , und damit die Stetigkeit von  $T$ .  $\square$

Das folgende Lemma beschreibt die ersten elementaren Eigenschaften der Fenster-Fouriertransformation. Zuerst erinnern wir aber an einige Definitionen.

**Definition.** Für  $x, \omega \in \mathbb{R}^d$  und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die *Translation*, die *Modulation*, beziehungsweise die *Involution* von  $f$  durch:

$$\begin{aligned} T_x f &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z - x), \\ M_\omega f &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{2\pi i \langle z, \omega \rangle} \cdot f(z), \\ g^* &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{g(-z)}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_x &: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto T_x f, \\ M_\omega &: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto M_\omega f, \\ * &: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto f^* \end{aligned}$$

sind wohldefinierte, isometrische Abbildungen, wobei  $T_x$  und  $M_\omega$  linear sind und  $*$  antilinear ist. Es gelten die Relationen

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \mathcal{F} \circ M_\omega &= T_\omega \circ \mathcal{F}, \\ (1.2) \quad \mathcal{F} \circ T_x &= M_{-x} \circ \mathcal{F}, \\ (1.3) \quad T_x \circ M_\omega &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot M_\omega \circ T_x \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\|T_x f - T_z f\|_2 \xrightarrow{z \rightarrow x} 0.$$

Nun kommen wir zu den angekündigten Eigenschaften der Fenster-Fouriertransformation:

**Lemma 3.** Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $V_g f \in C_0(\mathbb{R}^{2d})$ . Insbesondere folgt, dass  $V_g f$  gleichmäßig stetig ist. Weiter ist die Abbildung

$$V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^{2d}) \subset L^\infty(\mathbb{R}^{2d}), (f, g) \mapsto V_g f$$

eine beschränkte, sesquilineare Abbildung mit  $\|V_g f\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ , nach Lemma 2 also insbesondere stetig. Schließlich gelten die Darstellungen:

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad (V_g f)(x, \omega) &= \widehat{f \cdot T_x \bar{g}}(\omega) \\
(1.5) &= \langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle \\
(1.6) &= \left\langle \widehat{f}, (T_\omega \circ M_{-x})(\widehat{g}) \right\rangle \\
(1.7) &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \widehat{f \cdot T_\omega \bar{g}}(-x) \\
(1.8) &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_{\widehat{g}} \widehat{f})(\omega, -x) \\
(1.9) &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (f \star M_\omega g^*)(x) \\
(1.10) &= \left( \widehat{f} \star M_{-x} \widehat{g}^* \right)(\omega) \\
(1.11) &= e^{-\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \cdot \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt.
\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Identitäten. Für  $x \in \mathbb{R}^d$  ist  $T_x \bar{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , also  $f \cdot T_x \bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und damit für  $\omega \in \mathbb{R}^d$ :

$$\widehat{f \cdot T_x \bar{g}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot (T_x \bar{g})(z) \cdot e^{-2\pi i \langle z, \omega \rangle} dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{g(z-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle z, \omega \rangle} dz = V_g f(x, \omega).$$

Dies beweist Gleichung (1.4). Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{(M_\omega(T_x(g)))(z)} dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{e^{2\pi i \langle z, \omega \rangle} \cdot (T_x g)(z)} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{g(z-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle z, \omega \rangle} dz = V_g f(x, \omega),
\end{aligned}$$

was die Identität (1.5) zeigt.

Da  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  sind, ist der Satz von Plancherel anwendbar, so dass zusammen mit den Identitäten (1.1) und (1.2) folgt:

$$\begin{aligned}
(V_g f)(x, \omega) &\stackrel{(1.5)}{=} \langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \left\langle \widehat{f}, (\mathcal{F} \circ M_\omega \circ T_x)(g) \right\rangle \stackrel{(1.1)}{=} \left\langle \widehat{f}, (T_\omega \circ \mathcal{F} \circ T_x)(g) \right\rangle \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \left\langle \widehat{f}, (T_\omega \circ M_{-x} \circ \mathcal{F})(g) \right\rangle = \left\langle \widehat{f}, (T_\omega \circ M_{-x})(\widehat{g}) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (1.6) gezeigt.

Mit der kanonischen Vertauschungsrelation (1.3) und den bisher gezeigten Identitäten ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
(V_g f)(x, \omega) &\stackrel{(1.6)}{=} \left\langle \widehat{f}, (T_\omega \circ M_{-x})(\widehat{g}) \right\rangle \\
&\stackrel{(1.3)}{=} \left\langle \widehat{f}, e^{-2\pi i \langle \omega, -x \rangle} \cdot (M_{-x} \circ T_\omega)(\widehat{g}) \right\rangle \\
&= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \left\langle \widehat{f}, (M_{-x} \circ T_\omega)(\widehat{g}) \right\rangle \\
&\stackrel{(1.5)}{=} e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_{\widehat{g}} \widehat{f})(\omega, -x) \\
&\stackrel{(1.4)}{=} e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \widehat{f \cdot T_\omega \bar{g}}(-x).
\end{aligned}$$

Damit sind die Identitäten (1.8) und (1.7) gezeigt. Zum Beweis von (1.9) berechnen wir:

$$\begin{aligned}
e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (f \star M_\omega g^*)(x) &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot (M_\omega g^*)(x-z) dz \\
&= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot e^{2\pi i \langle x-z, \omega \rangle} \cdot \overline{g(-(x-z))} dz \\
&= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot e^{2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{g(z-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle z, \omega \rangle} dz \\
&= (V_g f)(x, \omega).
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichungen (1.8) und (1.9) ergibt sich nun die Identität (1.10) durch die Rechnung

$$(V_g f)(x, \omega) \stackrel{(1.8)}{=} e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_{\widehat{g}} \widehat{f})(\omega, -x) \stackrel{(1.9)}{=} e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot e^{-2\pi i \langle \omega, -x \rangle} \cdot (\widehat{f} \star (M_{-x}(\widehat{g}^*))) (\omega) = (\widehat{f} \star (M_{-x}(\widehat{g}^*))) (\omega).$$

Zum Beweis der letzten Gleichung, (1.11), benutzen wir wieder die Definition der Fenster-Fouriertransformation und die Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals:

$$\begin{aligned} (V_g f)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt \\ &\stackrel{z=t-\frac{x}{2}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(z + \frac{x}{2}\right) \cdot \overline{g\left(z + \frac{x}{2} - x\right)} \cdot e^{-2\pi i \langle z + \frac{x}{2}, \omega \rangle} dz \\ &= e^{-\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f\left(z + \frac{x}{2}\right) \cdot \overline{g\left(z - \frac{x}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \langle z, \omega \rangle} dz. \end{aligned}$$

Damit sind alle Identitäten bewiesen.

Nun zeigen wir die Abschätzung  $\|V_g f\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ . Seien dazu  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(V_g f)(x, \omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \cdot |\overline{g(t-x)}| \cdot |e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle}| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \cdot |g(t-x)| dt \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|g(\cdot - x)\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|T_x g\|_2 \\ &= \|f\|_2 \cdot \|g\|_2. \end{aligned}$$

Also folgt  $\|V(f, g)\|_\infty = \|V_g f\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ . Die Sesquilinearität von  $V$  ist leicht zu sehen, so dass insgesamt folgt, dass  $V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$  eine beschränkte, sesquilineare Abbildung, nach Lemma 2 also insbesondere stetig ist.

Wir zeigen schließlich  $V_g f \in C_0(\mathbb{R}^{2d})$ . Seien dazu zuerst  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Dann existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\text{supp}(f), \text{supp}(g) \subset [-k, k]^d$ . Nun sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^d &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), & x &\mapsto T_x \overline{g}, \\ \psi : L^2(\mathbb{R}^d) &\rightarrow L^1(\mathbb{R}^d), & h &\mapsto f \cdot h, \\ \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) &\rightarrow C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d), & h &\mapsto \widehat{h} \end{aligned}$$

stetig. Die Wohldefiniertheit von  $\mathcal{F}$  folgt aus dem Lemma von Riemann-Lebesgue. Damit ist auch

$$\gamma := \mathcal{F} \circ \psi \circ \varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d), \quad x \mapsto \mathcal{F}(\psi(\varphi(x))) = \widehat{f \cdot T_x \overline{g}}$$

stetig und es gilt für  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  nach Gleichung (1.4):

$$(V_g f)(x, \omega) = \widehat{f \cdot T_x \overline{g}}(\omega) = (\gamma(x))(\omega).$$

Damit folgt die Stetigkeit von  $V_g f$ , denn für  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  und eine Folge  $(x_n, \omega_n) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$  mit  $(x_n, \omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, \omega)$  folgt, da für stetige Funktionen  $h \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$  die Abschätzung  $|h(x)| \leq \|h\|_\infty$  punktweise überall gilt:

$$\begin{aligned} |(V_g f)(x_n, \omega_n) - (V_g f)(x, \omega)| &= |(\gamma(x_n))(\omega_n) - (\gamma(x))(\omega)| \\ &\leq |(\gamma(x_n))(\omega_n) - (\gamma(x))(\omega_n)| + |(\gamma(x))(\omega_n) - (\gamma(x))(\omega)| \\ &\leq \|\gamma(x_n) - \gamma(x)\|_\infty + |(\gamma(x))(\omega_n) - (\gamma(x))(\omega)| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da  $\gamma(x) \in C_0(\mathbb{R}^d)$  stetig ist.

Nun zeigen wir,  $\lim_{|(x, \omega)| \rightarrow \infty} |(V_g f)(x, \omega)| = 0$ . Es ist  $K := \gamma([-2k, 2k]^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$  als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Definiere für  $n \in \mathbb{N}$ :  $B_n := B_n(0) \subset \mathbb{R}^d$ . Dann ist für  $n \in \mathbb{N}$  die Menge

$$U_n := \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{L^\infty(B_n^c)} < \varepsilon \right\} \subset C_0(\mathbb{R}^d)$$

offen, denn nach der zweiten Dreiecksungleichung gilt für  $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  die Abschätzung

$$\left| \|f\|_{L^\infty(B_n^c)} - \|g\|_{L^\infty(B_n^c)} \right| \leq \|f - g\|_{L^\infty(B_n^c)} \leq \|f - g\|_\infty,$$

das heißt die Abbildung  $L^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_{L^\infty(B_n^c)}$  ist stetig, so dass  $U_n$  als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen ist. Weiter ist  $\|f\|_{L^\infty(B_{n+1}^c)} \leq \|f\|_{L^\infty(B_n^c)}$ , so dass  $U_n \subset U_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Da für jedes  $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$  nach Definition  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$  gilt, ist  $C_0(\mathbb{R}^d) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , insbesondere also

$$K \subset C_0(\mathbb{R}^d) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Die Kompaktheit von  $K$  sichert die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung dieser offenen Überdeckung, das heißt (da die  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge bilden), dass ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $K \subset U_{n_0}$  existiert.

Sei nun  $n_1 := \max_{x \in [-2k, 2k]^d} |x| \in \mathbb{R}_+^*$ . Für  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  mit  $|(x, \omega)| > n_0 + n_1$  unterscheiden wir nun zwei Fälle:

- (1)  $x \notin [-2k, 2k]^d$ . Dann gilt für  $t \in \mathbb{R}^d$  beliebig schon  $f(t) \cdot g(t-x) = 0$ , denn für  $f(t) \cdot g(t-x) \neq 0$  folgt  $t \in \text{supp}(f) \subset [-k, k]^d$  und  $t-x \in \text{supp}(g) \subset [-k, k]^d$ . Wegen  $x \notin [-2k, 2k]^d$  existiert aber ein  $j \in \underline{d}$  mit  $x_j \notin [-2k, 2k]$ , das heißt  $|x_j| > 2k$ . Dann folgt wegen  $t \in [-k, k]^d$  schon  $|t_j| \leq k$ , also  $-|t_j| \geq -k$ , und somit:

$$|t_j - x_j| = |x_j - t_j| \geq ||x_j| - |t_j|| \geq |x_j| - |t_j| \geq |x_j| - k > 2k - k = k,$$

also  $t_j - x_j \notin [-k, k]$ , das heißt  $t - x \notin [-k, k]^d$ . Widerspruch. Es folgt:

$$|(V_g f)(x, \omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle \omega, t \rangle} dt \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} 0 dt \right| = 0 < \varepsilon.$$

- (2)  $x \in [-2k, 2k]^d$ , also  $|x| \leq n_1$ . Dann folgt:

$$n_0 + n_1 < |(x, \omega)| \leq |x| + |\omega| \leq n_1 + |\omega|,$$

also  $|\omega| > n_0$ , das heißt:  $\omega \in B_{n_0}^c$ . Damit folgt wegen  $\gamma(x) \in \gamma([-2k, 2k]^d) = K \subset U_{n_0}$ :

$$|(V_g f)(x, \omega)| = |(\gamma(x))(\omega)| < \varepsilon.$$

Da in jedem Fall  $|(V_g f)(x, \omega)| < \varepsilon$  für  $|(x, \omega)| > n_0 + n_1$  gilt, folgt  $V_g f \in C_0(\mathbb{R}^{2d})$ .

Für beliebige  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  existieren Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$  mit  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} f$  und  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} g$ . Dann gilt wegen der Stetigkeit von  $V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$  und der Abgeschlossenheit von  $C_0(\mathbb{R}^{2d})$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^{2d})$  schon:

$$V_g f = V(f, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n, g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{g_n} f_n \in \overline{C_0(\mathbb{R}^{2d})} = C_0(\mathbb{R}^{2d}).$$

□

Als Nächstes zeigen wir die sogenannte Kovarianz-Eigenschaft der Fenster-Fouriertransformation:

**Lemma 4.** Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt für  $x, \omega, u, \eta \in \mathbb{R}^d$ :

$$[V_g((T_u \circ M_\eta)(f))](x, \omega) = e^{-2\pi i \langle u, \omega \rangle} \cdot (V_g f)(x - u, \omega - \eta).$$

*Beweis.* Für die Adjungierten der Translation und der Modulation gilt:  $T_u^* = T_{-u}$  und  $M_\eta^* = M_{-\eta}$ , denn für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  rechnet man mit der Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals nach:

$$\begin{aligned} \langle T_u(f), g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u) \cdot \overline{g(x)} dx \stackrel{z=x-u}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{g(z+u)} dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot \overline{g(z-(-u))} dz = \langle f, T_{-u}(g) \rangle, \\ \langle M_\eta(f), g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle x, \eta \rangle} \cdot f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \overline{e^{2\pi i \langle x, -\eta \rangle} \cdot g(x)} dx = \langle f, M_{-\eta}(g) \rangle. \end{aligned}$$

Nun folgt nach Lemma 3, Gleichung (1.5):

$$\begin{aligned} [V_g((T_u \circ M_\eta)(f))](x, \omega) &= \langle (T_u \circ M_\eta)(f), (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle \\ &= \langle f, (M_{-\eta} \circ T_{-u} \circ M_\omega \circ T_x)(g) \rangle. \end{aligned}$$

Mit der kanonischen Vertauschungsrelation (1.3) ergibt sich nun mit erneuter Verwendung von Lemma 3, Gleichung (1.5):

$$\begin{aligned} [V_g((T_u \circ M_\eta)(f))](x, \omega) &= \left\langle f, \left( M_{-\eta} \circ e^{-2\pi i \langle -u, \omega \rangle} \cdot M_\omega \circ T_{-u} \circ T_x \right) (g) \right\rangle \\ &= e^{-2\pi i \langle u, \omega \rangle} \cdot \left\langle f, (M_{\omega-\eta} \circ T_{x-u})(g) \right\rangle \\ &= e^{-2\pi i \langle u, \omega \rangle} \cdot (V_g f)(x-u, \omega-\eta). \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass auch  $V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d})$  eine wohldefinierte und beschränkte sesquilineare Abbildung ist. Außerdem werden wir in Analogie zum Satz von Plancherel für die Fouriertransformation zeigen, dass die Fenster-Fouriertransformation in einem gewissen Sinne das Skalarprodukt erhält. Dazu zeigen wir zuerst ein einfaches Lemma, das zeigt, dass Sesquilinearformen schon durch ihr Verhalten auf der Diagonale  $\{(x, x) \mid x \in V\}$  eindeutig festgelegt sind:

**Lemma 5.** *Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum,  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform und  $\psi_f : V \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x, x)$  die zugehörige quadratische Form. Dann gilt für  $x, y \in V$ :*

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (\psi_f(x+y) + i \cdot \psi_f(x+iy) - \psi_f(x-y) - i \cdot \psi_f(x-iy)).$$

Insbesondere folgt für Sesquilinearformen  $f, g : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\psi_f = \psi_g$  schon  $f = g$ . Weiterhin erhält man – da das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eines (Prä-)Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  eine Sesquilinearform mit  $\psi_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \|\cdot\|^2$  ist – die sogenannte Polarisationsformel

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left( \|x+y\|^2 + i \cdot \|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i \cdot \|x-iy\|^2 \right).$$

*Beweis.* Wir berechnen:

$$\begin{aligned} &\psi_f(x+y) + i \cdot \psi_f(x+iy) - \psi_f(x-y) - i \cdot \psi_f(x-iy) \\ &= f(x+y, x+y) + i \cdot f(x+iy, x+iy) - f(x-y, x-y) - i \cdot f(x-iy, x-iy) \\ &= f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) + i \cdot f(x, x) + i \cdot f(x, iy) + i \cdot f(iy, x) + i \cdot f(iy, iy) \\ &\quad - f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) - f(y, y) - i \cdot f(x, x) + i \cdot f(x, iy) + i \cdot f(iy, x) - i \cdot f(iy, iy) \\ &= 2 \cdot f(x, y) + 2 \cdot f(y, x) + 2 \cdot i \cdot (-i) \cdot f(x, y) + 2 \cdot i \cdot i \cdot f(y, x) = 4 \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. □

Nun zum oben angekündigten Lemma:

**Lemma 6.** *Seien  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist für  $i \in \underline{2}$  auch  $V_{g_i} f_i \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  mit  $\|V_{g_i} f_i\|_2 = \|f_i\|_2 \cdot \|g_i\|_2$  und es gilt weiterhin:*

$$(1.12) \quad \langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}.$$

Der lineare Operator  $V_g : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d}), f \mapsto V_g f$  ist also für alle  $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  injektiv und für  $\|g\|_2 = 1$  eine Isometrie.

*Beweis.* Wir betrachten zuerst den Fall  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ . Wir zeigen, dass dann für  $i \in \underline{2}$  schon  $V_{g_i} f_i \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  mit  $\|V_{g_i} f_i\|_2 = \|f_i\|_2 \cdot \|g_i\|_2$  gilt. Es gilt nämlich, da man den Satz von Fubini für nicht-negative, messbare Integranden immer anwenden kann, sowie wegen der Identität (1.4) von Lemma 3 und

wegen des Satzes von Plancherel (dieser ist anwendbar, da  $f_i \cdot T_x \bar{g}_i \in C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  ist):

$$\begin{aligned}
\|V_{g_i} f_i\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_{g_i} f_i)(x, \omega) \cdot \overline{(V_{g_i} f_i)(x, \omega)} d(x, \omega) \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (V_{g_i} f_i)(x, \omega) \cdot \overline{(V_{g_i} f_i)(x, \omega)} d\omega dx \\
&\stackrel{(1.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_i \cdot T_x \bar{g}_i}(\omega) \cdot \overline{\widehat{f_i \cdot T_x \bar{g}_i}(\omega)} d\omega dx \\
&\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f_i(t) \cdot (T_x \bar{g}_i)(t) \cdot \overline{f_i(t) \cdot (T_x \bar{g}_i)(t)} dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f_i(t)|^2 \cdot |g_i(t-x)|^2 dt dx \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f_i(t)|^2 \cdot |g_i(t-x)|^2 dx dt \\
&\stackrel{z=t-x}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f_i(t)|^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g_i(z)|^2 dz dt \\
(1.13) \quad &= \|f_i\|_2^2 \cdot \|g_i\|_2^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Damit folgt insbesondere, dass für  $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  schon  $V_g f, V_{\tilde{g}} \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  sind und damit das Skalarprodukt  $\langle V_g f, V_{\tilde{g}} \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$  wohldefiniert ist. Sei nun  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  beliebig. Betrachte dann die beiden Sesquilinearformen

$$\begin{aligned}
\varphi_g : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{C}, \quad (f, \tilde{f}) \mapsto \langle V_g f, V_g \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}, \\
\gamma_g : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{C}, \quad (f, \tilde{f}) \mapsto \langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_2^2.
\end{aligned}$$

Für die zugehörigen quadratischen Formen hat man für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ :

$$\psi_{\varphi_g}(f) = \varphi_g(f, f) = \langle V_g f, V_g f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|V_g f\|_2^2 \stackrel{(1.13)}{=} \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 = \langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_2^2 = \gamma_g(f, f) = \psi_{\gamma_g}(f).$$

Nach Lemma 5 folgt also schon  $\varphi_g = \gamma_g$ , das heißt  $\langle V_g f, V_g \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_2^2$  für  $f, \tilde{f}, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Betrachte nun für  $f, \tilde{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  die beiden Sesquilinearformen

$$\begin{aligned}
\beta_{f, \tilde{f}} : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{C}, \quad (g, \tilde{g}) \mapsto \overline{\langle V_g f, V_{\tilde{g}} \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}}, \\
\alpha_{f, \tilde{f}} : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{C}, \quad (g, \tilde{g}) \mapsto \langle g, \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}.
\end{aligned}$$

Für die zugehörigen quadratischen Formen hat man für  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ :

$$\psi_{\beta_{f, \tilde{f}}}(g) = \beta_{f, \tilde{f}}(g, g) = \overline{\langle V_g f, V_g \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}} = \overline{\langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_2^2} = \langle g, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}} = \alpha_{f, \tilde{f}}(g) = \psi_{\alpha_{f, \tilde{f}}}(g).$$

Nach Lemma 5 folgt also schon  $\beta_{f, \tilde{f}} = \alpha_{f, \tilde{f}}$ , das heißt  $\langle V_g f, V_{\tilde{g}} \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle g, \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$  für alle  $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Damit ist die Behauptung für  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  bewiesen.

Seien nun  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  beliebig. Dann existieren Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$  mit  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} f$  und  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} g$ . Insbesondere sind  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als  $L^2$ -Cauchyfolgen in der  $L^2$ -Norm beschränkt durch ein  $C > 0$ . Da  $V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^{2d})$  nach Lemma 3 stetig ist, folgt  $\|(V_{g_n} f_n) - (V_g f)\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , das heißt  $(V_{g_n} f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (C_0(\mathbb{R}^{2d}))^{\mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $V_g f \in C_0(\mathbb{R}^{2d})$ . Weiterhin erhält man mit

der für  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  bereits gezeigten Behauptung und der Sesquilinearität von  $V$  für  $m, n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \|(V_{g_n} f_n) - (V_{g_m} f_m)\|_2 &= \|(V_{g_n} f_n) - (V_{g_n} f_m) + (V_{g_n} f_m) - (V_{g_m} f_m)\|_2 \\ &= \|(V_{g_n} (f_n - f_m)) + (V_{g_n - g_m} f_m)\|_2 \\ &\leq \|V_{g_n} (f_n - f_m)\|_2 + \|V_{g_n - g_m} f_m\|_2 \\ &= \|g_n\|_2 \cdot \|f_n - f_m\|_2 + \|g_n - g_m\|_2 \cdot \|f_m\|_2 \\ &\leq C \cdot (\|f_n - f_m\|_2 + \|g_n - g_m\|_2) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Das heißt, die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} := (V_{g_n} f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^2(\mathbb{R}^{2d}))^{\mathbb{N}}$  ist eine  $L^2$ -Cauchyfolge, also konvergent gegen ein  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . Für eine Teilfolge  $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gilt dann  $\varphi_{n_k}(x, \omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(x, \omega)$  für fast alle  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^{2d}$ .

Da  $\varphi_n = V_{g_n} f_n$  gleichmäßig gegen  $V_g f$  konvergiert, heißt das  $\varphi(x, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(x, \omega) = (V_g f)(x, \omega)$  für fast alle  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , also (bezüglich der Gleichheit in  $L^2$ ):  $V_g f = \varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . Für die Norm erhält man schließlich:

$$\|V_g f\|_2 = \|\varphi\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_{g_n} f_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 \cdot \|g_n\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Das heißt, die sesquilineare Abbildung  $V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $(f, g) \mapsto V_g f$  ist wohldefiniert und beschränkt.

Damit folgt die Stetigkeit der Abbildungen

$$\begin{aligned} ((L^2(\mathbb{R}^d))^2)^2 &\rightarrow \mathbb{C}, \quad ((f, g), (\tilde{f}, \tilde{g})) \mapsto \langle V_g f, V_{\tilde{g}} \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}, \\ ((L^2(\mathbb{R}^d))^2)^2 &\rightarrow \mathbb{C}, \quad ((f, g), (\tilde{f}, \tilde{g})) \mapsto \langle f, \tilde{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle g, \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}. \end{aligned}$$

Diese stimmen nach dem für  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  gezeigten Teil auf der dichten Teilmenge  $((C_c^\infty(\mathbb{R}^d))^2)^2 \subset ((L^2(\mathbb{R}^d))^2)^2$  überein, sind also auf dem ganzen Raum identisch. Damit ist alles bewiesen.  $\square$

Die Injektivität des Operators  $V_g : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $f \mapsto V_g f$  des letzten Lemmas bedeutet insbesondere, dass  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  durch die Funktion  $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  eindeutig bestimmt ist. Wir werden uns im Folgenden mit der Frage nach der Inversen des Operators  $V_g$  beschäftigen. Zuerst notieren wir aber noch das folgende Korollar:

**Korollar 7.** *Sei  $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  beliebig. Dann ist  $\langle (M_\omega \circ T_x)(g) \mid x, \omega \in \mathbb{R}^d \rangle \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  ein dichter Unterraum von  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass für  $V := \langle (M_\omega \circ T_x)(g) \mid x, \omega \in \mathbb{R}^d \rangle \leq L^2(\mathbb{R}^d)$  schon  $V^\perp = \{0\}$  gilt. Sei also  $f \in V^\perp$ . Dann erhält man mit Lemma 3, Gleichung (1.5) für  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  beliebig:

$$(V_g f)(x, \omega) = \langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle = 0.$$

Also folgt nach Lemma 6:

$$0 = \|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Da nach Voraussetzung  $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ist, folgt durch Kürzen schon  $\|f\|_2 = 0$ , also  $f = 0$ .  $\square$

## 2. Die Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation

Ähnlich zur Fourier-Inversionsformel wollen wir nun eine Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation herleiten.

Um die Formel für die Inverse des Operators  $V_g$  formulieren zu können, benötigen wir einen geeigneten Integrationsbegriff für vektorwertige Integrale; in unserem Fall ist dies das schwache Integral, auch Pettis-Integral genannt. Wir verwenden dabei für einen Banachraum  $B$  die Bezeichnung  $B'$  für den Dualraum von  $B$  und für  $x \in B$  und  $g \in B'$  definieren wir  $\langle x, g \rangle_{B'} := g(x) \in \mathbb{C}$ . Der Index  $B'$  wird verwendet, um die duale Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B'}$  vom Skalarprodukt auf Hilberträumen abzugrenzen.

**Definition 8.** Sei  $B$  ein Banachraum, sowie  $(X, M, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow B$  eine Abbildung. Dann heißt  $f$  *schwach integrierbar* (beziehungsweise *Pettis-integrierbar*), falls für alle  $g \in B'$  die Abbildung  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}$  messbar ist, das Integral  $\int_X (g \circ f)(x) d\mu(x) = \int_X \langle f(x), g \rangle_{B'} d\mu(x) \in \mathbb{C}$  existiert und die Abbildung

$$\psi_f : B' \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \int_X \langle f(x), g \rangle_{B'} d\mu(x)$$



ein beschränktes, lineares Funktional auf  $B'$  ist. Dann heißt

$$\int_X^{w*} f(x) d\mu(x) := \psi_f \in B''$$

das *schwache Integral* (beziehungsweise das *Pettis-Integral*) von  $f$  über  $X$ . Da ein Element  $\psi \in B''$  durch die Werte  $\psi(g)$  für  $g \in B'$  eindeutig bestimmt ist, folgt die Eindeutigkeit dieser Definition.

Falls ein  $h \in B$  existiert, so dass für alle  $g \in B'$  gilt:

$$\int_X \langle f(x), g \rangle_{B'} d\mu(x) = \langle h, g \rangle_{B'},$$

(falls  $B$  ein reflexiver Banachraum ist, ist dies immer der Fall), so schreiben wir

$$\int_X^w f(x) d\mu(x) := h \in B$$

und nennen  $\int_X^w f(x) d\mu(x)$  wieder das *schwache Integral* (beziehungsweise das *Pettis-Integral*) von  $f$  über  $X$ . Da die Menge der beschränkten, linearen Funktionale  $B'$  die Punkte trennt, folgt auch in diesem Fall die Eindeutigkeit des Pettis-Integrals.

Aus dem Zusammenhang (und der unterschiedlichen Notation in den Formeln) wird stets klar sein, welcher der beiden leicht unterschiedlichen Integralbegriffe gemeint ist.

Da die Dualräume von Hilberträumen durch den Rieszischen Darstellungssatz vollständig charakterisiert sind, erhält man in diesem Fall die folgende einfachere Charakterisierung des Pettis-Integrals:

*Bemerkung 9.* Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $(X, M, \mu)$  ein Maßraum. Für  $f : X \rightarrow \mathcal{H}$  existiert das Pettis-Integral  $\int_X^w f(x) d\mu(x)$  genau dann, wenn für alle  $g \in \mathcal{H}$  das Integral  $\int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x)$  existiert und es ein  $C \geq 0$  gibt, so dass für alle  $g \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\left| \int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x) \right| \leq C \cdot \|g\|_{\mathcal{H}}.$$

Dann gilt für  $h \in \mathcal{H}$  die Äquivalenz:

$$(2.1) \quad h = \int_X^w f(x) d\mu(x) \Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{H} : \langle h, g \rangle = \int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x).$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Unter obigen Voraussetzungen ist die Abbildung

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \overline{\int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x)} = \int_X \overline{\langle f(x), g \rangle} d\mu(x) = \int_X \langle g, f(x) \rangle d\mu(x)$$

ein lineares, beschränktes Funktional auf  $\mathcal{H}$ . Nach dem Rieszischen Darstellungssatz existiert also ein  $h \in \mathcal{H}$ , so dass für alle  $g \in \mathcal{H}$  die Identität

$$\overline{\int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x)} = \langle g, h \rangle$$

gilt.

Für ein beliebiges, beschränktes, lineares Funktional  $\gamma \in \mathcal{H}'$  existiert wieder nach dem Rieszischen Darstellungssatz ein  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{H}$ , so dass für alle  $g \in \mathcal{H}$  die Beziehung  $\gamma(g) = \langle g, \tilde{\gamma} \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle g, \tilde{\gamma} \rangle$  gilt. Damit folgt nun:

$$\int_X \langle f(x), \gamma \rangle_{\mathcal{H}'} d\mu(x) = \int_X \langle f(x), \tilde{\gamma} \rangle d\mu(x) = \overline{\langle \tilde{\gamma}, h \rangle} = \langle h, \tilde{\gamma} \rangle = \langle h, \gamma \rangle_{\mathcal{H}'}$$

Nach Definition des Pettis-Integrals folgt also, dass  $\int_X^w f(x) d\mu(x) = h \in \mathcal{H}$  existiert, was insbesondere die Charakterisierung in (2.1) beweist.

„ $\Rightarrow$ “: Nach Voraussetzung existiert  $h := \int_X^w f(x) d\mu(x) \in \mathcal{H}$ . Sei nun  $g \in \mathcal{H}$  beliebig. Definiere die Abbildung  $\tilde{g} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle x, g \rangle$ . Dann ist  $\tilde{g} \in \mathcal{H}'$ , so dass nach Definition des Pettis-Integrals das Integral

$$\int_X \langle f(x), \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}'} d\mu(x) = \int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x)$$

existiert und die Identität

$$\int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x) = \int_X \langle f(x), \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}'} d\mu(x) = \langle h, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle h, g \rangle$$

gültig ist. Damit folgt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\left| \int_X \langle f(x), g \rangle d\mu(x) \right| = |\langle h, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}'}| = |\langle h, g \rangle| \leq \|h\|_{\mathcal{H}} \cdot \|g\|_{\mathcal{H}}.$$

Da  $C := \|h\|_{\mathcal{H}} \geq 0$  unabhängig von  $g \in \mathcal{H}$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Beim Lebesgue-Integral folgt aus der Integrierbarkeit von  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  die Integrierbarkeit von  $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Das nächste Beispiel zeigt, dass beim Pettis-Integral aus der Integrierbarkeit von  $f : X \rightarrow B$  *nicht* auf die Integrierbarkeit von  $\|f\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  geschlossen werden kann.

**Beispiel 10.** Wir betrachten den Hilbertraum  $\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{N})$  und den Maßraum  $X = (\mathbb{N}, \text{Pot}(\mathbb{N}), \mu)$ , wobei  $\mu : \text{Pot}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty], M \mapsto |M|$  das Zählmaß auf  $\mathbb{N}$  bezeichnet. Weiter betrachten wir  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H}, n \mapsto \frac{e_n}{n}$ , wobei  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\ell^2(\mathbb{N}))^{\mathbb{N}}$  die Standard-Hilbertraumbasis von  $\ell^2(\mathbb{N})$  bezeichnet.

Dann ist  $\|f\|_{\ell^2(\mathbb{N})} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+, n \mapsto \|f(n)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \frac{1}{n}$  nicht integrierbar, denn es ist:

$$\int_{\mathbb{N}} \|f(n)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} d\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Dagegen ist  $f$  aber Pettis-integrierbar mit  $\int_{\mathbb{N}}^w f(n) d\mu(n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , denn für  $C := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \infty$  und jedes  $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{N}} \langle f(n), h \rangle d\mu(n) \right| &\leq \int_{\mathbb{N}} |\langle f(n), h \rangle| d\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} \left| \left\langle \frac{e_n}{n}, h \right\rangle \right| d\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} \left| \frac{h_n}{n} \right| d\mu(n) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{\int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} d\mu(n)} \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{N}} |h_n|^2 d\mu(n)} \\ &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2} = C \cdot \|h\|_{\ell^2(\mathbb{N})}. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 9 existiert also  $\int_{\mathbb{N}}^w f(n) d\mu(n) \in \ell^2(\mathbb{N})$  und da für  $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Identität

$$\int_{\mathbb{N}} \langle f(n), h \rangle d\mu(n) = \int_{\mathbb{N}} \overline{\frac{h_n}{n}} d\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \overline{h_n} = \left\langle \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, h \right\rangle$$

gilt, folgt  $\int_{\mathbb{N}}^w f(n) d\mu(n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ .

Mittels des Begriffs des Pettis-Integrals können wir nun die Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation formulieren und beweisen.

**Satz 11.** (*Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation*)

Seien  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$ . Dann gilt für  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}}^w (V_g f)(x, \omega) \cdot (M_\omega \circ T_x)(\gamma) d\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst mittels Bemerkung 9, dass das angegebene Pettis-Integral existiert. Es gilt für beliebige  $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , da nach Lemma 3, Gleichung (1.5) die Identität

$$(2.2) \quad \langle (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle = \overline{\langle h, (M_\omega \circ T_x)(\gamma) \rangle} = \overline{(V_\gamma h)(x, \omega)}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle (V_g f)(x, \omega) \cdot (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle d\left(\frac{x}{\omega}\right) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot \langle (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle d\left(\frac{x}{\omega}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{(V_\gamma h)(x, \omega)} d\left(\frac{x}{\omega}\right) = \langle V_g f, V_\gamma h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}. \end{aligned}$$

Da nach Lemma 6  $V_g f, V_\gamma h \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  sind, existiert das Integral  $\int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle (V_g f)(x, \omega) \cdot (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle d\left(\frac{x}{\omega}\right)$ . Weiterhin erhält man wegen der in Lemma 6 gezeigten Identität für  $\|V_g f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$  und  $\|V_\gamma h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle (V_g f)(x, \omega) \cdot (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle d\left(\frac{x}{\omega}\right) \right| &= \left| \langle V_g f, V_\gamma h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \right| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|V_g f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \cdot \|V_\gamma h\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ &= \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_2 \cdot \|h\|_2, \end{aligned}$$

so dass nach Bemerkung 9 (da  $C := \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_2$  unabhängig von  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ist) die Existenz von  $\tilde{f} := \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot (M_\omega \circ T_x)(\gamma) d(\frac{x}{\omega}) \in L^2(\mathbb{R}^d)$  folgt.

Mittels Lemma 6 erhält man für  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$  unter Verwendung von Gleichung (2.2):

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \tilde{f}, h \right\rangle &= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot \langle (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle d(\frac{x}{\omega}) \\
&\stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{(V_\gamma h)(x, \omega)} d(\frac{x}{\omega}) \\
&= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \langle V_g f, V_\gamma h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\
&\stackrel{\text{Lemma 6}}{=} \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \langle f, h \rangle \cdot \overline{\langle g, \gamma \rangle} = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \langle f, h \rangle \cdot \langle \gamma, g \rangle \\
&= \langle f, h \rangle.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

Als Nächstes werden wir eine starke Version der Inversionsformel herleiten. Diese ist ähnlich zum Fall der Fouriertransformation, wobei die Darstellung  $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx$  nur für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt, aber die Funktion  $g_n(\omega) := \int_{[-n, n]^d} f(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx$  auch für  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  definiert ist und  $L^2$ -Konvergenz  $\|g_n - \hat{f}\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  vorliegt.

**Satz 12.** Seien  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$  fest mit  $\langle \gamma, g \rangle \neq 0$  und es sei  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von kompakten Mengen  $K_n \subset \mathbb{R}^{2d}$  mit  $K_n \subset K_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}^{2d} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist

$$f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t) d(\frac{x}{\omega})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  wohldefiniert, es ist  $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$  und es gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$ .

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest, aber beliebig. Da  $K_n \subset \mathbb{R}^{2d}$  kompakt – also beschränkt – ist, existiert ein  $R_n > 0$  mit  $K_n \subset [-R_n, R_n]^{2d}$ . Sei nun  $t \in \mathbb{R}^d$  beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K_n} |(V_g f)(x, \omega) \cdot ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t) d(\frac{x}{\omega})| &= \int_{K_n} |(V_g f)(x, \omega)| \cdot |e^{2\pi i \langle t, \omega \rangle} \cdot \gamma(t-x)| d(\frac{x}{\omega}) \\
&\leq \|V_g f\|_\infty \cdot \int_{K_n} |\gamma(t-x)| d(\frac{x}{\omega}) \\
&\stackrel{\text{Lemma 3}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \int_{[-R_n, R_n]^d} \int_{[-R_n, R_n]^d} |\gamma(t-x)| dx d\omega \\
&= \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot (2R_n)^d \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\gamma(t-x)| \cdot \chi_{[-R_n, R_n]^d}(x) dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot (2R_n)^d \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |\gamma(t-x)|^2 dx} \cdot \|\chi_{[-R_n, R_n]^d}\|_2 \\
(2.3) \qquad \qquad \qquad &= \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_2 \cdot (2R_n)^d \cdot \sqrt{(2R_n)^d} < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist  $f_n(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^d$  wohldefiniert und  $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{(2R_n)^{\frac{3d}{2}}}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_2$ .

Sei nun  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  beliebig. Dann ist  $f_n \cdot \bar{h} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle f_n, h \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^d} f_n(t) \cdot \overline{h(t)} dt = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t) d(\frac{x}{\omega}) \cdot \overline{h(t)} dt \\
&= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t) \cdot \overline{h(t)} d(\frac{x}{\omega}) dt \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t) \cdot \overline{h(t)} dt d(\frac{x}{\omega}) \\
&= \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \langle (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle d(\frac{x}{\omega}).
\end{aligned}$$

Dabei ist der Satz von Fubini anwendbar, denn es ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{K_n} |(V_g f)(x, \omega) \cdot ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t)| \cdot |\overline{h(t)}| d\left(\frac{x}{\omega}\right) dt &\stackrel{(2.3)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_2 \cdot (2R_n)^{\frac{3}{2}d} \cdot |h(t)| dt \\ &= (2R_n)^{\frac{3}{2}d} \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_2 \cdot \|h\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3, Gleichung (1.5) gilt die Identität

$$(2.4) \quad \langle (M_\omega \circ T_x)(\gamma), h \rangle = \overline{\langle h, (M_\omega \circ T_x)(\gamma) \rangle} = \overline{\langle V_\gamma h \rangle}(x, \omega).$$

Damit folgt nun:

$$\langle f_n, h \rangle_{L^2} = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_\gamma h \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

also

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \langle h, f_n \rangle_{L^2} &= \overline{\langle f_n, h \rangle_{L^2}} = \overline{\frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_\gamma h \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right)} \\ &= \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \cdot \int_{K_n} \langle V_\gamma h \rangle(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_g f \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Nun ist die Abbildung

$$\varphi_n : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}, h \mapsto \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \cdot \int_{K_n} \langle V_\gamma h \rangle(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_g f \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

linear, da  $(h, \gamma) \mapsto V_\gamma h$  sesquilinear, also in der ersten Komponente linear ist. Weiter ist  $\varphi_n$  beschränkt (und wohldefiniert), denn es ist für  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(h)| &\leq \frac{1}{|\langle g, \gamma \rangle|} \cdot \int_{K_n} |\langle V_\gamma h \rangle(x, \omega)| \cdot |\langle V_g f \rangle(x, \omega)| d\left(\frac{x}{\omega}\right) \\ &\leq \frac{1}{|\langle g, \gamma \rangle|} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle V_\gamma h \rangle(x, \omega)| \cdot |\langle V_g f \rangle(x, \omega)| d\left(\frac{x}{\omega}\right) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{\|V_\gamma h\|_2 \cdot \|V_g f\|_2}{|\langle g, \gamma \rangle|} \stackrel{\text{Lemma 6}}{=} \frac{\|\gamma\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|f\|_2}{|\langle g, \gamma \rangle|} \cdot \|h\|_2. \end{aligned}$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert also ein  $\tilde{f}_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\varphi_n(h) = \langle h, \tilde{f}_n \rangle$  für alle  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$

und  $\|\tilde{f}_n\|_2 = \|\varphi_n\| \leq \frac{\|\gamma\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|f\|_2}{|\langle g, \gamma \rangle|}$ .

Für  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  ist auch  $\bar{h} \in C_c(\mathbb{R}^d)$ . Damit folgt, da nach Gleichung (2.5) schon  $\langle \bar{h}, f_n \rangle = \varphi_n(\bar{h})$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(t) - \tilde{f}_n(t)) \cdot h(t) dt = \langle f_n, \bar{h} \rangle_{L^2} - \langle \tilde{f}_n, \bar{h} \rangle_{L^2} = \langle \bar{h}, f_n \rangle_{L^2} - \langle \bar{h}, \tilde{f}_n \rangle_{L^2} = \varphi_n(\bar{h}) - \varphi_n(\bar{h}) = 0.$$

Also ist  $\int_{\mathbb{R}^d} (f_n(t) - \tilde{f}_n(t)) \cdot h(t) dt = 0$  für alle  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ . Nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung folgt also  $f_n(t) = \tilde{f}_n(t)$  fast überall, also insbesondere  $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f_n\|_2 = \|\tilde{f}_n\|_2 \leq \frac{\|\gamma\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|f\|_2}{|\langle g, \gamma \rangle|}$ . Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} \langle h, f_n \rangle_{L^2} &= \langle h, \tilde{f}_n \rangle_{L^2} = \varphi_n(h) = \frac{1}{\langle g, \gamma \rangle} \int_{K_n} \langle V_\gamma h \rangle(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_g f \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right) \\ &= \overline{\frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_\gamma h \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

für alle  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , also  $\langle f_n, h \rangle = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_\gamma h \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right)$ .

Nach Satz 6, Gleichung (1.12) gilt  $\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$ . Insbesondere ergibt sich also  $\langle f, h \rangle \cdot \overline{\langle g, \gamma \rangle} = \langle V_g f, V_\gamma h \rangle$  und damit:

$$\langle f, h \rangle = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{\langle V_\gamma h \rangle}(x, \omega) d\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& |\langle f - f_n, h \rangle| \\
&= \frac{1}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \left| \int_{\mathbb{R}^{2d}} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{(V_\gamma h)(x, \omega)} d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) - \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{(V_\gamma h)(x, \omega)} d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) \right| \\
&= \frac{1}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \left| \int_{K_n^c} (V_g f)(x, \omega) \cdot \overline{(V_\gamma h)(x, \omega)} d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) \right| \\
&\leq \frac{1}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \int_{K_n^c} |(V_g f)(x, \omega)| \cdot |(V_\gamma h)(x, \omega)| d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) \\
\text{H\"older} &\leq \frac{1}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \sqrt{\int_{K_n^c} |(V_g f)(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)} \cdot \sqrt{\int_{K_n^c} |(V_\gamma h)(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)} \\
&\leq \frac{1}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \|V_\gamma h\|_2 \cdot \sqrt{\int_{K_n^c} |(V_g f)(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)} \\
&= \frac{1}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \|\gamma\|_2 \cdot \|h\|_2 \cdot \sqrt{\int_{K_n^c} |(V_g f)(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)}.
\end{aligned}$$

Da dies für alle  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$  gilt, ergibt sich (in dem man  $h = f - f_n$  einsetzt und  $\|f - f_n\|_2$  kürzt):

$$\|f - f_n\|_2 \leq \frac{\|\gamma\|_2}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \sqrt{\int_{K_n^c} |(V_g f)(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)} = \frac{\|\gamma\|_2}{|\langle \gamma, g \rangle|} \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^{2d}} |(V_g f)(x, \omega)|^2 \cdot \chi_{K_n^c}\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dabei verschwindet  $\int_{\mathbb{R}^{2d}} |(V_g f)(x, \omega)|^2 \cdot \chi_{K_n^c}\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right)$  für  $n \rightarrow \infty$ , da für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$\left| |(V_g f)(x, \omega)|^2 \cdot \chi_{K_n^c}\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) \right| \leq |(V_g f)(x, \omega)|^2$$

gilt, also (da  $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  ist) die Funktion  $|V_g f|^2 \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$  eine integrierbare Majorante der Folge der Integranden ist und für alle  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  gilt:  $|V_g f|^2 \cdot \chi_{K_n^c}\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , denn für beliebige  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^{2d} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $(x, \omega) \in K_{n_0}$ . Wegen  $K_n \subset K_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann schon  $(x, \omega) \in K_n$  für alle  $n \geq n_0$ , also  $\chi_{K_n^c}\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) = 0$  für  $n \geq n_0$ . Die Behauptung folgt dann aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz.  $\square$

### 3. Wahl der Fensterfunktion $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{(V_f g)(x, \omega)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^d} g(t) \cdot \overline{f(t-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(t)} \cdot \overline{\overline{f(t-x)}} \cdot \overline{e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle}} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(t)} \cdot f(t-x) \cdot e^{2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt \\
&\stackrel{z=t-x}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(z)} \cdot \overline{g(z+x)} \cdot e^{2\pi i \langle z+x, \omega \rangle} dz \\
&= e^{2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(z)} \cdot \overline{g(z-(-x))} \cdot e^{-2\pi i \langle z, -\omega \rangle} dz \\
&= e^{2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_g f)(-x, -\omega).
\end{aligned}$$

Damit folgt insbesondere  $|(V_f g)(x, \omega)| = |(V_g f)(-x, -\omega)|$ . Das heißt, dass bei Vertauschen des Abschneidefensters  $g$  und der zu analysierenden Funktion  $f$  (jedenfalls betragsmäßig) lediglich die Argumente der Fenster-Fouriertransformation am Ursprung gespiegelt werden.

Dies bedeutet, dass alleine basierend auf der Struktur der Fenster-Fouriertransformation das Fenster nicht gegenüber der zu analysierenden Funktion ausgezeichnet ist. Anders ausgedrückt, ist ohne Kenntnis des Abschneidefensters  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  nicht klar, ob die Fenster-Fouriertransformation  $V_g f$  Informationen über das Zeit-Frequenzverhalten von  $f$  oder  $g$  liefert, also ob  $f$  mittels des Fensters  $g$  analysiert wird, oder  $g$  mittels des „Fensters“  $f$  analysiert wird.

Um den Einfluss des Fensters  $g$  zu analysieren, betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oder } x > 30, \\ 3 \cdot \sin(8\pi x), & x \in [0, 10], \\ \frac{19}{10} \cdot (\sin(2\pi x) - \sin(14\pi x) + \sin(24\pi x)), & x \in [10, 20], \\ 3 \cdot \sin(\pi \cdot (x - 20)^2), & x \in [20, 30], \end{cases}$$

die in Abbildung 3.1 skizziert ist. Im Intervall  $[0, 10]$  besteht  $f$  aus einer Schwingung der Frequenz  $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$ , im Intervall  $[10, 20]$  ist  $f$  eine Überlagerung aus drei Schwingungen der Frequenzen 1, 7 und 12. Im letzten Intervall  $[20, 30]$  handelt es sich um einen sogenannten linearen *Chirp*, das heißt um ein Signal, dessen Frequenz linear zunimmt.

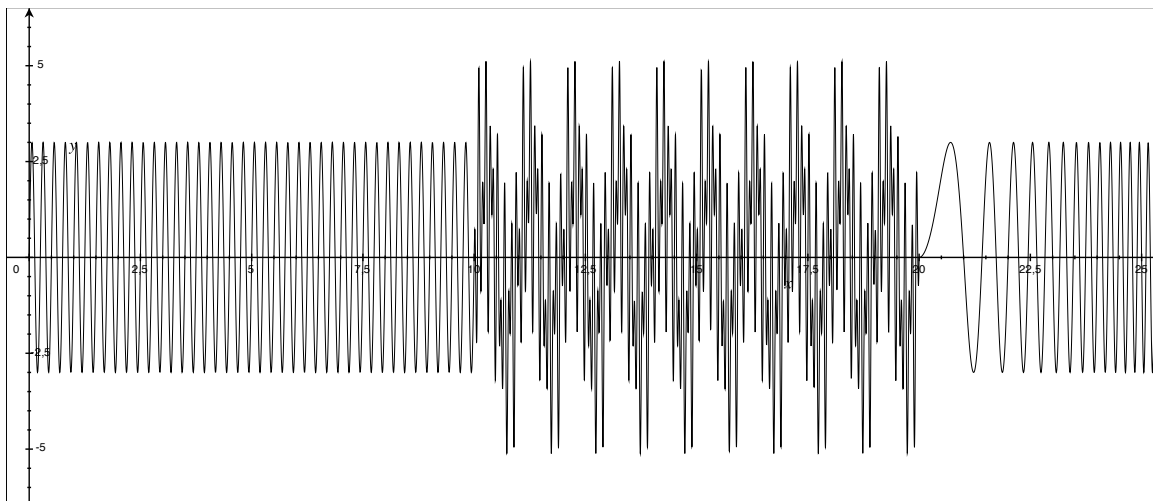


ABBILDUNG 3.1. Skizze der Funktion  $f$ .

Die Fenster-Fouriertransformationen, die sich mit den beiden Abschneidefunktionen  $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2/4}$  und  $g_2 := \chi_{[-\frac{7}{20}, \frac{7}{20}]}$  ergeben, sind in den Abbildungen 3.2 und 3.3 zu sehen. In beiden Fällen sieht man klar die Trennung der drei unterschiedlichen Bereiche und kann erkennen, dass im ersten Bereich das Signal aus einer einzelnen Schwingung konstanter Frequenz, im zweiten Bereich aus drei Schwingungen konstanter Frequenzen und im letzten Bereich aus einer Schwingung mit linear steigender Frequenz zusammengesetzt ist.

Wie in den beiden Abbildungen zu erkennen ist, ist die Frequenzauflösung bei der Analyse mittels des Fensters  $g_1$  besser als bei Analyse mittels  $g_2$ . Dies äußert sich darin, dass die Bereiche von  $V_{g_1}f$ , in denen große Werte angenommen werden, eine bezüglich der  $y$ -Achse wesentlich geringere Ausdehnung haben, also die jeweiligen Frequenzen einfacher abgelesen werden können. In der Fenster-Fouriertransformation  $V_{g_2}f$  in Abbildung 3.3 sind diese Bereiche dagegen „verschmiert“.

Im Gegensatz dazu ist die zeitliche Auflösung bei der Analyse mittels des Fensters  $g_2$  besser als bei der Analyse mittels  $g_1$ . Dies sieht man daran, dass die Übergänge zwischen den verschiedenen Signaltypen zu den Zeiten  $t = 10$  und  $t = 20$  in Abbildung 3.3 besser zu erkennen sind und dagegen in Abbildung 3.2 „verschmiert“ werden.

Um diese Effekte heuristisch zu deuten, erinnern wir zunächst an die folgende Definition

**Definition.** Eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  heißt  $\varepsilon$ -konzentriert auf eine messbare Menge  $T \subset \mathbb{R}^d$ , falls gilt:

$$\left( \int_{T^c} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_2.$$

Mit dieser Definition im Zusammenhang steht die Unschärferelation von Donoho und Stark (vergleiche für den Beweis [2], Theorem 2.3.1):

**Satz.** Sei  $0 \neq f \in L^2(\mathbb{R}^d)$   $\varepsilon_T$ -konzentriert auf  $T \subset \mathbb{R}^d$ . Weiterhin sei  $\hat{f}$   $\varepsilon_\Omega$ -konzentriert auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Falls  $\varepsilon_T + \varepsilon_\Omega \leq 1$  gilt, so folgt:

$$\lambda_d(T) \cdot \lambda_d(\Omega) \geq (1 - \varepsilon_T - \varepsilon_\Omega)^2.$$

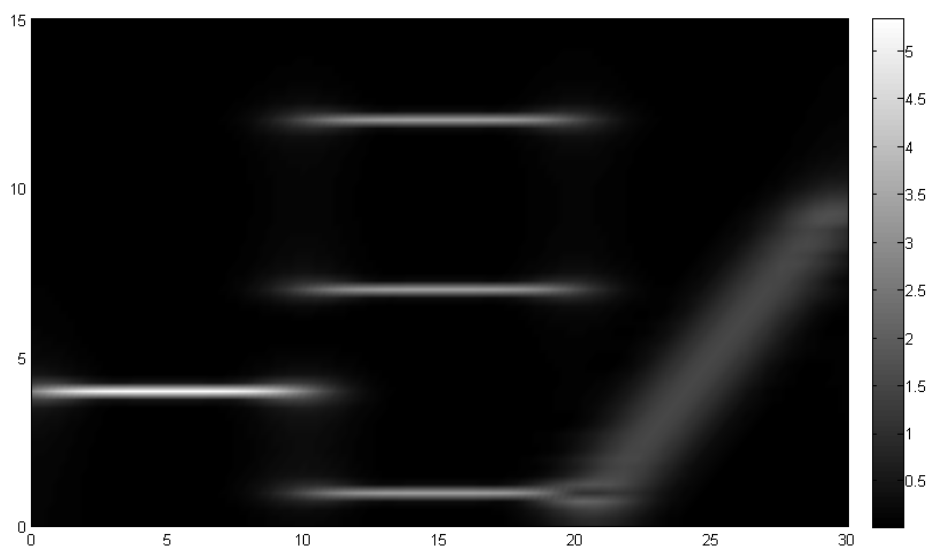


ABBILDUNG 3.2. Dichtegraph von  $|V_{g_1} f|$ . Auf der  $x$ -Achse ist  $t$  und auf der  $y$ -Achse ist  $\omega$  abgetragen.

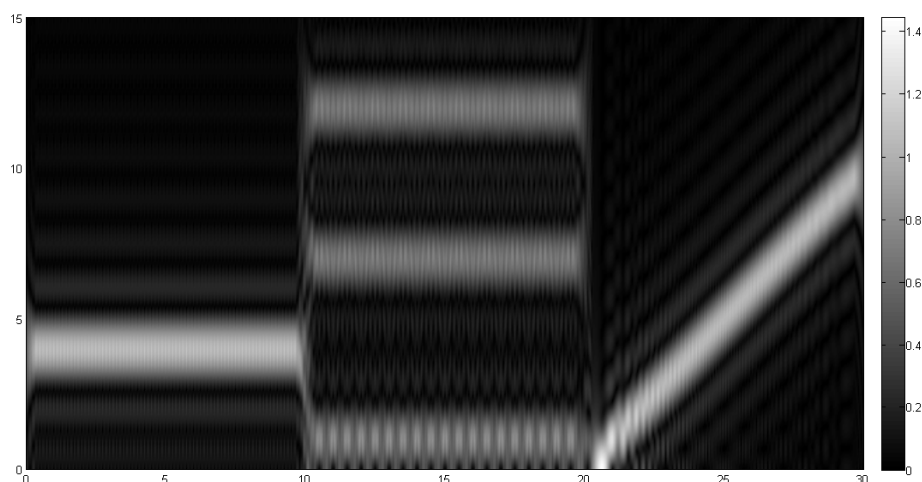


ABBILDUNG 3.3. Dichtegraph von  $|V_{g_2} f|$ . Auf der  $x$ -Achse ist  $t$  und auf der  $y$ -Achse ist  $\omega$  abgetragen.

Für das Fenster  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  sei  $g$  nun  $\varepsilon_T$ -konzentriert auf  $T \subset \mathbb{R}^d$  und  $\hat{g}$  sei  $\varepsilon_\Omega$ -konzentriert auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  für kleine  $\varepsilon_T, \varepsilon_\Omega \geq 0$ . Dann ist  $(M_\omega \circ T_x)(g)$   $\varepsilon_T$ -konzentriert auf  $x + T$  und  $\mathcal{F}((M_\omega \circ T_x)(g)) = (T_\omega \circ M_{-x})(\hat{g})$  ist  $\varepsilon_\Omega$ -konzentriert auf  $\omega + \Omega$ . In der Zeit-Frequenz-Ebene ist  $(M_\omega \circ T_x)(g)$  also konzentriert auf  $(x + T) \times (\omega + \Omega)$  und  $(V_g f)(x, \omega) = \langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle$  misst den Anteil der Zelle  $(x + T) \times (\omega + \Omega)$  an der Zeit-Frequenz-Verteilung von  $f$ . Um möglichst lokale Aussagen über die Zeit-Frequenz-Verteilung von  $f$  zu machen, möchte man kleine Werte von  $\lambda_d(T)$  (gute Zeitauflösung) und  $\lambda_d(\Omega)$  (gute Frequenzauflösung) erreichen. Die Unschärferelation von Donoho und Stark besagt, dass dies nicht beliebig möglich ist, sondern

$$\lambda_d(T) \cdot \lambda_d(\Omega) \geq (1 - \varepsilon_T - \varepsilon_\Omega)^2$$

gelten muss. Da man an kleinen Werten für  $\varepsilon_T, \varepsilon_\Omega$  interessiert ist, liegt der Wert der rechten Seite in der Nähe von 1. In der Praxis wird man als Fenster eine Funktion nehmen, für die sowohl  $g$ , als auch  $\hat{g}$  schnell abfallen, zum Beispiel  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Zurück zu unserer konkreten Situation einer charakteristischen Funktion: Die Funktion  $g_2$  hat den relativ kleinen Träger  $[-\frac{7}{20}, \frac{7}{20}]$ , bietet also eine gute Zeitauflösung. Als Fourier-Transformierte ergibt sich aber (für

$\omega \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}\widehat{g}_2(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} g_2(t) \cdot e^{-2\pi i t \omega} dt = \int_{-\frac{7}{20}}^{\frac{7}{20}} e^{-2\pi i t \omega} dt = \frac{e^{-2\pi i t \omega}}{-2\pi i \cdot \omega} \Big|_{t=-\frac{7}{20}}^{\frac{7}{20}} \\ &= \frac{e^{-2\pi i \omega \cdot \frac{7}{20}} - e^{2\pi i \omega \cdot \frac{7}{20}}}{-2\pi i \cdot \omega} = -\frac{e^{\pi i \omega \cdot \frac{7}{10}} - e^{\pi i \omega \cdot \frac{7}{10}}}{-2\pi i \cdot \omega} \\ &= \frac{2i \cdot \operatorname{Im}\left(e^{\pi i \omega \cdot \frac{7}{10}}\right)}{2\pi i \cdot \omega} = \frac{\sin\left(\frac{7}{10}\pi \cdot \omega\right)}{\pi \cdot \omega}.\end{aligned}$$

Das heißt,  $\widehat{g}_2$  fällt so langsam, dass  $\widehat{g}_2$  sogar keine  $L^1$ -Funktion ist. Deshalb hat

$$(V_{g_2}f)(x, \omega) \stackrel{\text{Lemma 3, Gleichung (1.8)}}{=} e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_{\widehat{g}_2}\widehat{f})(\omega, -x)$$

eine unzureichende Frequenzauflösung, wie man auch in Abbildung 3.3 sieht.

#### 4. Erweiterung des Definitionsbereichs der Fenster-Fouriertransformation

Bisher wurde die Fenster-Fouriertransformation nur für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  definiert. Wir wollen nun sogar für temperierte Distributionen  $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  eine temperierte Distribution  $V_g f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  erklären, so dass diese neue Definition mit der alten übereinstimmt, falls die Distributionen  $f, g$  durch  $L^2$ -Funktionen gegeben sind.

Dazu erinnern wir zuerst an einige Fakten, die für die nachfolgende Konstruktion benötigt werden. In [1], Proposition 9.9 wird unter anderem die Aussage des folgenden Lemmas gezeigt:

**Lemma.**  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist dicht in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Wir wollen im Folgenden ein Tensor-Produkt von (temperierten) Distributionen definieren. Dazu brauchen wir zuerst ein Tensorprodukt für Funktionen.

**Definition 13.** Seien  $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen. Definiere  $f \otimes g: \mathbb{R}^{2d} \equiv \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x) \cdot g(y)$ .

Bezüglich der Dichtheit solcher Tensorprodukte im Zusammenhang mit Testfunktionen wird in [4], Theorem I.14.1 folgender Satz gezeigt:

**Satz.** Sei  $V := \langle f \otimes g \mid f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rangle \leq C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ . Dann ist  $V$  dicht in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ .

Da weiterhin die Einbettung  $C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  stetig ist, folgt insgesamt, dass

$$V = \langle f \otimes g \mid f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rangle \leq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$$

dicht in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  liegt.

Als weitere Vorbereitung definieren wir einige Operationen, die aus Funktionen auf höher-dimensionalen Räumen Funktionen auf niedriger-dimensionalen Räumen erzeugen, in dem einige Variablen festgehalten werden:

**Definition 14.** Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ . Definiere für  $x, y \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned}f_x: \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(x, z), \\ f^y: \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z, y).\end{aligned}$$

Dann sind  $f_x, f^y \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Definiere nun für  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{[x]}(f): \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, \quad y \mapsto \varphi(f^y), \\ \varphi^{[y]}(f): \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \varphi(f_x).\end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir zeigen, dass die naheliegende Definition des Tensorproduktes zweier temperierter Distributionen auf dem Raum  $V = \langle f \otimes g \mid f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rangle$  zu einer Definition auf dem ganzen Schwartz-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  fortgesetzt werden kann:

**Satz 15.** Sei  $V := \langle f \otimes g \mid f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rangle \leq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  und seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . Definiere

$$\varphi \otimes \psi: V \rightarrow \mathbb{C}, h = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \mapsto \sum_{i=1}^n \varphi(f_i) \cdot \psi(g_i)$$

Dann ist  $\varphi \otimes \psi$  wohldefiniert, denn es gilt für  $h \in V$ :  $(\varphi \otimes \psi)(h) = \varphi(\psi^{[y]}(h))$ . Weiter ist  $\varphi \otimes \psi$  stetig bezüglich der Metrik auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ . Da  $V \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  dicht ist und stetige, lineare Abbildungen gleichmäßig stetig sind, hat  $\varphi \otimes \psi$  dann eine eindeutige, lineare, stetige Fortsetzung auf ganz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ . Diese sei wieder mit  $\varphi \otimes \psi$  bezeichnet.



*Beweis.*

- (1) Wir zeigen zuerst die Wohldefiniertheit und dazu die Identität  $(\varphi \otimes \psi)(h) = \varphi(\psi^{[y]}(h))$ . Sei dazu  $h = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \in V$  beliebig mit  $f_i, g_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  für  $i \in \underline{n}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(\psi^{[y]}(h)) &= \varphi(x \mapsto \psi(h_x)) = \varphi(x \mapsto \psi(y \mapsto h(x, y))) = \varphi\left(x \mapsto \psi\left(y \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot g_i(y)\right)\right) \\ &= \varphi\left(x \mapsto \psi\left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot g_i\right)\right) = \varphi\left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \psi(g_i)\right) = \sum_{i=1}^n \psi(g_i) \cdot \varphi(x \mapsto f_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \psi(g_i) \cdot \varphi(f_i) = (\varphi \otimes \psi)(h). \end{aligned}$$

Da der Ausdruck  $\varphi(\psi^{[y]}(h))$  unabhängig von der konkreten Darstellung  $h = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$  von  $h$  ist, folgt die Wohldefiniertheit von  $\varphi \otimes \psi$ .

- (2) Nun zeigen wir die Beschränktheit: Da  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  temperierte Distributionen sind, existieren Konstanten  $C, \tilde{C} > 0$  und  $m, n \in \mathbb{N}$ , sowie Multiindizes  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}_0^d$  für  $k \in \underline{n}$ , sowie  $\alpha'_j, \beta'_j \in \mathbb{N}_0^d$  für  $j \in \underline{m}$ , so dass für alle  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi(\gamma)| &\leq C \cdot \sum_{k=1}^n \|x^{\alpha_k} \cdot \partial^{\beta_k} \gamma\|_\infty, \\ |\psi(\gamma)| &\leq \tilde{C} \cdot \sum_{j=1}^m \|x^{\alpha'_j} \cdot \partial^{\beta'_j} \gamma\|_\infty. \end{aligned}$$

Wie im ersten Schritt gezeigt, ist für  $h = \sum_{i=1}^l f_i \otimes g_i \in V$  beliebig schon  $(\varphi \otimes \psi)(h) = \varphi(\psi^{[y]}(h))$  mit  $\psi^{[y]}(h) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Also folgt:

$$|(\varphi \otimes \psi)(h)| = \left| \varphi(\psi^{[y]}(h)) \right| \leq C \cdot \sum_{k=1}^n \|x^{\alpha_k} \cdot \partial^{\beta_k} (\psi^{[y]}(h))\|_\infty.$$

Setze nun für  $k \in \underline{n}$  und  $j \in \underline{m}$ :  $\gamma_{k,j} := \binom{\beta_k}{\beta'_j} \in \mathbb{N}_0^{2d}$  und  $\delta_{k,j} := \binom{\alpha_k}{\alpha'_j} \in \mathbb{N}_0^{2d}$ . Dann folgt für  $k \in \underline{n}$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned} \left| x^{\alpha_k} \cdot \partial^{\beta_k} (\psi^{[y]}(h)) \right| &= |x^{\alpha_k}| \cdot \left| \partial_x^{\beta_k} (x \mapsto \psi(h_x)) \right| \\ &= |x^{\alpha_k}| \cdot \left| \partial_x^{\beta_k} (x \mapsto \psi(y \mapsto h(x, y))) \right| \\ &= |x^{\alpha_k}| \cdot \left| \partial_x^{\beta_k} \left( x \mapsto \psi \left( y \mapsto \sum_{i=1}^l f_i(x) \cdot g_i(y) \right) \right) \right| \\ &= |x^{\alpha_k}| \cdot \left| \partial_x^{\beta_k} \left( x \mapsto \sum_{i=1}^l \psi(g_i) \cdot f_i(x) \right) \right| \\ &= |x^{\alpha_k}| \cdot \left| \sum_{i=1}^l \psi(g_i) \cdot (\partial^{\beta_k} f_i)(x) \right| \\ &= |x^{\alpha_k}| \cdot \left| \psi \left( \sum_{i=1}^l (\partial^{\beta_k} f_i)(x) \cdot g_i \right) \right| \\ &\leq \tilde{C} \cdot |x^{\alpha_k}| \cdot \sum_{j=1}^m \left\| y \mapsto y^{\alpha'_j} \cdot \partial_y^{\beta'_j} \left( \sum_{i=1}^l (\partial^{\beta_k} f_i)(x) \cdot g_i(y) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \tilde{C} \cdot \sum_{j=1}^m \left\| \binom{x}{y}^{\gamma_{k,j}} \cdot \partial^{\delta_{k,j}} \left( \binom{x}{y} \mapsto \sum_{i=1}^l f_i(x) \cdot g_i(y) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2d})} \\ &= \tilde{C} \cdot \sum_{j=1}^m \left\| \binom{x}{y}^{\gamma_{k,j}} \cdot \partial^{\delta_{k,j}} h \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also:

$$|(\varphi \otimes \psi)(h)| \leq C \cdot \tilde{C} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left\| \left( \frac{x}{y} \right)^{\gamma_{k,j}} \cdot \partial^{\delta_{k,j}} h \right\|_{\infty}.$$

Damit ist alles bewiesen. □

**Definition.** (Partielle Fouriertransformation)

Sei  $f : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für (fast) alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt  $t \mapsto f(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Definiere dann die partielle Fouriertransformation  $\mathcal{F}_2 f : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$(\mathcal{F}_2 f)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, t) \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt.$$

Analog zur gewöhnlichen Fouriertransformation zeigt man (vergleiche [3], Satz 16) den Satz

**Satz.** Die partielle Fouriertransformation  $\mathcal{F}_2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ ,  $f \mapsto \mathcal{F}_2 f$  ist wohldefiniert und stetig.

Weiterhin kann man zeigen (vergleiche [3], Lemma 15):

**Lemma.** Sei  $A \in GL(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist die Abbildung  $\mathcal{T}_A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ,  $f \mapsto \mathcal{T}_A(f) := f \circ A$  wohldefiniert und stetig.

Damit können wir die Operationen  $\mathcal{F}_2$  und  $\mathcal{T}_A$  für  $A \in GL(\mathbb{R}^d)$  auch auf temperierte Distributionen übertragen:

**Definition 16.** Sei  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  und  $A \in GL(\mathbb{R}^d)$ . Definiere

$$\overline{\varphi} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \overline{\varphi(\overline{f})},$$

sowie

$$\mathcal{F}_2 \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \varphi(\mathcal{F}_2 f).$$

und

$$\mathcal{T}_A \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto |\det(A)|^{-1} \cdot \varphi(\mathcal{T}_{A^{-1}} f) = |\det(A)|^{-1} \cdot \varphi(f \circ A^{-1}).$$

Dann sind nach den obigen Sätzen  $\mathcal{F}_2 \varphi, \mathcal{T}_A \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  temperierte Distributionen. Weiter ist auch  $\overline{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  eine temperierte Distribution.

Das nächste Lemma zeigt, dass sich die oben definierten Begriffe für Distributionen, die durch  $(L^2)$ -Funktionen gegeben sind, wie erwartet verhalten.

**Lemma 17.** Es gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  für ein  $p \in [1, \infty]$  und sei  $\tilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  die zugehörige Distribution. Dann ist  $\overline{\tilde{f}}$  die zu  $\tilde{f}$  gehörige temperierte Distribution.
- (2) Sei  $A \in GL(\mathbb{R}^d)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  für ein  $p \in [1, \infty]$  und sei  $\tilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  die zugehörige temperierte Distribution. Dann ist  $\mathcal{T}_A \tilde{f}$  die zu  $\mathcal{T}_A f$  gehörige temperierte Distribution.
- (3) Seien  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  für ein  $p \in [1, \infty]$  und seien  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  die zugehörigen temperierten Distributionen. Dann ist  $\tilde{f} \otimes \tilde{g}$  die zu  $f \otimes g \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$  gehörige temperierte Distribution.
- (4) Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ , so dass für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt:  $t \mapsto f(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Sei weiter  $\tilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  die zu  $f$  gehörige temperierte Distribution. Dann ist  $\mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  und  $\mathcal{F}_2 \tilde{f}$  ist die zu  $\mathcal{F}_2 f$  gehörige temperierte Distribution.

*Beweis.*

- (1) Sei  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  beliebig. Dann gilt:

$$\overline{\tilde{f}}(g) = \overline{\tilde{f}(\overline{g})} = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} \cdot \overline{\overline{g(x)}} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} \cdot g(x) dx.$$

(2) Sei  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  beliebig und  $p' \in [1, \infty]$  der zu  $p$  konjugierte Exponent, also mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann ist  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ . Damit und mit der Transformationsformel folgt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_A \tilde{f})(g) &= |\det(A)|^{-1} \cdot \tilde{f}(g \circ A^{-1}) = |\det(A^{-1})| \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot g(A^{-1}(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(A(A^{-1}(x))) \cdot g(A^{-1}(x)) \cdot |\det(A^{-1})| dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(A(z)) \cdot g(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{T}_A f)(z) \cdot g(z) dz. \end{aligned}$$

(3) Mit  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  ist  $f \otimes g \in L^p(\mathbb{R}^{2d})$ . Für  $p = \infty$  ist das klar. Für  $p \in [1, \infty)$  beachte:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |(f \otimes g)(x, y)|^p d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x) \cdot g(y)|^p d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^p dy = \|f\|_p^p \cdot \|g\|_p^p < \infty.$$

Damit folgt insbesondere  $f \otimes g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ . Damit muss die Gleichheit nur noch auf dem dichten Unterraum  $V = \langle f \otimes g \mid f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \rangle \leq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  nachgerechnet werden. Sei  $h = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \in V$  beliebig für geeignete  $\varphi_i, \psi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  für  $i \in \underline{n}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} (f \otimes g)(x, y) \cdot h(x, y) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (f \otimes g)(x, y) \cdot \sum_{i=1}^n (\varphi_i \otimes \psi_i)(x, y) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x) \cdot g(y) \cdot \varphi_i(x) \cdot \psi_i(y) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \varphi_i(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \cdot \psi_i(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{f}(\varphi_i) \cdot \tilde{g}(\psi_i) = (\tilde{f} \otimes \tilde{g})(h). \end{aligned}$$

(4) Wir zeigen zuerst, dass für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt:

$$(4.1) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) \cdot g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \widehat{g}(t) dt.$$

Es ist einerseits:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) \cdot g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot e^{-2\pi i \langle t, x \rangle} dt g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot g(x) \cdot e^{-2\pi i \langle t, x \rangle} dt dx, \end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \widehat{g}(t) dt &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot g(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} dx dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot g(x) \cdot e^{-2\pi i \langle t, x \rangle} dt dx. \end{aligned}$$

Der Satz von Fubini ist dabei wegen

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t) \cdot g(x) \cdot e^{-2\pi i \langle t, x \rangle}| dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \cdot |g(x)| dt dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty$$

anwendbar.

Wir zeigen nun  $\mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ . Für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$  ist  $t \mapsto f(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , so dass

$$(\mathcal{F}_2 f)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, t) \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt = (t \mapsto \widehat{f(x, \cdot)})(\omega)$$

für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}^d$  wohldefiniert ist. Nach dem Satz von Fubini ist

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x, \omega)|^2 d\omega dx < \infty.$$

Also ist  $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x, \omega)|^2 d\omega < \infty$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Das heißt,  $t \mapsto f(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Nun folgt:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_2 f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} |(\mathcal{F}_2 f)(x, \omega)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \widehat{(t \mapsto f(x, t))}(\omega) \right|^2 d\omega dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \widehat{t \mapsto f(x, t)} \right\|_2^2 dx \\ \mathcal{F} \text{ ist unitär} & \int_{\mathbb{R}^d} \left\| t \mapsto f(x, t) \right\|_2^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x, t)|^2 dt dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x, t)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right) = \|f\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^{2d}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ . Schließlich folgt nach Gleichung (4.1), da für  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  auch  $t \mapsto g(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ist:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} (\mathcal{F}_2 f)(x, \omega) \cdot g(x, \omega) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{(t \mapsto f(x, t))}(\omega) \cdot g(x, \omega) d\omega dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \omega) \cdot \widehat{(t \mapsto g(x, t))}(\omega) d\omega dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x, \omega) \cdot (\mathcal{F}_2 g)(x, \omega) d\left(\begin{smallmatrix} x \\ \omega \end{smallmatrix}\right) \\ &= \tilde{f}(\mathcal{F}_2 g) = (\mathcal{F}_2 \tilde{f})(g). \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. □

**Satz 18.** Seien  $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . Definiere dann

$$V_g f := \mathcal{F}_2(\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g})),$$

wobei  $A := \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & E \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$  ist. Dann ist  $V_g f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  und falls die temperierten Distributionen  $f, g$  durch Funktionen  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  induziert werden, stimmt  $V_g f$  mit der bisherigen Definition überein.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst  $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^{2d \times 2d})$  mit  $\det(A) = 1$ . Es ist

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} = -E \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}.$$

Also ergibt sich:  $\det(A)^3 = \det(A^3) = \det(-E) = (-1)^{2d} = 1$ , das heißt (wegen  $\det(A) \in \mathbb{R}$ )  $\det(A) = 1$ .

Seien nun  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  die zugehörigen temperierten Distributionen. Wir zeigen, dass die neue Definition mit der alten übereinstimmt. Es ergibt sich für  $x, t \in \mathbb{R}^d$ :

$$(\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g}))(x, t) = (f \otimes \bar{g})(t, -x + t) = f(t) \cdot \overline{g(t - x)}.$$

Einerseits ist nun  $\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g}) = (f \otimes \bar{g}) \circ A \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ , denn es ergibt sich mittels der Transformationsformel:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |((f \otimes \bar{g}) \circ A)(x, t)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} |(f \otimes \bar{g})(x, t)|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x)|^2 \cdot |\overline{g(t)}|^2 d\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^2 dt < \infty. \end{aligned}$$

Andererseits ist für  $x \in \mathbb{R}^d$  schon  $t \mapsto (\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g}))(x, t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , denn es gilt wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g}))(x, t)| dt &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t) \cdot \overline{g(t - x)}| dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |g(t - x)|^2 dt} \\ &= \|f\|_2 \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^2 dt} = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Nach Lemma 17 folgt nun, dass die durch  $f \otimes \bar{g} \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  und  $\tilde{f} \otimes \tilde{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$  gegebenen Distributionen identisch sind. Mit dem gleichen Lemma folgt auch die Gleichheit der Distributionen  $\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g})$  und  $\mathcal{T}_A(\tilde{f} \otimes \tilde{g})$

und schließlich auch die Identität der temperierten Distributionen

$$\mathcal{F}_2(\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g})) = \mathcal{F}_2\left(\mathcal{T}_A\left(\tilde{f} \otimes \bar{\tilde{g}}\right)\right).$$

Nun gilt aber für  $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{F}_2(\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g}))(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{T}_A(f \otimes \bar{g}))(x, t) \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt = (V_g f)(x, \omega).$$

Die Behauptung folgt. □

### Literatur

- [1] G. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, Second Edition*. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [2] Karlheinz Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser Boston Inc., 2001.
- [3] Felix Voigtlaender. *Integraldarstellung metaplektischer Operatoren*. August 2010.
- [4] Kosaku Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, sixth edition, 1980.