Existenz von Gabor-Frames

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 23.03.2011

Laura Neisius

In diesem Kapitel werden wir die Existenz von Gabor-Frames näher untersuchen. Hierzu werden wir betrachten, wann eine Fensterfunktion g einen Gabor-Frame erzeugt und wie dementsprechend die Parameter α und β gewählt werden müssen.

§1 Einfache nicht-orthogonale Entwicklungen

In diesem Abschnitt werden wir einige einfache Beispiele für Gabor-Frames konstruieren. Dabei wird uns die Walnut-Darstellung des Gabor-Frame Operators unterstützen, welche wir in diesen speziellen Fällen noch weiter vereinfachen können. Da die im Folgenden vorgestellten Gabor-Frames sehr einfach zu handhaben sind, werden sie auch *einfache nicht-orthogonale Entwicklungen* genannt.

(1.1) Satz
Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit einem Träger in $Q_L = [0, L]^d$. Wenn $\alpha \leq L$ und $\beta \leq \frac{1}{L}$, dann ist der Frame-Operator $S = S_{g,g}$ der Multiplikationsoperator

$$Sf(x) = (\beta^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2) f(x)$$

Weiterhin ist $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame mit Frame-Schranken $\beta^{-d}a$ und $\beta^{-d}b$ genau dann, wenn

$$a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} | g(x - \alpha k) |^2 \leq b \qquad f.ü.. \tag{1}$$

gilt. Weiterhin ist $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ genau dann ein starres Frame, wenn $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2$ fast überall konstant ist. $\diamond$

Beweis
Die Funktion g ist nach Voraussetzung aus $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nun wissen wir aus ([1] Def. (6.1.1)), dass g zum Wiener-Raum gehört, wenn

$$\|g\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in Q} |g(x + n)| < \infty \qquad \text{mit } Q = Q_1 = [0, 1]^d$$

Da der Träger von g nach Voraussetzung in Q_L liegt, gibt es nur endliche viele $n \in \mathbb{Z}^d$, für die $g(x+n) \neq 0$ gilt. Damit stellt $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{ess\,sup}_{x\in Q} |g(x+n)|$ eine endliche Summe dar und da weiterhin $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, gilt somit auch

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \operatorname{ess\,sup}_{x\in Q} |g(x+n)| < \infty \qquad \text{mit } Q = Q_1 = [0,1]^d \ .$$

Damit folgt aus der Definition des Wiener-Raums, dass $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und wir können die Walnut-Darstellung des Frame-Operators betrachten, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S_{g,g}f(x) &= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n(x) \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f(x) \\ &= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k) g(x-\alpha k) \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f(x) \\ &= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g}(x-\alpha k) g(x-\alpha k) \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f(x) \\ &= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g(x)} \cdot g(x)) \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f(x) \ . \end{aligned}$$

Per Annahme liegt der Träger von g in Q_L. Folglich ist $\operatorname{supp} T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \subseteq (\frac{n}{\beta} + [0,L]^d)$. Gilt nun $n \neq 0$, so folgt

(i) für $\beta < \frac{1}{L}$: $\operatorname{supp} T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \cdot g = \emptyset$, und

(ii) für $\beta = \frac{1}{L}$: $\operatorname{supp} T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \cdot g \subseteq ((L + [0,L]^d) \cap [0,L]^d)$.
Da sich die Mengen $(L + [0,L])^d$ und $[0,L]^d$ nur auf dem Rand schneiden, hat die Menge $((L + [0,L]^d) \cap [0,L]^d)$ Maß 0.

Mit (i) und (ii) ergibt sich nun, dass für $n \neq 0$

$$G_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \cdot g) = 0 \qquad f.\ddot{u}.$$

und damit lässt sich der Gabor-Frame-Operator nun vereinfachen zu dem Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} S_{g,g}f(x) &= \beta^{-d} G_0(x) \cdot f(x) \\ &= \beta^{-d} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x-\alpha k) g(x-\alpha k)) \cdot f(x) \\ &= \beta^{-d} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Nun wird deutlich, dass $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ genau dann ein Frame und S genau dann invertierbar und beschränkt ist, wenn (1) gilt. Die Frame-Schranken ergeben sich durch folgende Betrachtung:

$$\langle Sf,f\rangle = \langle \beta^{-d}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|g(x-\alpha k)|^2)f,f\rangle = \beta^{-d}\langle(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|g(x-\alpha k)|^2)f,f\rangle$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \beta^{-d}a\langle f,f\rangle \leq \langle Sf,f\rangle \leq \beta^{-d}b\langle f,f\rangle$$

Zu zeigen ist also noch, dass $\mathcal{G}$ genau dann ein starres Frame darstellt, wenn G_0 konstant ist. Dies geht allerdings direkt aus obiger Betrachtung der Frame-Schranken hervor. □

(1.2) Bemerkung

(1) In Satz (1.1) werden die optimalen Frame-Schranken gegeben durch
$A_{\text{opt}} = \beta^{-d}\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|g(x-\alpha k)|^2$ und $B_{\text{opt}} = \beta^{-d}\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|g(x-\alpha k)|^2$

(2) Auch die duale Fensterfunktion $\gamma = S^{-1}g$ lässt sich sehr einfach berechnen, und zwar mit $\gamma(x) = \beta^d G_0^{-1}g(x)$. Der Träger von γ liegt wiederum in Q_L und γ ist genauso glatt wie g. ◇

(1.3) Beispiele

(1) Sei nun $\alpha = L$ und $\operatorname{supp} g = Q_L = [0,L]^d$. Weiterhin soll (1) gelten, d.h.

$$a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\, g(x-\alpha k)\,|^2 \leq b \qquad f.ü.$$

Dann gilt für $x \in Q_L$: $\sqrt{a} \leq |g(x)| \leq \sqrt{b}$ und g ist nicht stetig.

(2) Betrachte $g = \chi_{Q_L}$ und $\alpha = L$. Wieder gelte die Ungleichung (1). Dann folgt mit Satz (1.1), dass $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ein starres Frame ist mit $A = B = \beta^{-1}$ für $\beta \leq \frac{1}{L}$.

(3) Mit der Normierung $g = L^{-\frac{d}{2}}\chi_{Q_L}$ ist das Gabor-System $G(g,L,\frac{1}{L})$ sogar eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R}^d)$. ◇

Beweis

(1) Ist $\operatorname{supp} g = [0,L]^d$, dann ist $\operatorname{supp} g(x-Lk) = Lk + [0,L]^d$. Wählt man nun $x \in Q_L$, so gilt für $k \neq 0$, dass $g(x-Lk) = 0 \quad f.ü.$ Daher betrachten wir nur den Fall $k = 0$, d.h. mit (1) gilt

$$a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\, g(x-Lk)\,|^2 \leq b \qquad f.ü. \quad \overset{a,b\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{a} \leq |g(x)| \leq \sqrt{b} \qquad f.ü.$$

Weiterhin ist g auf keinen Fall stetig, da supp$g = [0, L]^d$ und $a \leq |g(x)|^2 \leq b$.

(2) Da dies einen Spezialfall von Beispiel (1.3)(1) darstellt, gilt $a \leq |g(x)|^2 \leq b$ mit $a = b = 1$, was wiederum mit Satz (1.1) impliziert, dass $A = B = \beta^{-d}$ für $\beta \leq \frac{1}{L}$.

(3) Der Träger von g ist gerade Q_L und es gilt für $\alpha = L$ und $\beta = \frac{1}{L}$:
$|g(x)| = L^{-d/2}$ für $x \in Q_L \Rightarrow |g(x)|^2 = L^{-d} = a = b \overset{A=B=\beta^{-d}a}{\underset{\beta=\frac{1}{L}}{\Rightarrow}} A = L^d \cdot L^{-d} = 1$
also erhalten wir ein starres Frame mit $A = B = 1$.
Nach ([1] Lemma (5.1.6)) bleibt nun noch zu zeigen, dass $\|L^{-d/2}\chi_{Q_L}\|_2 = 1$, damit dass System $\mathcal{G}$ eine Orthonormalbasis im L^2 darstellt. Dazu:

$$\begin{aligned}\|L^{-d/2}\chi_{Q_L}\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |L^{-d/2}\chi_{Q_L}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = L^{-d/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{Q_L}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= L^{-d/2}\left(\int_{Q_L} 1\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = L^{-d/2} \cdot L^{d/2} = 1\end{aligned}$$ □

Wie wir gesehen haben, ist es nicht weiter schwierig ein Gabor-System zu konsturieren, welches bereits eine Orthonormalbasis darstellt. Leider erreichen wir mit diesen Basiselementen nicht die gewünschte Genauigkeit in der Zeit-Frequenz-Analyse. Auch die Lokalisierbarkeit im Frequenzraum geht bei einer Treppenfunktion als Fensterfunktion verloren.

Nach sorgfältiger Betrachtung der Frame-Theorie stellt sich heraus, dass die Redundanz des Gabor-Systems sowie die Stetigkeit der zugehörigen Fensterfunktion notwendig ist, um eben die gewünschten Ergebnisse zu erhalten.

§2 Existenz von Gabor-Frames

Wir sind nun in der Lage für jede durchdacht gewählte Funktion g zu zeigen, dass sie für bestimmte Werte α und β einen Gabor-Frame erzeugt.
Eine Aussage, die ein zenrales Ergebnis der Untersuchung von Gabor-Frames ist, lässt sich wie folgt formulieren:

Wenn $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und α sowie β klein genug sind mit $\alpha, \beta > 0$, dann stellt $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ einen Frame für $L^2(\mathbb{R}^d)$ dar.

Um diese Aussage zu präzisieren, möchten wir im folgenden Kapitel wiederum den Frame-Operator $S_{g,g}$ und dessen Eigenschaften untersuchen. Wir erwarten, dass uns die Walnut-Darstellung des Frame-Operators mit den zugehörigen Korrelationsfunktionen

$$G_n(x) = G_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \tfrac{n}{\beta} - \alpha k) g(x - \alpha k)$$

die Suche nach geeigneten α und β erleichtern wird. Dabei legen wir ein besonderes Augenmerk auf die Invertierbarkeit von $S_{g,g}$, da diese zusammen mit dem Wissen, dass der Frame-Operator für eine Funktion $g \in W(\mathbb{R}^d)$ bereits beschränkt ist, impliziert, dass das System $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ einen Frame darstellt.

(2.1) Satz (WALNUT)
Seien $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha > 0$ so gewählt, dass für Konstanten $a, b > 0$ gilt

$$a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} | g(x - \alpha k) |^2 \leq b < \infty \qquad f.ü. \tag{2}$$

Dann existiert ein Wert $\beta_0 = \beta_0(\alpha) > 0$, sodass $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ einen Gabor-Frame für alle $\beta \leq \beta_0$ darstellt. Ist im Speziellen β_0 so gewählt, dass

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta_0)}\|_\infty < \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)| \tag{3}$$

gilt, dann ist $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame für alle $\beta \leq \beta_0$ mit Frame-Schranken

$$A = \beta^{-d} \left(a - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty \right) \qquad \text{und} \qquad B = \beta^{-d} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty \right) . \tag{4}$$

$\diamond$

Für den Beweis benötigen wir folgenden

(2.2) Hilfssatz

Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\lim_{\beta \to 0} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty = 0 \,. \qquad \diamond$$

Beweis

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Dann können wir eine endliche Menge $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ so wählen, dass

$$(*) \qquad \sum_{k \notin F} \|g \cdot T_k \chi_Q\|_\infty = \sum_{k \notin F} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in Q} |g(x+k)| < \varepsilon \quad \text{mit } Q = Q_1 = [0,1]^d \,.$$

Wäre dem nicht so, dann müsste gelten:

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ sodass } \forall F \subseteq \mathbb{Z}^d \text{ endlich} : \sum_{k \notin F} \|g \cdot T_k \chi_Q\|_\infty \geq \varepsilon \,.$$

Nun wollen wir eine Abzählung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^d$ betrachten. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind $F_n = \{\varphi(i) \mid i \in \underline{n}\}$ endliche Teilmengen von $\mathbb{Z}^d$. Dann gilt:

$$\sum_{k \notin F_n} \|g \cdot T_k \chi_Q\|_\infty \overset{\text{abs.Konv.}}{=} \|g\|_W - \sum_{i=1}^{n} \|g \cdot T_{\varphi(i)} \chi_Q\|_\infty \geq \varepsilon \,.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\sum_{i=1}^{n} \|g \cdot T_{\varphi(i)} \chi_Q\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \|g\|_W$, da $\|g\|_W$ absolut konvergiert.

(ii) Setze nun $g = g_1 + g_2$ mit $g_1 = \sum_{k \in F} g \cdot T_k \chi_Q$ und $g_2 = \sum_{k \notin F} g \cdot T_k \chi_Q$.

Da $\|g_2\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left\| \left(\sum_{k \notin F} g \cdot T_k \chi_Q \right) T_n \chi_Q \right\|_\infty$ nur Werte ungleich Null annimmt für $n \notin F$ und $k = n$, gilt $\|g_2\|_W = \sum_{n \notin F} \|g \cdot T_n \chi_Q\|_\infty \overset{(*)}{<} \varepsilon$ und mit analoger Argumentation ist $\|g_1\|_W \leq \|g\|_W$.

Machen wir uns nun die Zerlegung $g = g_1 + g_2$ zu Nutze, so lässt sich jedes G_n schreiben als $G_n = H_n + K_n + L_n$ mit

$$\begin{aligned}
G_n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \cdot g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{\frac{n}{\beta}} (\overline{g_1 + g_2}) \cdot (g_1 + g_2)) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g_1} \cdot g_1 + T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g_1} \cdot g_2 + T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g_2} \cdot g_1 + T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g_2} \cdot g_2) \\
&= \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_{\alpha k} \left(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g}_1 \cdot g_1 \right)}_{=:H_n} + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_{\alpha k} \left(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g}_2 \cdot g_1 \right)}_{=:K_n} + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_{\alpha k} \left(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g} \cdot g_2 \right)}_{=:L_n} = H_n + K_n + L_n \,.
\end{aligned}$$

da ([1] Lemma (6.3.1)) besagt, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty < \infty$ und folglich G_n für jedes $n \in \mathbb{Z}^d$ konvergiert.

(iii) Mit $g_1 = \sum_{k\in F} g \cdot T_k\chi_Q$ folgt $\operatorname{supp} g_1 \subseteq \bigcup_{k\in F} k + [0,1]^d$.
Wir betrachten nun die Träger von g_1 und $T_{\frac{n}{\beta}} g_1$ und überlegen, wie β gewählt werden muss, damit die Träger sich fast überall nicht mehr überlappen.

Für H_n ergibt sich dann für $\beta < (\operatorname{diam} F + \sqrt{d})^{-1}$ und für alle $n \neq 0$

$$H_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k} \left(T_{\frac{n}{\beta}} \overline{g_1} g_1\right)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g_1}(x - \tfrac{n}{\beta} - \alpha k) g_1(x - \alpha k) = 0 \quad f.ü. .$$

(iv) Mit (i) - (iii) erhalten wir also für $\beta < (\operatorname{diam} F + \sqrt{d})^{-1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^d\\ n\neq 0}} \|G_n\|_\infty &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^d\\ n\neq 0}} \|H_n + K_n + L_n\|_\infty \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|K_n\|_\infty + \|L_n\|_\infty \\
&\overset{\text{[1] Lemma (6.3.1)}}{\leq} (\frac{1}{\alpha} + 1)^d (2\beta + 2)^d (\underbrace{\|g_2\|_W}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|g_1\|_W}_{\leq \|g\|_W} + \|g\|_W \cdot \underbrace{\|g_2\|_W}_{<\varepsilon}) \\
&< 2(\frac{1}{\alpha} + 1)^d (2\beta + 2)^d \|g\|_W \cdot \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die Abhängigkeit von ε, β und F untersuchen. Wählen wir zu Beginn ε sehr klein, so muss F recht groß werden, falls wir annehmen, dass g keinen endlichen Träger besitzt. Dadurch würde β ebenfalls sehr klein. Betrachten wir nun den Fall $\beta \to 0$, so ist offensichtlich, dass ε beliebig klein gewählt werden kann und F sich dementsprechend $\mathbb{Z}^d$ annähert.

Besitzt g endlichen Träger, so vereinfacht sich unsere Überlegung in dem Maße, dass ein F_0 existiert, sodass für alle $F \supseteq F_0$ bereits $\sum_{k\notin F} \|g \cdot T_k\chi_Q\|_\infty = 0 < \varepsilon$ gilt.
In diesem Fall können wir ε also beliebig klein wählen ohne Auswirkungen auf β.

Damit folgt die Behauptung. □

Jetzt sind wir in der Lage Satz (2.1) zu beweisen.

Beweis (Satz (2.1))
Nach Voraussetzung gilt $a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mid g(x-\alpha k) \mid^2 \leq b < \infty \quad f.ü.$ und nach dem Hilfssatz (2.2) existiert ein $\beta_0 > 0$, sodass für $\beta \leq \beta_0$

$$\sum_{n\neq 0} \|G_n^{\alpha,\beta}\|_\infty < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2 = a\ .$$

Betrachten wir wiederum die Walnut-Darstellung von $S_{g,g}f = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f$, so können wir zeigen, dass für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle Sf, f\rangle = \beta^{-d}\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f\rangle &\overset{(*)}{=} \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f\rangle \\
&= \beta^{-d} \left(\langle G_0 \cdot f, f\rangle + \sum_{n\neq 0} \langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f\rangle \right) \\
&= \beta^{-d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} G_0(x)|f(x)|^2 dx + \sum_{n\neq 0} \langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f\rangle \right)\ .
\end{aligned}$$

$(*)$ ist erlaubt, da $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ absolut konvergiert.
Mit

$$G_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2 \geq a$$

und

$$\begin{aligned}
|\langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f\rangle| &\underset{\text{Ungl.}}{\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}} \|G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f\|_2 \cdot \|f\|_2 \\
&\overset{\text{Bem. nach [1] Satz (6.3.2)}}{\leq} \|G_n\|_\infty \|T_{\frac{n}{\beta}} f\|_2 \|f\|_2 \\
&\overset{\text{Bem. nach [1] Satz (6.3.2)}}{=} \|G_n\|_\infty \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

können wir $\langle Sf, f\rangle$ wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}\langle Sf, f\rangle &= \beta^{-d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} G_0(x)|f(x)|^2 dx + \sum_{n\neq 0}\langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f\rangle\right)\\ &\geq \beta^{-d}\left(a\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx - \sum_{n\neq 0}\|G_n\|_\infty \|f\|_2^2\right)\\ &= \underbrace{\beta^{-d}\left(a - \sum_{n\neq 0}\|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty\right)}_{=:A}\|f\|_2^2 \,.\end{aligned}$$

Damit ist A eine untere Frame-Schranke für S, welche nach Konstruktion positiv ist für alle $\beta \leq \beta_0$, da $\sum_{n\neq 0}\|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty < a$ für $\beta_0 > 0$ gewählt wurde.

Die obere Frame-Schranke wurde bereits in ([1] Satz (6.3.2)) über die Walnut Darstellung bewiesen mit

$$\|S_{g,g}f\|_2 \leq \beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f\|_2 \leq \left(\beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n\|_\infty\right)\|f\|_2$$

ergibt sich nämlich

$$\langle Sf, f\rangle \leq \|Sf\|_2\|f\|_2 \overset{(6.3.2)}{\leq} \underbrace{\left(\beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty\right)}_{=:B}\|f\|_2^2 \qquad \square$$

An (3) erkennt man, dass der Multiplikationsoperator $f \mapsto \beta^{-d}G_0 \cdot f$ die übrigen Terme dominiert:

$$(3) \qquad \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^d\\ n\neq 0}}\|G_n^{(\alpha,\beta_0)}\|_\infty < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d}|G_0(x)| \,.$$

Man nennt den Frame-Operator dann *diagonal dominant*. Von dieser Beobachtung ausgehend, wollen wir nun die Invertierbarkeit von S in anderen Räumen herleiten.

(2.3) Korollar
Unter den Bedingungen von Satz (2.1) ist $S_{g,g}$ invertierbar auf jedem stabilen, isometrisch translations-invarianten Banach Raum $B \subseteq S'(\mathbb{R}^d)$, in dem die beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger dicht liegen. Im Speziellen ist $S_{g,g}$ also invertierbar auf allen $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$. ◇

Beweis
Um im weiteren Verlauf die Walnut-Darstellung des Frame-Operators verwenden zu dürfen, benötigen wir die Eigenschaft des Raumes B, dass die beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger dicht in B liegen.

Wir schreiben nun $S = M + R$, wobei $Mf = \beta^{-d} G_0 f$ den Multiplikationsoperator und $Rf = \beta^{-d} \sum_{n \neq 0} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f$ den "Rest-Operator" darstellen. Dann ist $M^{-1} f = \beta^d G_0^{-1} f$ und die Operator-Norm ist gegeben durch

$$\|M^{-1}\|_{B \to B} = \sup_{\|f\|_B \le 1} \|\beta^d G_0^{-1} f\|_B \le \beta^d \|G_0^{-1}\|_\infty \le \beta^d a^{-1} \,,$$

da nach Voraussetzung $a \le G_0$ *f.ü.* gilt.

Aus ([2] Lemma (3.2.13)) ist bekannt, dass für $A := (I - M^{-1} S)$ mit $\|A\|_{B \to B} < 1$ folgt, dass $(I - A) = M^{-1} S$ eine beschränkte Inverse auf B besitzt und

$$(M^{-1} S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - M^{-1} S)^n$$

ist.

Können wir also zeigen, dass $\|A\|_{B \to B} < 1$, so ist S ebenfalls invertierbar auf B mit der Inversen $S^{-1} = (M^{-1} S)^{-1} M^{-1}$. Dazu:

$$\begin{aligned}
\|f - M^{-1} S f\|_B &= \|f - M^{-1}(M + R) f\|_B = \|f - M^{-1} M f - M^{-1} R f\|_B = \|M^{-1} R f\|_B \\
&= \|\sum_{n \neq 0} G_0^{-1} G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f\|_B \overset{\text{isom. trans. inv.}}{\underset{\text{stabil}}{\le}} \sum_{n \neq 0} \|G_0^{-1}\|_\infty \|G_n\|_\infty \|f\|_B \\
&= a^{-1} \sum_{n \neq 0} \|G_n\|_\infty \|f\|_B \\
\Rightarrow \qquad \|A\|_{B \to B} &\le a^{-1} \underbrace{\sum_{n \neq 0} \|G_n\|_\infty}_{< a \text{ nach Vor.}} < 1 \,.
\end{aligned}$$

□

Nun möchten wir die diagonale Dominanz des Gabor-Frame-Operators in der Matrix Darstellung untersuchen. Wir werden sehen, dass dies uns eine hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit von $S_{g,g}$ liefert, die ein wenig schwächer ist als (3). Dazu betrachten wir erst einmal folgendes

(2.4) Lemma
Sei $\left(a_{jl}\right)_{j,l\in J}$ eine Matrix, die einen beschränkten, positiven Operator A in $\ell^2(J)$ definiert und A sei diagonal dominant, das heißt, es gelte

$$\inf_{j\in J}\left(|a_{jj}| - \sum_{l:l\neq j}|a_{jl}|\right) \geq \delta > 0\,. \tag{5}$$

Dann ist $A \geq \delta I$ in dem Sinne, dass $\langle Ac, c\rangle \geq \delta\|c\|_2^2 \quad \forall c \in \ell^2(J)$. Weiterhin folgt daraus, dass A invertierbar auf $\ell^2(J)$ ist und $\|A^{-1}\|_{\text{op}} \leq \delta^{-1}$ gilt. ◇

Beweis
Wiederum schreiben wir $A = M + R$, wobei M die Diagonalmatrix mit Einträgen $m_{jl} = a_{jj}\delta_{jl}$ darstellt und R die Matrix mit Einträgen $r_{jl} = a_{jl}$ für $j \neq l$ und $r_{jj} = 0$.Wir können nun den Ausdruck $\langle Rc, c\rangle = \sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{l:l\neq j} a_{jl}c_l\overline{c_j}$ nach oben abschätzen, indem wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung - siehe $(*)$ in der folgenden Rechnung - zuerst auf die innere und dann auf die äußere Summe anwenden:

$$\begin{aligned}
|\langle Rc, c\rangle| &= |\sum_{j\in J}\sum_{l:l\neq j} a_{jl}c_l\overline{c_j}| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j\in J}\sum_{l:l\neq j}|a_{jl}||c_l||c_j| \\
&= \sum_{j\in J}\sum_{l:l\neq j}|a_{jl}|^{\frac{1}{2}}|c_l||a_{jl}|^{\frac{1}{2}}|c_j| = \sum_{j\in J}\sum_{l:l\neq j}\left(|a_{jl}||c_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(|a_{jl}||c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{j\in J}\left(\sum_{l:l\neq j}|a_{jl}||c_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l:l\neq j}|a_{jl}||c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(*)}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{j\in J}\sum_{l:l\neq j}|a_{jl}||c_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:\Sigma_1}\underbrace{\left(\sum_{j\in J}\sum_{l:l\neq j}|a_{jl}||c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:\Sigma_2} = \Sigma_1\cdot\Sigma_2\,.
\end{aligned}$$

Da A selbstadjungiert ist (weil A beschränkt und positiv ist), können wir Σ_2 schreiben als

$$\Sigma_2 = \left(\sum_{j \in J} \sum_{l: l \neq j} |a_{jl}| |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j \in J} \sum_{l: l \neq j} |\overline{a_{lj}}| |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{j \in J} \sum_{l: l \neq j} |a_{jl}| |c_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \Sigma_1 \ .$$

Nun können wir mit der Voraussetzung der diagonalen Dominanz von A die Summen $\Sigma_1 = \Sigma_2$ abschätzen mit

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \left(\sum_{j \in J} \sum_{l: l \neq j} |a_{jl}| |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j \in J} (|a_{jj}| - \delta) |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{j \in J} (a_{jj} - \delta) |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Daraus folgt insgesamt

$$|\langle Rc, c \rangle| \leq \Sigma_1 \cdot \Sigma_2 = \Sigma_1^2 \leq \textstyle\sum_{j \in J} (a_{jj} - \delta) |c_j|^2 = \langle (M - \delta I) c, c \rangle \quad \text{bzw.} \quad R \leq M - \delta I \ .$$

Damit ergibt sich nun die gewünschte Abschätzung für A durch

$$\langle Ac, c \rangle = \langle (M + R) c, c \rangle = \langle Mc, c \rangle + \langle Rc, c \rangle \overset{A \text{ pos. Oper.}}{\geq} \langle Mc, c \rangle - |\langle Rc, c \rangle|$$

$$\geq \langle Mc, c \rangle - \langle (M - \delta I) c, c \rangle = \langle \delta I c, c \rangle = \delta \|c\|_2^2 \ .$$

Folglich ist $\langle Ac, c \rangle$ nach unten beschränkt, was gerade die Invertierbarkeit impliziert. Weiterhin folgt aus $A \geq \delta I$, dass $AA^{-1} \geq \delta A^{-1} \Leftrightarrow \delta^{-1} I \geq A^{-1} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\text{op}} \leq \delta^{-1}$. Die Ungleichung wird erhalten, da A positiv ist und A und A^{-1} kommutieren. □

(2.5) Proposition (Ron-Shen)
Angenommen für $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und α, $\beta > 0$ ist der Gabor-Frame-Operator $S_{g,g}$ beschränkt in $L^2(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \left(G_0(x) - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} |G_n(x)| \right) = \delta > 0 \ . \tag{6}$$

Dann ist $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ invertierbar auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ist ein Frame. ◇

Beweis
Nach ([1] (6.23)) ist $G_{jl}(x) = G_{l-j}(x - \frac{j}{\beta})$. Damit folgt

$$G_{jj}(x) - \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq j}} |G_{jl}(x)| = G_0(x - \frac{j}{\beta}) - \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq j}} |G_{l-j}(x - \frac{j}{\beta})|$$

$$\geq \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \left(G_0(x) - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} |G_n| \right) \overset{\text{Vor.}}{=} \delta > 0 \; .$$

Die Matrix $G(x)$ ist also diagonal dominant und $S_{g,g}$ ist nach Voraussetzung in $L^2(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Weiterhin gilt nach ([1] Korollar (6.3.3)), dass $G(x)$ einen positiven Operator für alle $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ mit kompaktem Träger darstellt. Damit sind alle Voraussetzungen für Lemma (2.4) erfüllt und es gilt:

$G(x) \geq \delta I$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und mit ([1] Proposition (6.3.4)) ist $S_{g,g}$ invertierbar auf $L^2(\mathbb{R}^d)$. Damit ist $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame. □

(2.6) Bemerkung
Ist $g \in W(\mathbb{R}^d)$, so gilt (6) bereits, wenn α und β klein genug gewählt werden. ◇

Beweis
Nach Satz (2.1) und nach dem Hilfssatz (2.2) existiert ein $\beta_0 > 0$, sodass für $\beta \leq \beta_0$ und ein $\alpha > 0$

$$\sum_{n \neq 0} \|G_n^{\alpha,\beta}\|_\infty < \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2$$

gilt. Damit folgt

$$G_0(x) - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} |G_n(x)| \geq G_0(x) - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n(x)\|_\infty > 0 \; .$$

Dies impliziert

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \left(G_0(x) - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} |G_n(x)| \right) = \delta > 0 \; .$$ □

(2.7) Bemerkung
Ist $\widehat{g} \in W(\mathbb{R}^d)$ und erfüllen die Korrelationsfunktionen $G_n^{(\widehat{g},\beta,\alpha)}$ die Ungleichung (3), so ist $\mathcal{G}(\widehat{g},\beta,\alpha)$ ein Gabor-Frame und $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ebenso. ◇

Beweis
Mit Satz (2.1) ist $\mathcal{G}(\widehat{g},\beta,\alpha)$ ein Gabor-Frame. Dass $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ebenso einen Frame darstellt, beweisen wir mit folgender Aussage:

Mit ([1] (3.10), (1.07), (1.10)) gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}S_{g,\alpha,\beta}f &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k,\beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g(x) \cdot e^{-2\pi i x w} dx \\
S_{\widehat{g},\beta,\alpha}\widehat{f} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} V_{\widehat{g}}\widehat{f}(\beta k,\alpha n) M_{\alpha n} T_{\beta k}\widehat{g} \\
&\overset{(1.10)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} V_{\widehat{g}}\widehat{f}(\beta k,\alpha n) (T_{-\alpha n} M_{\beta k} g)^{\widehat{}} \\
&\overset{(3.10)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i\beta k\alpha n} V_g f(-\alpha n,\beta k) \cdot (T_{-\alpha n} M_{\beta k} g)^{\widehat{}} \\
&\overset{(1.07)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i\beta k\alpha n} V_g f(-\alpha n,\beta k) \cdot (e^{2\pi i\beta k\alpha n} M_{\beta k} T_{-\alpha n} g)^{\widehat{}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i\beta k\alpha n} V_g f(-\alpha n,\beta k) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x w} e^{2\pi i\beta k\alpha n} M_{\beta k} T_{-\alpha n} g(x) dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} V_g f(-\alpha n,\beta k) \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x w} M_{\beta k} T_{-\alpha n} g(x) dx \\
&= \mathcal{F}S_{g,\alpha,\beta}f \ .
\end{aligned}
$$

Da $\mathcal{G}(\widehat{g},\beta,\alpha)$ ein Gabor-Frame ist, gilt für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$A\|f\|_2^2 = A\|\widehat{f}\|_2^2 \le \langle S_{\widehat{g},\beta,\alpha}\widehat{f},\widehat{f}\rangle \le B\|\widehat{f}\|_2^2 = B\|f\|_2^2 \ .$$

Mit der Identität $S_{\widehat{g},\beta,\alpha}\widehat{f} = \mathcal{F}S_{g,\alpha,\beta}f$ und da ([1] Satz (1.1.2) (Plancherel)) impliziert, dass $\langle \mathcal{F}S_{g,\alpha,\beta}f,\widehat{f}\rangle = \langle S_{g,\alpha,\beta}f,f\rangle$ gilt, folgt

$$\|f\|_2^2 \le \langle S_{g,\alpha,\beta}f,f\rangle \le B\|f\|_2^2 \ .$$

Damit ist $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ebenso ein Gabor-Frame. □

Literaturverzeichnis

[1] *Foundation of Time-Frequency Analysis* von *Karlheinz Gröchenig*

[2] Vorlesungsmitschrift zu der Vorlesung *Funktionalanalysis* im Wintersemester 2010/11 von *PD Dr. Alfred Wagner*