Die Walnut-Darstellung für Gabor-Frame-Operatoren

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 22.03.2011

Florian Drescher

Einleitung

In diesem Vortrag führen wir die Walnut-Darstellung des Gabor-Frame-Operators ein. Wie bereits bekannt ist, lässt sich für einen Frame $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ eine Funktion γ finden, so dass für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma$$

gilt, sich f also aus den Samples der STFT rekonstruieren lässt. Unter diesem Gesichtspunkt betrachten wir deshalb den Operator

$$S_{g,\gamma} f = D_\gamma C_g f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma$$

welchen wir trotzdem als Gabor-Frame-Operator bezeichnen wollen. Unsere Fensterfunktionen g und γ wählen wir aus dem Wiener-Raum $W(\mathbb{R}^d)$ und es bezeichnet $Q_\alpha := [0, \alpha]^d$ den Würfel mit Kantenlänge α.

§1 Korrelationsfunktionen

(1.1) Definition (Korrelationsfunktionen)
Für $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta > 0$ heißen

$$G_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k) \gamma(x - \alpha k)\,, \quad n \in \mathbb{Z}^d \tag{1}$$

die *Korrelationsfunktionen* des Paares (g, γ) . ◇

Die $G_n(x)$ sind also Periodisierungen der $T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \gamma$ mit Periode $\alpha \mathbb{Z}^d$ analog zur Definition der $\Gamma_{ij}(x)$. Für diese gilt

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\Gamma_{ij}(x)| \leq (\tfrac{1}{\alpha}+1)^d(\beta+1)^d\|g\|_W \text{ für fast alle } x\in\mathbb{R}^d\,.$$

Wir wollen nun eine sogar stärkere Eigenschaft der $G_n(x)$ beweisen, welche wir analog zum vorherigen Vortrag nutzen können, um die Beschränktheit des Operators $S_{g,\gamma}$ zu zeigen.

(1.2) Lemma
Falls $g,\gamma\in W(\mathbb{R}^d)$, so ist $G_n\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty \leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d(2\beta+2)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W. \tag{2}$$

Beweis
Wir möchten zuerst zeigen, dass $G_n\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Lemma 6.1.2 [1] liefert eine Abschätzung für $\|G_n\|_\infty$. Hierfür benötigen wir , dass $T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma\in W(\mathbb{R}^d)$. Es gilt aber, dass

$$\begin{aligned}
\|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma\|_W &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma(x+n)|\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|\overline{g}(x-\frac{n}{\beta}+n)\cdot\gamma(x+n)|\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|\overline{g}(x-\frac{n}{\beta}+n)|\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|\gamma(x+n)|\\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|\overline{g}(x-\frac{n}{\beta}+n)|\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|\gamma(x+n)|\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\underbrace{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|\overline{g}(x)|}_{=\|g\|_\infty<\infty,\text{ da } g\in L^\infty(\mathbb{R}^d)\supset W(\mathbb{R}^d)}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|\gamma(x+n)|\\
&= \|g\|_\infty\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}|\gamma(x+n)|\\
&= \|g\|_\infty\cdot\|\gamma\|_W<\infty.
\end{aligned}$$

Somit können wir Lemma 6.1.2 [1] auf $T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma$ anwenden und es gilt

$$\begin{aligned}
\|G_n\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x-\frac{n}{\beta}-\alpha k)\gamma(x-\alpha k)| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma(x-\alpha k)| \\
&\overset{\Delta-Ungl}{\leq} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma(x-\alpha k)| \\
&\overset{(6.1.2)}{\leq} (\frac{1}{\alpha}+1)^d \|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma\|_W.
\end{aligned}$$

Wir können also schließen, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty &\leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma\|_W \\
&\overset{\text{Def.}\|\cdot\|_W}{=} (\frac{1}{\alpha}+1)^d \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \|(T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}T_k\chi_Q)(\gamma T_k\chi_Q)\|_\infty \\
&\leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}T_k\chi_Q\|_\infty \|\gamma T_k\chi_Q\|_\infty \\
&\overset{\text{abs. Konv.}}{=} (\frac{1}{\alpha}+1)^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \underbrace{\|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}T_k\chi_Q\|_\infty)}_{=(*)} \|\gamma T_k\chi_Q\|_\infty.
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun $(*)$ ab:

$$\begin{aligned}
\|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}T_k\chi_Q\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |\overline{g}(x-\frac{n}{\beta})T_k\chi_Q(x)| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |\overline{g}(x-\frac{n}{\beta})\chi_{k+Q}(x)| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} |\overline{g}(x)\chi_{k-\frac{n}{\beta}+Q}(x)| \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in k-\frac{n}{\beta}+Q} |g(x)| \\
&\leq \sum_{l\in I_n} \|gT_l\chi_Q\|_\infty
\end{aligned}$$

mit $I_n = \{l \in \mathbb{Z}^d | k - \frac{n}{\beta} + Q \cap l + Q \neq \varnothing\}$.
Somit gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}T_k\chi_Q\|_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\sum_{l\in I_n} \|gT_l\chi_Q\|_\infty \leq (2\beta+2)^d \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \|gT_l\chi_Q\|_\infty = (2\beta+2)^d\|g\|_W,$$

da jedes l in höchstens $(2\beta+2)^d$ der I_n's vorkommt. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty &\leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}T_k\chi_Q\|_\infty)\|\gamma T_k\chi_Q\|_\infty \\ &\leq (\frac{1}{\alpha}+1)^d \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (2\beta+2)^d\|g\|_W\|\gamma T_k\chi_Q\|_\infty \\ &= (\frac{1}{\alpha}+1)^d(2\beta+2)^d\|g\|_W \cdot \|\gamma\|_W.\end{aligned}$$ □

§2 Die Walnut-Darstellung

Nun kommen wir zum zentralen Satz dieses Vortrags - der Walnut-Darstellung von $S_{g,\gamma}$.

(2.1) Satz (Die Walnut-Darstellung)
Seien $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta > 0$. Dann kann der Operator

$$S_{g,\gamma}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma \tag{3}$$

geschrieben werden als

$$S_{g,\gamma}f = \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_nT_{\frac{n}{\beta}}f \tag{4}$$

Außerdem ist $S_{g,\gamma}$ auf allen L^p-Räumen, $1 \leq p \leq \infty$, beschränkt mit der Norm

$$\|S_{g,\gamma}\|_{L^p\to L^p} \leq 2^d(\frac{1}{\alpha}+1)^d(\frac{1}{\beta}+1)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W.$$

Beweis
Wir schreiben $S_{g,\gamma}$ in der Form

$$S_{g,\gamma}f = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle M_{\beta n} T_{\alpha k}\gamma \ .$$

Dies ist möglich, da die Kommutationsrelation $T_{\alpha k}M_{\beta n} = e^{-2\pi i\alpha k\beta n} M_{\beta n}T_{\alpha k}$ gilt. Diese liefert

$$\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma = \underbrace{\overline{e^{-2\pi i\alpha k\beta n}} e^{-2\pi i\alpha k\beta n}}_{=1} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle M_{\beta n} T_{\alpha k}\gamma$$

Es ist aus Korollar 6.2.3 [1] bekannt, dass

$$\begin{aligned} C_{g,\alpha,\beta} : L^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}^{2d}) \\ f &\longmapsto \{\langle f, t_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle | k, n \in \mathbb{Z}^{2d}\} \end{aligned}$$

ein beschränkter Operator ist. Es gilt also

$$\{\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle | k, n \in \mathbb{Z}^{2d}\} \in l^2(\mathbb{Z}^{2d}) \tag{5}$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und die Fourier-Reihe

$$m_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (\widehat{f \cdot T_{\alpha k}\overline{g}})(\beta n) e^{2\pi i\beta n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle e^{2\pi i\beta n x} \tag{6}$$

ist $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d$-periodisch. Sie liegt in $L^2(Q_{1/\beta})$, denn

$$\beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g\rangle|^2 = \|m_k\|^2_{L^2(Q_{1/\beta})} \overset{(5)}{<} \infty. \tag{7}$$

Die Identität in (6) gilt nach Lemma 3.11 [1]. Dieses dürfen wir anwenden, da $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $g \in W(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ nach Kapitel 6.1 [1]. Wir möchten auf $m_k(x)$ die Poisson-Summenformel aus Lemma 1.4.1 [1] anwenden. Nach Kapitel 1.4, Bemerkung 2 und 4 [1] gilt fast überall, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(x+\alpha n) = \alpha^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\tfrac{n}{\alpha}) e^{2\pi i n x/\alpha}$$

falls die linke Seite der Gleichung in $L^2(Q_{1/\beta})$ konvergiert und $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\frac{n}{\alpha})|^2 < \infty$ ist.

Aus Gleichung (6) und (7) folgt, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |(\widehat{f\cdot T_{\alpha k}\overline{g}})(\beta n)|^2 < \infty$ ist. Damit gilt

$$m_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (\widehat{f\cdot T_{\alpha k}\overline{g}})(\beta n) e^{2\pi i \beta n x} = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (f\cdot T_{\alpha k}\overline{g})(x-\frac{n}{\beta}) \quad \text{f.ü.,} \tag{8}$$

falls die rechte Seite in $L^2(Q_{1/\beta})$ konvergiert. Dies gilt bestimmt, wenn f beschränkt ist und kompakten Träger hat, da dann die Summe endlich wird und somit fast überall absolut konvergiert. Diese Darstellung von $m_k(x)$ wollen wir nun nutzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
S_{g,\gamma} f(x) &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle M_{\beta n} T_{\alpha k}\gamma(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle M_{\beta n} T_{\alpha k}\gamma(x) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g\rangle e^{2\pi i \beta n x})\gamma(x-\alpha k) \\
&\overset{(6),(8)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (f\cdot T_{\alpha k}\overline{g})(x-\frac{n}{\beta}))\gamma(x-\alpha k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(x-\frac{n}{\beta})\overline{g}(x-\frac{n}{\beta}-\alpha k))\gamma(x-\alpha k).
\end{aligned}$$

Da f kompakten Träger hat, ist die Summe endlich und die Summationsreihenfolge kann vertauscht werden. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_{g,\gamma} f(x) &= \beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(x-\frac{n}{\beta})\overline{g}(x-\frac{n}{\beta}-\alpha k))\gamma(x-\alpha k) \\
&= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x-\frac{n}{\beta}-\alpha k)\gamma(x-\alpha k)) f(x-\frac{n}{\beta}) \\
&\overset{(1)}{=} \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n(x) T_{\frac{n}{\beta}} f(x).
\end{aligned}$$

Nun schätzen wir noch die p-Norm von $S_{g,\gamma}$ ab.

$$\begin{aligned}
\|S_{g,\gamma}f\|_p &\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n T_{\frac{n}{\beta}}f\|_p && (9)\\
&\leq \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty\|T_{\frac{n}{\beta}}f\|_p = \beta^{-d}(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty)\|f\|_p && (10)\\
&\overset{(2)}{\leq} \beta^{-d}(\frac{1}{\alpha}+1)^d(2\beta+2)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W\|f\|_p && (11)\\
&= 2^d(\frac{1}{\alpha}+1)^d(\frac{1}{\beta}+1)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W\|f\|_p. && (12)
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\|S_{g,\gamma}\|_{L^p\to L^p} = \sup_{\|f\|\neq 0}\frac{\|S_{g,\gamma}f\|_p}{\|f\|_p} \leq 2^d(\frac{1}{\alpha}+1)^d(\frac{1}{\beta}+1)^d\|g\|_W\|\gamma\|_W. \tag{13}$$

Somit ist die Darstellung für beschränkte Funktionen mit kompaktem Träger gezeigt. Da diese eine dichte Teilmenge jedes L^p-Raumes sind, folgt die Behauptung aufgrund der Eindeutigkeit der Abschließung (z.B [2] Satz 1.4.7). □

(2.2) Bemerkung
Wir betrachten die Abschätzung von $\|S_{g,\gamma}\|$ noch einmal im Bezug auf die geforderten Eigenschaften an den Banachraum B auf dem S operiert. In **(10)** nutzen wir, dass aus $|\|G_n\|_\infty T_{\frac{n}{\beta}}f| \geq |G_n T_{\frac{n}{\beta}}f|$ für fast alle $x\in\mathbb{R}^d$ folgt, dass $\|G_n\|_\infty\|T_{\frac{n}{\beta}}f\|_B \geq \|G_n T_{\frac{n}{\beta}}f\|_B$, oder allgemeiner

$$|g(x)| \leq |f(x)\ f.ü. \quad\Longrightarrow\quad \|g\|_B \leq \|f\|_B \tag{14}$$

und, dass sowohl der Banachraum B als auch die Norm invariant unter Translation sind, das heißt

$$f\in B \implies T_xf\in B \text{ und } \|f\|_B = \|T_xf\|_B \text{ für fast alle } x\in\mathbb{R}^d. \tag{15}$$

Außerdem verwenden wir noch, dass die beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger eine dichte Teilmenge von B sind.
Wir können also schlussfolgern, dass die Walnut-Darstellung nicht nur auf allen L^p-Räumen ein beschränkter Operator ist, sondern sogar auf allen Banachräumen, die obige Eigenschaften erfüllen. ◇

Wir betrachten nun die Sesquilinearform

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{C}\,, \\ (f,h) &\longmapsto \langle S_{g,\gamma} f, h\rangle. \end{aligned}$$

Wir können $\langle S_{g,\gamma} f, h\rangle$ aus den Folgen $\{T_{\frac{j}{\beta}} f(x) | j \in \mathbb{Z}^d\}$ und $\{T_{\frac{j}{\beta}} f(x) | j \in \mathbb{Z}^d\}$ erhalten, wie wir im folgenden Korollar sehen werden. Wir erhalten also eine Matrixdarstellung von $\langle S_{g,\gamma} f, h\rangle$. Definiere dazu für $j, l \in \mathbb{Z}^d$

$$G_{jl}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{l}{\beta} - \alpha k)\gamma(x - \frac{j}{\beta} - \alpha k). \tag{16}$$

Offensichtlich gilt $G_n(x) = G_{0,n}(x)$ und $G_n(x - \frac{j}{\beta}) = G_{j,j+n}(x)$.

(2.3) Korollar
Seien $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta < 0$ dann gilt

$$\langle S_{g,\gamma} f, h\rangle = \sum_{j,l \in \mathbb{Z}^d} \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} h(x)} dx \tag{17}$$

für alle $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Beweis
Wir zeigen die Behauptung zuerst für beschränkte Abbildungen mit kompaktem Träger und dann für Abbildungen aus $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Schritt 1
Seien f, h beschränkt mit kompaktem Träger, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle S_{g,\gamma} f, h\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} S_{g,\gamma} f(x) \overline{h(x)} dx \\ &\overset{(4)}{=} \beta^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n(x) T_{\frac{n}{\beta}} f(x)) \overline{h(x)} dx \\ &= \beta^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n(x) f(x - \frac{n}{\beta})) \overline{h(x)} dx \\ &= \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n(x - \frac{j}{\beta}) f(x - \frac{n+j}{\beta})) \overline{h(x - \frac{j}{\beta})} dx. \end{aligned}$$

Wobei wir in der letzten Umformung den Periodisierungstrick aus Lemma 1.4.1 [1] mit Periode $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d$ angewandt haben.

Da f und h kompakten Träger haben, gibt es nur endlich viele $n, j \in \mathbb{Z}^d$ für die $f(x - \frac{n+j}{\beta})$ und $\overline{h(x - \frac{j}{\beta})}$ auf $Q_{1/\beta}$ nicht verschwinden. Somit ist die Doppelsumme endlich, Summation und Integration können beliebig vertauscht werden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\langle S_{g,\gamma} f, h \rangle &= \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} \sum_{n,j \in \mathbb{Z}^d} G_n(x - \frac{j}{\beta}) f(x - \frac{n+j}{\beta}) \overline{h(x - \frac{j}{\beta})} dx \\
&= \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} \sum_{n,j \in \mathbb{Z}^d} G_{j,j+n}(x) T_{\frac{n+j}{\beta}} f(x) T_{\frac{j}{\beta}} \overline{h(x)} dx \\
&= \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} \sum_{l,j \in \mathbb{Z}^d} G_{j,l}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) T_{\frac{j}{\beta}} \overline{h(x)} dx.
\end{aligned}$$

Wobei wir zuerst die Identität $G_n(x - \frac{j}{\beta}) = G_{j,j+n}(x)$ verwendet und dann l für $j+n$ substituiert haben.

Schritt 2

Seien nun $f, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Wir definieren für $x \in \mathbb{R}^d$ und $c = (c_l)_{l \in \mathbb{Z}^d}$ den Operator $G(x)$ durch die Matrixmultiplikation

$$(G(x)c)_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} G_{jl}(x) c_l \ .$$

Mittels des Schur-Tests lässt sich feststellen, ob $G(x)$ ein beschränkter Operator ist. Wir überprüfen also die Bedingungen.

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |G_{jl}(x)| &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} | \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{l}{\beta} - \alpha k) \gamma(x - \frac{j}{\beta} - \alpha k)| \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\overline{g}(x - \frac{l}{\beta} - \alpha k)| |\gamma(x - \frac{j}{\beta} - \alpha k)| \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \underbrace{(\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |\overline{g}(x - \frac{l}{\beta} - \alpha k)|)}_{\overset{([1]\text{Lemma 6.1.2})}{\leq} (\beta+1)^d \|g\|_W \text{ f.ü.}} |\gamma(x - \frac{j}{\beta} - \alpha k)| \\
&\leq (\beta+1)^d \|g\|_W \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\gamma(x - \frac{j}{\beta} - \alpha k)| \\
&\overset{([1]\text{Lemma 6.1.2})}{\leq} (\beta+1)^d \|g\|_W \cdot (\frac{1}{\alpha} + 1)^d \|\gamma\|_W < \infty.
\end{aligned}$$

Somit war die Umordnung bei $(*)$ zulässig und die erste Schur-Bedingung ist erfüllt. Analog gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |G_{jl}(x)| &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)\gamma(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k)| \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\gamma(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)||\gamma(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k)| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \underbrace{(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)|)}_{\overset{([1]\text{Lemma 6.1.2})}{\leq} (\beta+1)^d\|\gamma\|_W \text{ f.ü.}} |\overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)| \\
&\leq (\beta+1)^d\|g\|_W \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\gamma(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k)| \\
&\overset{([1]\text{Lemma 6.1.2})}{\leq} (\beta+1)^d\|\gamma\|_W\cdot(\frac{1}{\alpha}+1)^d\|g\|_W.
\end{aligned}$$

Somit ist nach Lemma 6.2.1 [1] $G(x)$ für fast alle $x\in\mathbb{R}^d$ ein beschränkter Operator auf $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ für $1\leq p\leq\infty$. Falls $f,h\in L^2(\mathbb{R}^d)$ sind, so sind für fast alle $x\in\mathbb{R}^d$, $\beta>0$ die Folgen $\{f(x-\frac{l}{\beta})|l\in\mathbb{Z}^d\}$ und $\{h(x-\frac{l}{\beta})|l\in\mathbb{Z}^d\}$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, da

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} |f(x-\frac{l}{\beta})|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dt = \|f\|_2^2$$

. □

(2.4) Bemerkung
Betrachten wir nun den Fall $g=\gamma$, so ist $G(x)$ ein positiver Operator auf $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, denn es gilt für alle $c\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ und fast alle $x\in\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\langle G(x)c,c\rangle &= \sum_{j,l\in\mathbb{Z}^d} G_{jl}(x)c_l\cdot\overline{c_j} \\
&= \sum_{j,l\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)g(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k)c_l\overline{c_j} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^d} c_l\overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)\overline{c_j}g(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} c_l\overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)\overline{\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} c_j\overline{g}(x-\frac{j}{\beta}-\alpha k)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\sum_{l\in\mathbb{Z}^d} c_l\overline{g}(x-\frac{l}{\beta}-\alpha k)|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$
◇

Sind A und B beschränkte, positive Operatoren - diese Eigenschaft ist auf einem komplexen Hilbertraum gleichbedeutend mit der Selbstadjungiertheit von A und B - so ist das innere Produkt $\langle Ac, c\rangle$ stehts reell. Dies liefert folgende Ordnung für positive beschränkte Operatoren

$$A \geq B \Longleftrightarrow \langle Ac, c\rangle \geq \langle Bc, c\rangle \text{ für alle } c$$

Jetzt nutzen wir diese Ordnung und die Matrixdarstellung des Gabor-Frame-Operators um von Eigenschaften des Operators $G(x)$ auf die Invertierbarkeit und Beschränktheit von $S_{g,g}$ zu schließen. Äquivalente Bedingungen hierfür liefert die folgende

(2.5) Proposition (Ron-Shen)
Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta > 0$, dann gilt:

(a) $S_{g,g}$ ist ein beschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$
$\Longleftrightarrow G(x) \leq a \cdot I_{\ell^2}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und ein festes $a > 0$.

(b) $S_{g,g}$ ist invertierbar auf $L^2(\mathbb{R}^d)$
$\Longleftrightarrow G(x) \geq b \cdot I_{\ell^2}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und ein festes $b > 0$.

Beweis
Zu (a):
"$\Leftarrow$": Sei $G(x) \leq a \cdot I_{\ell^2}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, ein $a > 0$ und sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Wir definieren nun für $x \in Q_{1/\beta}$ die Folge

$$f^x := \{T_{\frac{j}{\beta}} f(x) | j \in \mathbb{Z}^d\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\langle G(x) f^x, f^x\rangle \leq \langle a \cdot f^x, f^x\rangle = a\langle f^x, f^x\rangle \\ \Longleftrightarrow &\sum_{j,l \in \mathbb{Z}^d} G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} f(x)} \leq a \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |T_{\frac{l}{\beta}} f(x)|^2. \end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{j,l \in \mathbb{Z}^d} G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} f(x)}$ und $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}^d} |T_{\frac{l}{\beta}} f(x)|^2$ in $L^2(Q_{1/\beta})$ liegen und die Ungleichung für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt, können wir über $Q_{1/\beta}$ integrieren und erhalten

$$\int\limits_{Q_{1/\beta}} (\sum_{j,l \in \mathbb{Z}^d} G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} f(x)}) dx \leq \int\limits_{Q_{1/\beta}} (a \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |T_{\frac{l}{\beta}} f(x)|^2) dx.$$

Da beide Summen endlich sind, können Summation und Integration beliebig vertauscht werden. Außerdem können wir den Periodisierungstrick mit der Periode $\frac{1}{\beta}\mathbb{Z}^d$ auf $\int_{Q_{1/\beta}}(a \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{\frac{l}{\beta}} f(x)|^2)dx$ anwenden. Dies liefert:

$$\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} (G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} f(x)})dx \leq a \cdot \int\limits_{Q_{1/\beta}} (\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |T_{\frac{l}{\beta}} f(x)|^2)dx = a \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

$$\iff \quad \beta^{-d} \sum_{j,l\in\mathbb{Z}^d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} (G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} f(x)})dx \leq \beta^{-d} a \|f\|_2^2.$$

Wobei die linke Seite nach Korollar (2.2) gerade $\langle S_{g,g} f, f\rangle$ ist. Da die beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger eine dichte Teilmenge von $L^2(\mathbb{R}^d)$ sind, gilt die Ungleichung auch dort und wir können folgern:

$$\langle S_{g,g} f, f\rangle \leq \beta^{-d} a \|f\|_2^2 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Insbesondere gilt also für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f\| = 1$

$$\langle S_{g,g} f, f\rangle \leq \beta^{-d} a$$

und wir erhalten für die Norm von $S_{g,g}$

$$\|S_{g,g}\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle S_{g,g} f, f\rangle| \leq a\beta^{-d} > 0.$$

Also ist $S_{g,g}$ beschränkt.

"$\Rightarrow$":
Sei nun $S_{g,g} =: S$ beschränkt.
Dann existiert ein festes $B > 0$, so dass für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|Sf\| =\leq B\|f\|.$$

Da S ein positiver, selbstadjungierter Operator ist, gilt für seine Norm

$$\|S\|_{L^2\to L^2} = \sup_{\|f\|=1} \langle Sf, f\rangle \leq B.$$

Damit gilt für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{\langle Sf, f\rangle}{\|f\|^2} = \langle S\frac{f}{\|f\|}, \frac{f}{\|f\|}\rangle \leq B.$$

Die Folge f^x liegt auch für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Dies haben wir bereits im Beweis zu Korollar (2.3) gezeigt. Mit dieser Notation und Korollar (2.3) erhalten wir für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &\overset{\textbf{(2.3)}}{=} \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} \sum_{l,j \in \mathbb{Z}^d} G_{j,l}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) T_{\frac{j}{\beta}} \overline{f(x)} dx \\ &\overset{\text{Def. } G(x)}{=} \beta^{-d} \int\limits_{Q_{1/\beta}} \langle G(x) f^x, f^x \rangle dx. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun folgende Aussagen für alle $x \in Q_{1/\beta}$:

(1) Die für $x \in Q_{1/\beta}$ definierte Abbildung

$$L(x) := \sup_{c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|c\|=1} \langle G(x)c, c \rangle$$

ist messbar.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, das die Gleichung

$$\frac{\langle G(x)h^x, h^x \rangle}{\|h^x\|} > L(x) - \varepsilon$$

erfüllt.

(3) Aus $\langle Sf, f \rangle \leq B\|f\|^2$ für ein festes B und alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ folgt für fast alle $x \in Q_{1/\beta}$ und alle $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, dass

$$L(x) \leq a \text{ für ein festes } a \text{ mit } a \geq \beta^d B > 0.$$

Denn dann gilt für alle Folgen $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, dass

$$\begin{aligned} \langle G(x)c, c \rangle &= \|c\|^2 \langle \frac{c}{\|c\|}, \frac{c}{\|c\|} \rangle \\ &\leq \|c\|^2 \underbrace{\sup_{\tilde{c} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\tilde{c}\|=1} \langle G(x)\tilde{c}, \tilde{c} \rangle}_{=L(x)} \\ &\overset{(3)}{\leq} \|c\|^2 a = a\langle c, c \rangle = \langle aI_{\ell^2} c, c \rangle \end{aligned}$$

Also gilt die Ungleichung fast überall für ein $a > 0$.

Zu (1):
Wir definieren zuerst die Menge $P \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ als

$$P = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n \chi_{Q_{1/\beta}} T_{\frac{n}{\beta}} \text{ mit } \mathrm{Re}(a_n), \mathrm{Im}(a_n) \in \mathbb{Q}\}.$$

P ist abzählbar, da auch $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und die Menge

$$M := \{f^x | f \in P\}$$

liegt dicht in $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, denn die Menge $\{(e_{k,n})_{n\in\mathbb{Z}^d} | k \in \mathbb{Z}^d\}$, wobei die $e_{k,n}$ wie folgt definiert sind

$$e_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein vollständiges Orthonormalsysten von $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ und jede Linearkombination dieser $e_{k,m}$ mit Koeffizienten mit rationalem Real- und Imaginärteil liegt in P, denn

$$(e_{k,n})_{n\in\mathbb{Z}^d} = (\chi_{Q_{1/\beta}} T_{\frac{k}{\beta}})^x \text{ für alle } x \in Q_{1/\beta}\ ,\ k \in \mathbb{Z}^d$$

Somit gilt für alle $x \in Q_{1/\beta}$

$$L(x) = \sup_{\|c\|=1} \langle G(x)c, c\rangle = \sup_{f \in P\setminus\{0\}} \frac{\langle G(x)f^x, f^x\rangle}{\|f^x\|^2}.$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von P, dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$L_k(x) := \max\left\{ \frac{\langle G(x)f_n^x, f_n^x\rangle}{\|f_n^x\|^2} \quad | \quad n \le k \right\}$$

eine Treppenfunktion, da $L_k(x)$ höchstens k unterschiedliche Werte annimmt. Außerdem gilt offensichtlich $L_k(x) \le L_{k+1}(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in Q_{1/\beta}$.
Da $L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x)$ für alle $x \in Q_{1/\beta}$ gilt, können wir folgern, dass $L(x)$ messbar ist (z.B. [3] Satz 6.8).

Zu (2):
Zu einem festen $\varepsilon > 0$ definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$B_n := \left\{ x \in Q_{1/\beta} \mid \frac{\langle G(x)f_n^x, f_n^x\rangle}{\|f_n^x\|^2} > L(x) - \varepsilon \right\}$$

sowie $A_n := B_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k$ für $n > 1$ und $A_1 := B_1$.
Nach Konstruktion sind die A_n paarweise disjunkt und da

$$L(x) = \sup_{f \in P \setminus \{0\}} \frac{\langle G(x) f^x, f^x \rangle}{\|f^x\|^2}$$

gilt, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in Q_{1/\beta}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{\langle G(x) f_n^x, f_n^x \rangle}{\|f_n^x\|^2} > L(x) - \varepsilon.$$

Wir können also schließen, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = Q_{1/\beta}$.
Nun definieren wir die Abbildung $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ durch $h^x = f_n^x$ für $x \in A_n$. Diese ist wohldefiniert, da $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Überdeckung von $Q_{1/\beta}$ ist sowie h messbar ist, da alle f_n messbare Funktionen und alle A_n messbare Mengen sind. Nach Konstruktion hat h genau die geforderten Eigenschaften.

Zu (3):
Angenommen es gibt eine Menge $C \subset Q_{1/\beta}$ mit positivem Maß auf der die Ungleichung $L(x) \leq a$ nicht gilt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $L(x) - \varepsilon > a$ für alle $x \in C$. Sei h definiert wie in (2) und

$$f^x := \begin{cases} h^x & \text{falls } x \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so folgt für alle x mit $f^x \neq 0$, dass

$$\langle G(x) f^x, f^x \rangle > a \|f^x\|$$

und es gilt

$$\begin{aligned} B\|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle &= \beta^{-d} \int_{Q_{1/\beta}} \langle G(x) f^x, f^x \rangle dx \\ &> \beta^{-d} \int_{Q_{1/\beta}} a \|f^x\|^2 dx \\ &\overset{\text{Per.trick}}{=} \beta^{-d} \|f\|^2 \overset{a \geq \beta^d B}{\geq} B\|f\|^2. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch und somit gilt (3) und damit auch die Behauptung.

Zu (b):
Die Argumentation verläuft hier sehr ähnlich zu **(a)**. Es gelte $G(x) \geq bI_{\ell^2}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und ein $b > 0$. Dann gilt analog zu **(a)** für jedes beschränkte f mit kompaktem Träger und fast alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l \in \mathbb{Z}^d} G_{jl}(x) T_{\frac{l}{\beta}} f(x) \overline{T_{\frac{j}{\beta}} f(x)} \geq b \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |T_{\frac{l}{\beta}} f(x)|^2 \\ \implies \quad & \langle Sf, f \rangle \geq \beta^{-d} b \|f\|_2^2 \qquad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^d) \\ \implies \quad & \|S\| \geq b\beta^{-d} \end{aligned}$$

Also ist S invertierbar. Ist andererseits S nach Voraussetzung invertierbar, so zeigt man analog zu **(a)** die folgenden Aussagen:

(1) Die Abbildung H, die für $x \in Q_{1/\beta}$ definiert ist durch

$$H(x) := \inf_{\|c\|=1} \langle G(x)c, c \rangle$$

ist messbar.

(2) Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, dass die Gleichung

$$\frac{\langle G(x)h^x, h^x \rangle}{\|h^x\|} < H(x) + \varepsilon$$

erfüllt.

(3) Aus $\langle Sf, f \rangle \geq D\|f\|^2$ für ein festes D und alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ folgt für fast alle $x \in Q_{1/\beta}$ und alle $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, dass

$$H(x) \geq b \text{ für ein festes } b \text{ mit } b \leq \beta^d D.$$

Also gilt dann die Ungleichung $G(x) \geq bI_{\ell^2}$ fast überall für ein festes $b > 0$. □

Literaturverzeichnis

[1] *Foundation of Time-Frequency Analysis* von *Karlheinz Gröchenig*

[2] Vorlesungsmitschrift der Vorlesung *Funktionalanalysis* im Wintersemester 2010/2011 von *PD Dr. Alfred Wagner*

[3] *Analysis III* von *Aloys Krieg* und *Sebastian Walcher*