Gabor Frames

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 22.03.2011

Bettina Hardy

Inhaltsverzeichnis

§1 Einleitung

Diese Ausarbeitung basiert auf den Kapiteln 5.2, 6.1 und 6.2 aus dem Buch "Foundation of Time-Frequency Analysis" von Gröchenig. In diesen Kapiteln und in dieser Ausarbeitung geht es um Gabor Systeme, die aus einer Funktion und zwei positiven reelen Zahlen als Parameter, ein System von Funktionen erzeugen. Es wird untersucht, welchen Bedingungen diese Parameter genügen müssen, damit dieses System einen Frame bildet.
Wir verwenden die folgenden Operatoren aus der Fourier-Analysis:

$$T_x f(t) = f(t-x) \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$M_w f(t) = e^{2\pi i t w} f(t) \qquad w \in \mathbb{R}^d,$$

$$V_g f(x,w) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t w} dt \qquad g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}.$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

$$T_x^{-1} = T_{-x} = T_x^*,$$

$$M_w^{-1} = M_{-w} = M_w^*,$$

$$T_x M_w = e^{-2\pi i x w} M_w T_x.$$

§2 Definition und wichtige Eigenschaften von Gabor Frames

Wir wollen in diesem Abschnitt zuerst einmal Gabor Frames definieren, um dann ihre Eigenschaften genauer zu untersuchen.

(2.1) Definition (Gabor System/ Gabor Frame)
Gegeben seien eine Fensterfunktion $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, die nicht die Nullfunktion ist, und Parameter $\alpha, \beta > 0$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

ein Gabor System.
Falls $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame in $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist, so bezeichnet man es als Gabor Frame. Der zugehörige Operator wird als Gabor Frame-Operator bezeichnet und hat die Form

$$Sf = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g.$$

(Die Parameter g, α, β werden bei Bedarf als Index hinzugefügt.) ◇

(2.2) Korollar
Der Gabor Frame-Operator kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$Sf = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g.$$

◇

Beweis
Dies läßt sich durch ein paar einfache Umformungen zeigen:

$$\begin{aligned}
\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{T_{\alpha k} M_{\beta n} g(t)} dt \Big)\, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{M_{\beta n} T_{\alpha k} g(t) e^{-2\pi i \alpha \beta n k}} dt\, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{M_{\beta n} T_{\alpha k} g(t)} dt \Big)\, e^{2\pi i \alpha \beta n k} T_{\alpha k} M_{\beta n} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{M_{\beta n} T_{\alpha k} g(t)} dt\, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{e^{2\pi i \beta n t} T_{\alpha k} g(t)} dt\, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t - \alpha k)} e^{-2\pi i \beta n t} dt\, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \\
&= V_g(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g.
\end{aligned}$$

□

(2.3) Proposition
Sei $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame in $L^2(\mathbb{R}^d)$, dann existiert ein duales Fenster $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ so, dass $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ der duale Frame von $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ist. Hieraus folgt dann ebenfalls, dass jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die folgenden Darstellungen besitzt:

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g,
\end{aligned}$$

wobei diese Reihen jeweils unbedingt konvergent in $L^2(\mathbb{R}^d)$ sind.
Außerdem sind die folgenden Normäquivalenzen erfüllt:

$$\begin{aligned}
A\|f\|^2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B\|f\|^2, \\
B^{-1}\|f\|^2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

◇

Beweis
Wir zeigen zunächst einmal, dass der Frame-Operator S mit $T_{\alpha k}M_{\beta n}$ kommutiert. Gegeben seien $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $r, s \in \mathbb{Z}^d$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1} S T_{\alpha r} M_{\beta s} &\overset{\text{linearität}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha r}M_{\beta s} f, T_{\alpha k}M_{\beta n} g\rangle (T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k}M_{\beta n} g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, (T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k}M_{\beta n} g\rangle (T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k}M_{\beta n} g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{-\beta s}T_{-\alpha r}T_{\alpha k}M_{\beta n} g\rangle M_{-\beta s}T_{-\alpha r}T_{\alpha k}M_{\beta n} g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{-\beta s}T_{\alpha(k-r)}M_{\beta n} g\rangle M_{-\beta r}T_{\alpha(k-r)}M_{\beta n} g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} e^{-2\pi\alpha\beta s(k-r)} g\rangle T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} e^{-2\pi\alpha\beta s(k-r)} g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} g\rangle e^{2\pi\alpha\beta s(k-r)} T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} e^{-2\pi\alpha\beta s(k-r)} g \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} g\rangle T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)} g \\
&= \sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\hat{n}\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha\hat{k}}M_{\beta\hat{n}} g\rangle T_{\alpha\hat{k}}M_{\beta\hat{n}} g = Sf.
\end{aligned}$$

Dann ist offenbar auch S^{-1} kommutativ mit $T_{\alpha k}M_{\beta n}$ vertauschbar.
Mit [1] Korollar 5.1.3 ist der zu einem Frame $\{e_j : j \in J\}$ duale Frame die Menge $\{S^{-1}e_j : j \in J\}$. Aus den gegebenen Darstellungen für f ($f = \sum_{j\in J}\langle S^{-1}e_j\rangle e_j = \sum_{j\in J}\langle e_j\rangle S^{-1}e_j$), mit unbedingter Konvergenz der Reihen, folgt das gewünschte Resultat direkt durch Einsetzen des Gabor Frames mit Fenster g und Verwendung der eben gezeigten Kommutativität.
Das Korollar liefert ebenfalls zu den Frame Grenzen $A, B > 0$ des Gabor Frames die Grenzen B^{-1}, A^{-1} des dualen Frames und damit die gewünschten Normäquivalenzen. □

(2.4) Korollar
Sei $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame in $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit dualem Fenster $\gamma = S^{-1}g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ dann ist der inverse Frame Operator gegeben durch:

$$S_g^{-1} f = S_\gamma f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma.$$ ◇

Beweis
Nach [1] Lemma 5.1.6 c) ist der inverse Frame Operator zu dem Frame Operator S eines Frames $\{e_j : j \in J\}$ gegeben durch $S^{-1}f = \sum_{j\in J}\langle f, S^{-1}e_j\rangle S^{-1}e_j$.
Setze nun $J = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $e_j = T_{\alpha k}M_{\beta n}g$ für $j = (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und verwende dann die im Beweis zu Proposition 2.3 gezeigte Kommutativität von S^{-1} und $T_{\alpha k}M_{\beta m}$ an. Damit folgt dann die Behauptung. □

Proposition 2.3 liefert für einen Gabor Frame $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ durch die Darstellung von f eine diskrete Zeitfrequenzrepräsentation von Signalen. Es ergibt sich dadurch weiterhin, dass die gefundenen Darstellungen diskrete Darstellungen der Inversionsformel ($\check{\hat{f}}(x) = \hat{f}(-x)$) sind. Die zweite Darstellung liefert eine Gabor Expansion von f mit den kanonischen Koeffizienten $c_{kn} = \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma\rangle$. Die erste Darstellung, geschrieben als $f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n)M_{\beta n}T_{\alpha k}\gamma$ ist eine explizite Rekonstruktion von f aus der Menge der STFT von f.
Die expliziten Rekonstruktionsformeln (die Darstellungen von f) basieren nicht auf dem iterativen Inversionsalgorithmus, der in 5.1.1 [1] angegeben wird, sondern auf den besonderen Eigenschaften des Gabor Frames. Da die Inverse des Gabor Frame-Operators nur durch das duale Fenster bestimmt wird muss nun nur noch $S\gamma = g$ gelöst werden und nicht mehr allgemein $Sf = h$.
Es ergibt sich sogar $\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)} (\alpha\beta)^{-1}(S_g^{\alpha,\beta})^{-1}g = g$, das heißt, dass das duale Fenster von g gegen g geht, wenn α und β gegen 0 gehen.
Bisher wurde die STFT nur auf der unabhängigen Achse $\alpha\mathbb{Z}^d \times \beta\mathbb{Z}^d$ betrachtet. Was passiert nun, wenn man $\Lambda = E\mathbb{Z}^{2d}$ für $E \in GL(2d, \mathbb{R})$ oder sogar eine nicht-uniforme diskrete Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ verwendet? Natürlich erfüllt auch jedes nicht uniforme Gaborsystem $\mathcal{G}(g, X) = \{T_u M_\eta g, (u, \eta) \in X\}$ das einen Frame bildet die allgemeine Frametheorie. Das heißt es existiert ein dualer Frame $\{e_{u,\eta}, (u, \eta) \in X\}$, so dass $f = \sum_{(u,\eta)} V_g f(u, \eta)e_{u\eta} = \sum_{(u,\eta)\in X} \langle f, e_{u,\eta}\rangle T_u M_\eta g$. Leider fehlt dem dualen Frame $e_{u\eta} = S^{-1}(t_u M_\eta g)$ Strucktur, so dass die Invertierung des Frame-Operators schwieriger und aufwändiger als vorher wird.

§3 Existenz von Gabor Frames

Nachdem die Eigenschaften der Gabor Frames im letzten Abschnitt erläutert wurden, bleibt nun zu klären, ob es leicht überprüfbare Bedingungen gibt, die es erlauben zu erkennen, ob für eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ durch $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Gabor Frame gegeben ist, beziehungsweise ob ein solches g überhaupt existiert.
Hierfür definieren wir zunächst einen neuen Funktionenraum, den wir dann genauer betrachten wollen.

— Wiener Raum —

(3.1) Definition (Wiener Raum)
Der Wiener Raum ist gegeben durch

$$W = W(\mathbb{R}^d) = \{g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \|g\|_W < \infty\}$$

wobei

$$\|g\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,1]^d} |g(x+n)|.$$

Der Unterraum der stetigen Funktionen wird mit $W_0(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet. ◇

(3.2) Korollar
Es gilt für alle $g \in W$:

$$\|g\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|g T_n \chi_{[0,1]^d}\|_\infty$$

◇

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|g\|_W &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,1]^d} |g(x+n)| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x+n)\chi_{[0,1]^d}| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|g(x+n)\chi_{[0,1]^d}\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun ein paar Eigenschaften von W betrachten.

(3.3) Bemerkung
Der Wiener Raum beinhaltet alle beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger und ist somit ein dichter Unterraum aller $L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$.
Diese Einbettung ergibt sich mit der Jensen Ungleichung (siehe [2] 11.18) durch

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{n+[0,1]^d} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|f T_n \chi_{[0,1]^d}\|_\infty^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|f T_n \chi_{[0,1]^d}\|_\infty \Big) = \|f\|_W.
\end{aligned}$$

◇

(3.4) Lemma
Ist $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\gamma > 0$, dann gilt:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\gamma n)| \leq \Big(\frac{1}{\gamma}+1\Big)^d \|g\|_W.$$

◇

Beweis
Da in einem Intervall der Länge eins höchstens $\gamma^{-1}+1$ verschiedene Punkte mit minimaler Distanz γ existieren, sind in dem Würfel $k+[0,1]^d$ höchstens $(\gamma^{-1}+1)^d$ verschiedene Punkte mit γ minimale Distanz in der L^1-Norm enthalten.

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}|g(x-\gamma n)| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ x-\gamma m\in k+[0,1]^d}}|g(x-\gamma m)|\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^d:\\ x-\gamma m\in k+[0,1]^d}}\sup_{n\in\{m\in\mathbb{Z}^d:x-\gamma m\in k+[0,1]^d\}}|g(x-\gamma n)|\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(\frac{1}{\gamma}+1)^d\sup_{n\in\{m\in\mathbb{Z}^d:x-\gamma m\in k+[0,1]^d\}}|g(x-\gamma n)|\\
&\leq (\frac{1}{\gamma}+1)^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sup_{n\in\mathbb{R}^d}|g(x-\gamma n)\chi_{k+[0,1]^d}(x-\gamma n)|\\
&\leq (\frac{1}{\gamma}+1)^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}|g(y)\chi_{k+[0,1]^d}(y)|\\
&= (\frac{1}{\gamma}+1)^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}|g(y)T_k\chi_{[0,1]^d}(y)|\\
&\leq (\frac{1}{\gamma}+1)^d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\|gT_k\chi_{[0,1]^d}\|_\infty \overset{3.2}{=} (\frac{1}{\gamma}+1)^d\|g\|_W
\end{aligned}$$

□

— *Beschränktheit des Gabor Frames* —

Mit Hilfe dieses neuen Raumes für Fensterfunktionen versuchen wir nun Schranken für den Gabor Operator zu finden. Hierzu wollen wir erst einmal ein Kriterium für die Beschränktheit eines Operators betrachten.

(3.5) Lemma (Schur's Test)
a) Sei $(a_{jk})_{j,k\in J}$ eine unendliche Matrix über die Indexmenge J, so dass

$$\sup_{j\in J}\sum_{k\in J}|a_{jk}| \leq K_1,$$

$$\sup_{k\in J}\sum_{j\in J}|a_{jk}| \leq K_2.$$

Dann ist der zugehörige, durch Matrix-Vektor-Multiplikation definierte, Operator A mit $(Ac)_j = \sum_{k\in J} a_{jk}c_k$ beschränkt von $l^p(J)$ auf $l^p(J)$ für $1 \leq p \leq \infty$ mit $\|A\|_{l^p\to l^p} \leq K_1^{\frac{1}{q}}K_2^{\frac{1}{p}}$ (wobei q mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).
b)Sei $K(x,y)$ messbare Funktion auf $\mathbb{R}^{2d}$ mit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)|dy \leq K_1,$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)|dx \leq K_2.$$

Dann ist der durch $Af(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy$ definierte zugehörige Intergraloperator A beschränkt von $L^p(\mathbb{R}^d)$ auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p \leq \infty$ mit $\|A\|_{L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leq K_1^{\frac{1}{q}}K_2^{\frac{1}{p}}$ (wobei q mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). ◇

Beweis
a) Unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der Hölderungleichung (siehe [2]) ergibt sich für q mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$\begin{aligned}|(Ac)j| &= |\sum_{k\in J} a_{jk}c_k| \\ &\leq \sum_{k\in J}|a_{jk}c_k| \\ &= \sum_{k\in J}|a_{jk}|^{\frac{1}{p}}|c_k||a_{jk}|^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \Big(\sum_{k\in J}|a_{jk}||c_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{k\in J}|a_{jk}|\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt dann, dass

$$
\begin{aligned}
\|Ac\|_p^p &= \sum_{j\in J} |(Ac)_j|^p \\
&\leq \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in J} |a_{jk}||c_k|^p \Big) \Big(\sum_{k\in J} |a_{jk}| \Big)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in J} |a_{jk}||c_k|^p \Big) K_1^{\frac{p}{q}} \\
&= K_1^{\frac{p}{q}} \sum_{j\in J} \Big(\sum_{k\in J} |a_{jk}||c_k|^q \Big) \\
&= K_1^{\frac{p}{q}} \sum_{k\in J} |c_k|^q \Big(\sum_{j\in J} |a_{jk}| \Big) \\
&\leq K_1^{\frac{p}{q}} \sum_{k\in J} |c_k|^p K_1 \\
&= K_1^{\frac{p}{q}} K_2 \sum_{k\in J} |c_k|^p \\
&= K_1^{\frac{p}{q}} K_2 \|c\|_p^p
\end{aligned}
$$

Und damit folgt die Behauptung mit ziehen der p-ten Wurzel.
b) Wird Analog bewiesen unter Verwendung der Sätze für die Integralrechnung (siehe hier Hölderungleichung bei [3]) □

Wir definieren nun zwei neue Operatoren:

(3.6) Definition (Synthese und Koeffizienten Operator)

$$
Dc := \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g \qquad \text{für } c = (c_{kn})_{k,n\in\mathbb{Z}^d},
$$

$$
(Cf)_{kn} := \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle \quad \text{für } k,n \in \mathbb{Z}^d.
$$

◇

(3.7) Korollar
Es gilt dann $Sf = DCf$ und $D = C^*$. ◇

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned}(DC)f &= D\big((\langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle)_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\big)\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}g\\ &= Sf.\end{aligned}$$

Es gilt außerdem:

$$\begin{aligned}\langle Cf, c\rangle &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle c_{kn}\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d}\langle f, c_{kn}T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle\\ &= \langle f, \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn}T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle = \langle f, Dc\rangle\end{aligned}$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $c \in l^2(\mathbb{Z}^{2d})$.
Damit ist $D = C^*$. □

Damit gilt dann auch
$\|S\| = \|DC\| = \|C^*C\| = \|C\|^2 = \|D\|^2$.

(3.8) Proposition
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta > 0$. Dann ist $D_{g,\alpha,\beta}$ beschränkt von $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ nach $L^2(\mathbb{R}^d)$ und die Operatornorm erfüllt

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^{\frac{d}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)^{\frac{d}{2}}\|g\|_W.$$ ◇

Beweis
Sei $c \in l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ mit endlichem Träger. Definiere nun:

$$m_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn}e^{2\pi i\beta n(x-\alpha k)}.$$

Diese m_k sind $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d$-periodisch und mit [1] 1.32 gilt:

$$\|m_k\|^2_{L^2([0,\frac{1}{\beta}]^d)} = \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}|c_{kn}|^2.$$

Da mit c auch m nur endlich viele positive Einträge enthält, gilt:

$$\begin{aligned}(Dc)(t) &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g(t)\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} g(t-\alpha k) e^{2\pi i \beta n(t-\alpha k)}\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} g(t) e^{2\pi i \beta n(t-\alpha k)}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c_{kn} e^{2\pi i \beta n(t-\alpha k)} \big) T_{\alpha k} g(t)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} m_k(t) T_{\alpha k} g(t).\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\|Dc\|_2^2 &= \| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} m_k T_{\alpha k} g \|_2^2\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} m_k(x) g(x-\alpha k) \big) \big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \overline{m_j(x) g(x-\alpha j)} \big) dx\\ &\overset{\text{endl. Summe}}{=} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} m_k(x) \overline{m_j(x)} g(x-\alpha k) \overline{g}(x-\alpha j) dx\\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} m_k(x-\frac{r}{\beta}) \overline{m_j(x-\frac{r}{\beta})} g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}) \overline{g}(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}) dx\\ &\overset{\frac{1}{\beta}\text{-Periode}}{=} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} m_k(x) \overline{m_j(x)} g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}) \overline{g}(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}) dx\\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} m_k(x) \overline{m_j(x)} \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}) \overline{g}(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}) dx.\end{aligned}$$

Diese Summen sind alle wohldefiniert, da mit $T_{\alpha k} g T_{\alpha j} \overline{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ auch $m_k \in L^1([0,\frac{1}{\beta}])$ ist. Definiere nun zu $x \in \mathbb{R}^d$ die Matrix $\Gamma(x) = \big(\Gamma(x)\big)_{j,k\in\mathbb{Z}^d}$:

$$\Gamma_{jk}(x) = \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x-\alpha j-\frac{r}{\beta}) g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta}).$$

Wir wollen nun eine fast immer gültige Abschätzung für den zugehörigen Operator machen:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\Gamma_{jk}(x)| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha j-\frac{r}{\beta})||g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta})| \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha j-\frac{r}{\beta})|)|g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta})| \\
&\overset{3.4}{\leq} (\frac{1}{\alpha}+1)^d \|g\|_W \sum_{r\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k-\frac{r}{\beta})| \\
&\overset{3.4}{\leq} (\frac{1}{\alpha}+1)^d (\beta+1)^d \|g\|_W^2.
\end{aligned}$$

$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} |\Gamma_{jk}(x)|$ kann analog abgeschätzt werden.
Nun folgt mit Schur's Test (3.5), dass

$$\|\Gamma(x)\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d (\beta+1)^d \|g\|_W^2 := k(\alpha,\beta,g).$$

Der Operator ist also für fast alle x beschränkt. Es gilt nun:

$$
\begin{aligned}
\|Dc\|_2^2 &\overset{\text{endl.Summe}}{=} \int\limits_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} m_k(x)\overline{m_j(x)}\Gamma_{jk}(x)dx \\
&= \int\limits_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \overline{m_j(x)}(\Gamma(x)m(x))_j dx \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int\limits_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|m_j(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}|(\Gamma(x)m(x))_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int\limits_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \|m(x)\|_2\|\Gamma(x)m(x)\|_2 \\
&\leq \int\limits_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} \|\Gamma(x)\|_{op}\|m(x)\|_2^2 \\
&\leq \int\limits_{[0,\frac{1}{\beta}]^d} k(\alpha,\beta,g) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|m_k(x)|^2 dx \\
&= (\frac{1}{\alpha}+1)^d(\beta+1)^d\beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_{kn}|^2 \\
&= (\frac{1}{\alpha}+1)^d(\frac{1}{\beta}+1)^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|c_{kn}|^2.
\end{aligned}
$$

Um dieses Resultat für beliebige $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ zu erhalten verwendet man eine Folge c_k mit endlichem Träger und gleicher Norm, die gegen c konvergiert. Da die Abschätzung für jedes c_k gilt, muss dies dann auch für c gelten. □

(3.9) Korollar
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$, dann sind $C_{g,\alpha,\beta}$ und $S_g = D_g C_g$ beschränkte Operatoren mit

$$
\|C_{g,\alpha,\beta}\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^{\frac{d}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)^{\frac{d}{2}}\|g\|_W,
$$

$$
\|S_g\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d(\frac{1}{\beta}+1)^d\|g\|_W^2.
$$

◇

Beweis
Die Behauptung folgt sofort mit 3.8 und $\|D_{g,\alpha,\beta}\| = \|C_{g,\alpha,\beta}\|$ und $\|D_{g,\alpha,\beta}\|^2 = \|S_g\|$ □

(3.10) Korollar
Sei $\hat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$, dann sind C_g, D_g und S_g beschränkte Operatoren und

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^{\frac{d}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)^{\frac{d}{2}}\|\hat{g}\|_W.$$ ◇

Beweis
Definiere $\tilde{c}_{n,k} = c_{-n,k}e^{2\pi i\alpha\beta kn}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(D_{g,\alpha,\beta})\hat{} &\underset{\hat{}\text{linear}}{=} \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{k,n}(T_{\alpha k}M_{\beta n}g)\hat{}\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{k,n}M_{-\alpha k}T_{\beta n}\hat{g}\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{-n,k}M_{\alpha n}T_{\beta k}\hat{g}\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} c_{-n,k}e^{2\pi i\alpha\beta kn}T_{\beta k}M_{\alpha n}\hat{g}\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \tilde{c}_{k,n}T_{\beta k}M_{\alpha n}\hat{g} = D_{\hat{g},\beta,\alpha}\tilde{c}.\end{aligned}$$

Damit ist nach dem Satz von Plancherel (siehe [1] Satz 1.1.2)

$$\|D_{g,\alpha,\beta}c\|_2 = \|(D_{g,\alpha,\beta}c)\hat{}\|_2 = \|D_{\hat{g},\alpha,\beta}\tilde{c}\|_2.$$

Weiter gilt dann mit 3.9

$$\|D_{g,\alpha,\beta}c\|_2 = \|D_{\hat{g},\alpha,\beta}\tilde{c}\|_2 \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^{\frac{d}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)^{\frac{d}{2}}\|\hat{g}\|_W\|\tilde{c}\|_2.$$

Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\|\tilde{c}\|_2^2 &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |\tilde{c}_{k,n}|^2\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |c_{-n,k}|^2|e^{2\pi i\alpha\beta kn}|^2\\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} |c_{-n,k}|^2\\ &= \sum_{\hat{k},\hat{n}\in\mathbb{Z}^d} |c_{\hat{n},\hat{k}}|^2\\ &= \|c\|_2^2.\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung mit

$$\|D_{g,\alpha,\beta}c\|_2 \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^{\frac{d}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)^{\frac{d}{2}}\|\hat{g}\|_W\|\tilde{c}\|_2 = (\frac{1}{\alpha}+1)^{\frac{d}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)^{\frac{d}{2}}\|\hat{g}\|_W\|c\|_2. \qquad \square$$

(3.11) Korollar
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$ oder $\hat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$ dann definiert die zu $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ gehörige Gram-Matrix $(\langle T_{\alpha k}M_{\beta n}g, T_{\alpha\hat{k}}M_{\beta\hat{n}}\rangle)_{k,\hat{k},n,\hat{n}\in\mathbb{Z}^d}$ einen beschränkten Operator auf $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$. $\diamond$

Beweis
Der durch die Gram-Matrix definierte Operator G entspricht genau D^*D:

$$\begin{aligned}
G(c)_{k,n} &= \sum_{(k',n')\in\mathbb{Z}^{2d}} \langle T_{\alpha k}M_{\beta n}g, T_{\alpha k'}M_{\beta n'}g\rangle c_{k',n'} \\
&= \langle T_{\alpha k}M_{\beta n}g, \sum_{(k',n')\in\mathbb{Z}^{2d}} c_{k',n'}T_{\alpha k'}M_{\beta n'}g\rangle \\
&= \langle T_{\alpha k}M_{\beta n}g, Dc\rangle \\
&= CDc \\
&= D^*Dc.
\end{aligned} \qquad \square$$

Literatur

[1] Gröchenig, K.H. (2001). *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser Boston.

[2] Walter, W. (2004). *Analysis 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelber New York.

[3] Walter, W. (2002). *Analysis 2*, Springer-Verlag Berlin Heidelber New York.