Die Janssen-Darstellung für Gabor-Frame-Operatoren

Vortrag zum Seminar Funktionalanalysis, 23.03.2011

Katharina Bosch

§ 7 Die Struktur des Gabor Systems

In diesem Kapitel des Seminars geht es noch einmal um das Gabor-System, seine tiefere Struktur und notwendige Bedingungen für die Beschänktheit und Invertierbarkeit des Frame-Operators.
Wir betrachten dabei auch die Janssen-Darstellung. Wie schon bekannt, hat das Gabor-System folgende Darstellung:

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : \ k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

Die Ergebnisse des folgenden Kapitels gehören zu den faszinierendsten der Zeit-Frequenz-Analysis, vieles davon wird heutzutage noch erforscht.

Ein wenig zum geschichtlichen Hintergrund des Kapitels:
Die Ingenieure Z.Wexler und S.Raz entdeckten die biorthogonalen Relationen beim Versuch, einen alternativen Weg zur Berechnung von dualen Fenstern zu finden. Ihre Ergebnisse wurden später noch präzisiert und bewiesen und es führte zu einer etwas überraschenden Verknüpfung zum Gebiet der Operatoralgebren.

Im Folgenden werden wir uns den Ergebnissen der Walnut-Darstellung widmen und dabei eine einheitliche Behandlung der Struktur von Gabor-Frames geben.

— (7.1) —

Aus den vorigen Kapiteln sind die Darstellungen des Frame Operators $S = S_{g,\gamma}^{\alpha,\beta}$ und des Gabor Frames G_n bekannt:

$$Sf = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma, \tag{7.1}$$

$$G_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k)\gamma(x - \alpha k).$$

In Theorem *6.2.3* wurde schon bewiesen, dass

$$Sf = \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f \tag{7.2}$$

gilt und dass diese Reihe in $L^2(\mathbb{R}^d)$ absolut konvergiert, wenn $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$. Dabei ist $W(\mathbb{R}^d)$ der Wiener Raum, ein spezieller Funktionenraum, für den folgendes gilt

$$g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset W(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \|g\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \operatorname{ess\,sup}_{x \in Q} |g(x+n)| < \infty$$

(7.1.1) Bemerkung
Dies bedeutet, dass Funktionen in W lokal beschränkt und global in l^1 sind.
Der Wiener Raum enthält also alle beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger
Damit ist er ein Unterraum des L^p für $1 \neq p < \infty$ ◇

Zurück zur Konvergenz der Reihe Sf.
Da gilt, dass $S_{g,\gamma} = D_\gamma D_g^*$, so kann man weiter schließen:
Der Frame Operator ist beschränkt, genau dann, wenn D_g und D_γ beschränkt sind von $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ nach $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Dies gilt nach Satz 6.2.2, welcher besagt:
Ist $g \in W(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta > 0$, so ist $D_{g,\alpha,\beta}$ beschränkt von $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ nach $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Im Folgenden werden nun kleinere Sätze aufgestellt, die ausreichen, um die Strukturtheoreme der Gabor Frames herzuleiten.

(7.1.2) Satz
Seien $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$, D_g und D_γ beschränkt auf $l^2(\mathbb{Z}^d)$, dann gilt für alle $f, h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger:

$$\langle S_{g,\gamma} f, h \rangle = \langle \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f, h \rangle. \tag{7.3}$$

◇

Beweis
Der Beweis wird ähnlich geführt wie der zu Theorem 6.3.2., es muss hier einzig die Zulässigkeit der Aussage unter anderen Annahmen geprüft werden.
Aus den vorherigen Kapiteln weiß man, dass die periodisierte Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (T_{\alpha k}\overline{g}\cdot f)(x-\frac{n}{\beta})$$

die folgende Fourierreihenentwickelung besitzt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle e^{2\pi i\beta n x}.$$

Da $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sind, gilt zunächst, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\overline{g}(x-\alpha k)|^2 \mathrm{d}x < \infty \text{ und } \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

Also folgt mit der Hölder-Ungleichung:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\overline{g}(x-\alpha k)f(x)|\mathrm{d}x \leq (\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\overline{g}(x-\alpha k)|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Folglich ist $T_{\alpha k}\overline{g}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Insgesamt erfolgt damit, das die periodisierte Reihe mindestens in $L^1(Q_{\frac{1}{\beta}})$ ist, mit $Q_{\frac{1}{\beta}} = [0, \frac{1}{\beta}]$.

D_g ist laut Voraussetzung beschränkt. Damit wissen wir, dass die Folge der Koeffizienten $\langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle$ in $l^2(\mathbb{Z}^d)$ liegt, da für ein $g \in W(\mathbb{R}^d)$ nach *Satz 6.2.2* gilt, dass C_g von $L^2(\mathbb{R}^d)$ nach $l^2(\mathbb{Z}^d)$ beschränkt ist.
Dementsprechend liegt die Fourierreihe in $L^2(Q_{\frac{1}{\beta}})$ und die Gleichung

$$\beta^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (T_{\alpha k}\overline{g}\cdot f)(x-\frac{n}{\beta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n}T_{\alpha k}g\rangle e^{2\pi i\beta n x}$$

gilt für fast alle x.
Bei Substitution dieses Ausdruckes in die Darstellung des Frame Operators $S_{g,\gamma}$, erhalten wir:

$$\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle = \beta^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}\overline{g}(x-\frac{n}{\beta})f(x-\frac{n}{\beta})\right) T_{\alpha k}\gamma(x)\right)\overline{h(x)}\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Denn es gilt für das Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$.
Wenn f und h kompakten Träger haben, dann ist die Summe über n endlich und

erstreckt sich auf der Menge $\{n \in \mathbb{Z}^d : |(\frac{n}{\beta} + \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} h| > 0\}$.
Somit kann die Summationsreihenfolge vertauscht werden und man erhält:

$$S_{g,\gamma}f = \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}\overline{g}(x - \frac{n}{\beta}) \underbrace{\gamma(x-\alpha k)}_{=T_{\alpha k}\gamma(x)} \underbrace{T_{\frac{n}{\beta}} f}_{=f(x-\frac{n}{\beta})}$$

$$= \beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}\overline{g}(x - \frac{n}{\beta}) f(x - \frac{n}{\beta}) \right) T_{\alpha k}\gamma(x).$$

Damit folgt die Darstellung, denn nun haben wir

$$\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle = \langle = \beta^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} T_{\alpha k}\overline{g}(x - \frac{n}{\beta}) f(x - \frac{n}{\beta}) \right) T_{\alpha k}\gamma(x), h\rangle.$$

und dies ist genau (1).
Die Gleichung (7.3) aus diesem Satz ist die allgemeinste Version der Walnut-Darstellung innerhalb der L^2-Theorie.

Wenn nun für beliebige $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die Operatoren D_g und D_γ unbeschränkt wären, dann auch möglicherweise $S_{g,\gamma}$, denn wie auf Seite 110 des Gröchenings nachzulesen, gilt:
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$, daraus folgt, dass C_g, C_γ und $S_{g,\gamma}$ beschränkt sind.
Im Umkehrschluss heißt das also: Ist $C_{g,\gamma}$ unbeschränkt, dann ist g nicht in $W(\mathbb{R}^d)$, also ist $S_{g,\gamma}$ möglicherweise unbeschränkt.
In diesem Fall kann gezeigt werden, dass $S_{g,\gamma}$ einen speziellen Raum an Testfunktionen von $S(\mathbb{R}^d)$ in einen Unterraum von $S'(\mathbb{R}^d)$ abbildet. □

Zur Erinnerung: Der *Schwartz-Raum* ist definiert durch:

$$S(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha X^\beta f(x)| < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

Elemente aus dem Dualraum $S'(\mathbb{R}^d)$, der Raum aller stetigen und linearen Funktionale von $S(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, heißen auch temperierte Distributionen. Zum Beispiel ist für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $1 \leq p \leq \infty$: $L_g(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ eine temperierte Distribution.

Mit Hilfe von Satz 7.1.1 kann man nun einfache notwendige Bedingungen für die Beschränktheit und Invertierbarkeit des Frame-Operators aufstellen.

(7.1.3) Korollar
Seien $D_g,\ D_\gamma$ beschränkt, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}^d$:

$$\|G_n\|_\infty \leq \beta^d \|S_{g,\gamma}\|_{op}. \qquad \diamond$$

Beweis
Wähle $f, h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit Träger in $Q_{\frac{1}{\beta}}$, sowie $l, m \in \mathbb{Z}^d$ beliebig.
Da gilt, dass $S_{g,\gamma}$ beschränkt ist, haben wir mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\langle S_{g,\gamma} T_{\frac{l}{\beta}} f, T_{\frac{m}{\beta}} h\rangle| &\leq \|S_{g,\gamma} f\|_2 \|h\|_2 \\ &\leq \|S_{g,\gamma}\|_{\text{op}} \|f\|_2 \|h\|_2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Außerdem gilt mit *Satz 7.1.1*:

$$\langle S_{g,\gamma} T_{\frac{l}{\beta}} f, T_{\frac{m}{\beta}} h\rangle = \beta^{-d} \langle \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n+l}{\beta}} f, T_{\frac{m}{\beta}} h\rangle \tag{7.5}$$

Sind die Träger von $T_{\frac{l}{\beta}} f, T_{\frac{m}{\beta}} h$ paarweise disjunkt, dann geht nur
der Term mit $n + l = m$ ein, da $T_{\frac{n+l}{\beta}} f * T_{\frac{m}{\beta}} h = 0$ für alle $l + n \neq m$ ist.
Mit *7.4* und *7.5* haben wir für alle $f, h \in L^\infty(Q_{\frac{1}{\beta}}) \subseteq L^2(Q_{\frac{1}{\beta}})$ und für alle $l, m \in \mathbb{Z}^d$:

$$\beta^{-d} | \int\limits_{Q_{\frac{1}{\beta}}} G_{m-l}(x + \frac{m}{\beta}) f(x) \overline{h(x)} \mathrm{d}x| \leq \|S_{g,\gamma}\|_{\text{op}} \|f\|_2 \|h\|_2. \tag{7.6}$$

Denn es gilt, dass

$$\begin{aligned} |\langle S_{g,\gamma} T_{\frac{l}{\beta}} f, T_{\frac{m}{\beta}} h\rangle| &\overset{(7.5)}{=} |\beta^{-d} \langle \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n+l}{\beta}} f, T_{\frac{m}{\beta}} h\rangle| \\ &\overset{n+l=m}{=} \beta^{-d} |\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} G_{m-l} f(x - \frac{m}{\beta}), h(x - \frac{m}{\beta})\rangle| \\ &= \beta^{-d} | \int\limits_{Q_{\frac{1}{\beta}}} G_{m-l}(x + \frac{m}{\beta}) f(x) \overline{h(x)} \mathrm{d}x|. \end{aligned}$$

Mit *(7.4)* erfolgt somit die Ungleichung für L^2.

Da L^∞ dicht in $L^2(Q_{\frac{1}{\beta}})$ ist, kann der Ausdruck *(7.6)* bei Anwendung des Dichtheitsprinzips auf $L^2(Q_{\frac{1}{\beta}})$ erweitert werden.

Somit gilt für $f, h \in L^2(Q_{\frac{1}{\beta}})$ und für alle $l \in \mathbb{Z}$:

$$\beta^{-d} \operatorname{ess\,sup}_{x \in Q_{\frac{1}{\beta}}} |G_n(x + \frac{n+l}{\beta})| \leq \|S_{g,\gamma}\|_{\mathrm{op}} \text{ für alle } l.$$

Also gilt wie erwünscht:

$$\|G_n\|_\infty \leq \beta^d \|S_{g,\gamma}\|_{\mathrm{op}}.$$

□

(7.1.4) Korollar
Sei $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Gabor-Frame mit den Frame-Grenzen A, B, dann gilt:

$$A \leq \beta^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \leq B \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $f = h \in L^\infty(Q_{\frac{1}{\beta}})$ und $l = m$ in *(7.5)*, dann hat man:

$$\begin{aligned} \langle S_{g,g} f, f \rangle &= \beta^{-d} \int\limits_{Q_{\frac{1}{\beta}}} G_{m-m}(x) f(x) \overline{f(x)} \mathrm{d}x \\ &= \beta^{-d} \int\limits_{Q_{\frac{1}{\beta}}} G_0(x) |f(x)|^2 \mathrm{d}x, \\ G_0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \text{ für } \gamma = g. \end{aligned}$$

Aus den Frame-Ungleichungen
$A\|f\|^2 \leq \sum\limits_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$ für alle $f \in \mathcal{H},\ A, B > 0$,
erfolgt dann $A \leq \beta^{-d} G_0 \leq B$ und damit die Behauptung. □

— *Kapitel 7.2: Die Janssen-Darstellung* —

Die Walnut-Darstellung des Gabor-Frame Operators behandelt Modulationen und Transformationen unterschiedlich, so dass es zu Formeln führt, die unter der Fouriertransformation nicht invariant sind. Die Form des Gabor-Frame Operators bleibt jedoch (siehe auch *(6.36)* im Gröchening) unter der Fouriertransformation erhalten. In diesem Kapitel wird nun versucht, eine symmetrische Darstellung des Gabor-Frame Operators zu erhalten. Dafür werden zuerst die α-periodischen Korrelationsfunktionen in ihre Fourier-Reihen entwickelt.
Der l-te Fourierkoeffizient von G_n ist:

$$\begin{aligned}\hat{G_n}(l) &= \alpha^{-d} \int\limits_{Q_\alpha} G_n(x) e^{-2\pi i l x/\alpha} \mathrm{d}x \\ &= \alpha^{-d} \int\limits_{Q_\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma)(x-\alpha k) e^{-2\pi i l x/\alpha} \mathrm{d}x \\ &= \alpha^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (T_{\frac{n}{\beta}}\overline{g}\cdot\gamma)(x) e^{-2\pi i l x/\alpha} \mathrm{d}x \\ &= \alpha^{-d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle.\end{aligned}$$

Mit *Korollar 7.1.3* gilt nun: Wenn $G_n \in L^\infty(Q_\alpha) \subseteq L^2(Q_\alpha)$, dann ist

$$G_n(x) \overset{Fourier-Reihe}{=} \alpha^{-d} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle e^{2\pi i l x/\alpha} \tag{7.7}$$

mit Konvergenz in $L^2(Q_\alpha)$ (Kapitel 1.3, Punkt (1.31) im Gröchening).

Bemerkung: *(7.7)* ist eine erneute Anwendung der Poisson Summationsformel.
Bei Substitution dieses Ausdruckes in die Walnut-Darstellung, erhalten wie die Janssen-Darstellung:
(1) : informale Entwicklung:

$$\begin{aligned}S_{g,\gamma} f &= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f \\ &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle e^{2\pi i l x/\alpha} T_{\frac{n}{\beta}} f \\ &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} f.\end{aligned}$$

(2) : Operator Notation

$$S_{g,\gamma} = (\alpha\beta)^{-d} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}}. \tag{7.8}$$

Wie man sieht, ist die Janssen-Darstellung komplementär zur der ursprünglichen Definition des Frame-Operators, welche in *(7.1)* gegeben wurde.
Dort stellt der Frame-Operator eine orthogonale Entwicklung dar, f tritt implizit in den Framekoeffizienten $\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle$ auf. In der Janssen-Darstellung hingegen erscheint f expliziter. Der Frame-Operator ist eine Linearkombination von Zeit-Frequenz-Verschiebungen von f. Bei der Betrachtung von *(7.8)* sind einige Fragen zur Konvergenz dieser Reihe offen. Für beliebige $g, \gamma \in L^2$ ist nicht einmal klar, wie die Fourierreihe in Punkt *(7.7)* G_n repräsentiert.
Zuerst wird eine Hilfsdefinition eingeführt, damit technische Fragen dieser Art umgangen werden können.

(7.2.1) Definition
Ein Funktionenpaar (g, γ) in $L^2(\mathbb{R}^d)$ genügt der Bedingung (A') für Paramter $\alpha, \beta > 0$, wenn gilt:

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}^d} |\langle \gamma, T_{\frac{k}{\beta}} M_{\frac{l}{\beta}} g \rangle| < \infty. \tag{7.9}$$

Ist $g = \gamma$, so genügt g der Bedingung (A).
Bedingung (A') garantiert die absolute Konvergenz der Reihenentwicklungen *(7.7)* und *(7.8)*. ◇

Im folgenden Lemma wird gezeigt, dass die Janssen-Darstellung für (g, γ), welche die eingeführte Bedingung erfüllen, auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ erweitert werden kann und man die Reihenfolge der Operationen in $S_{g,\gamma}$ vertauschen kann:

(7.2.2) Lemma
(g, γ) genügt der Bedingung (A') für gegebenes $\alpha, \beta > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{g,\gamma} &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{l,n \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g \rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} \\ &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{l,n \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, T_{\frac{l}{\beta}} M_{\frac{n}{\alpha}} g \rangle T_{\frac{l}{\beta}} M_{\frac{n}{\alpha}}. \end{aligned}$$ ◇

Beweis
Als erstes ist zu zeigen, dass: $S_{g,\gamma} = \tilde{S} := (\alpha\beta)^{-d} \sum\limits_{l,n\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}}$.
Da man weiß, dass die (g,γ) der Bedingung (A') genügen, konvergiert S absolut in der Operatornorm und ist somit unabhängig von der Summationsreihenfolge.
Also gilt mit *(7.7)* und *(7.1.1)*:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \underbrace{\left(\alpha^{-d} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g\rangle e^{2\pi i l x/\alpha} \right)}_{G_n(x)} T_{\frac{n}{\beta}} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} \\ &= S_{g,\gamma}\end{aligned}$$

Mit dem Wissen aus dem ersten Kapitel, dass $M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} = e^{2\pi i x l/\alpha} T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}}$ gilt, erfolgt die Vertauschung der Operatorreihenfolge durch Anpassung der Indizies.
Insgesamt erfolgt damit die Behauptung. □

Bemerkung: Bedingung (A') ist sehr spezifisch. Nur wenige Fälle erfüllen diese Bedingung, weswegen man auch sagen kann, dass diese Bedingung eine rein technische ist. Deswegen kommen wir nun zu einem Beispiel, für das gilt, dass es zwar sehr einfach ist, aber trotzdem die Bedingung nicht erfüllt.

Für das nun folgende Beispiel benötigen wir zuerst ein kleines Lemma:

(7.2.3) Lemma
Weyl's Kriterium: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig verteilt modulo 1

(ii) Für jedes $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$ gilt: $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i k x_j} \overset{N\to\infty}{\to} 0$ ◇

Beispiel: Sei $g = \gamma = \chi_{[0,1]}$.
$\chi_{[0,1]}$ ist die charakteristische Funktion auf $[0,1]$: $\chi_{[0,1]} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
Dann befinden wir uns in $\mathbb{R}$, also $d = 1$ und es gilt $\overline{g(x)} = g(x)$, damit wissen wir weiter, dass für $\langle g, T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}} g\rangle$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle g, T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}} g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}} g(x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{M_{\frac{l}{\alpha}} g(x - \frac{n}{\beta})} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{e^{2\pi i (x - \frac{n}{\beta}) \frac{l}{\alpha}} g(x - \frac{n}{\beta})} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x) g(x - \frac{n}{\beta}) e^{2\pi i (x - \frac{n}{\beta})(-\frac{l}{\alpha})} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x + \frac{n}{\beta}) g(x) e^{2\pi i x (-\frac{l}{\alpha})} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} M_{-\frac{l}{\alpha}} T_{-\frac{n}{\beta}} g(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x \\
&= \langle M_{-\frac{l}{\alpha}} T_{-\frac{n}{\beta}} g, g \rangle \circledast .
\end{aligned}
$$

Um zu überprüfen, ob die Bedingung für diese Funktion erfüllt ist, schaut man, ob $\sum\limits_{k,l \in \mathbb{Z}^d} |\langle \gamma, T_{\frac{k}{\beta}} M_{\frac{l}{\beta}} g \rangle| < \infty$ gilt. Dafür benötigen wir zuerst die Fourierkoeffizienten der charakteristischen Funktion. Mit $\circledast$ und folgenden Umformungen gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle g, T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}} g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} g(x + \frac{n}{\beta}) g(x) e^{2\pi i x (-\frac{l}{\alpha})} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x (-\frac{l}{\alpha})} \chi_{[0,1]}(x + \frac{n}{\beta}) \chi_{[0,1]}(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \frac{l}{\alpha}} \chi_{[-\frac{n}{\beta}, 1 - \frac{n}{\beta}]}(x) \chi_{[0,1]}(x) \mathrm{d}x \\
&= \mathcal{F}\left(\chi_{[0,1] \cap [-\frac{n}{\beta}, 1 - \frac{n}{\beta}]} \right) (\frac{l}{\beta}).
\end{aligned}
$$

Denn:

$$
x + \frac{n}{\beta} \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-\frac{n}{\beta}, 1 - \frac{n}{\beta}].
$$

Nach obigen können wir nun mit $\langle M_{-\frac{l}{\alpha}} T_{-\frac{n}{\beta}} g, g \rangle$ arbeiten.

Für $n = 0$ und $l \in \mathbb{Z} \setminus 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
|\langle M_{-\frac{l}{\alpha}} g, g\rangle| &= |\mathcal{F}\left(\chi_{[0,1]}\right)(\frac{l}{\alpha})| \\
&= \left| \int\limits_{[0,1]} e^{2\pi i x \frac{l}{\alpha}} \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \frac{1}{-2\pi i l \alpha^{-1}} e^{-2\pi i x l \alpha^{-1}} \Big|_0^1 \right| \\
&= \left| \frac{1 - e^{2\pi i l \alpha^{-1}}}{2\pi i l \alpha^{-1}} \right|.
\end{aligned}$$

Sei $l = 0$, dann hat man:

$$|\mathcal{F}\left(\chi_{[0,1]}\right)(\frac{l}{\alpha})| = 1.$$

Außerdem weiß man, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha|\sin(\frac{\pi l}{\alpha})|}{\pi|l|} &= \frac{|e^{i\pi\frac{l}{\alpha}} - e^{-i\pi\frac{l}{\alpha}}|}{2\alpha^{-1}\pi|l|} \\
&= \left| \frac{e^{\pi i \frac{l}{\alpha}}(1 - e^{-2\pi i \frac{l}{\alpha}})}{2\pi i \alpha^{-1} l} \right| \\
&= \left| \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{l}{\alpha}}}{2\pi i \alpha^{-1} l} \right|,
\end{aligned}$$

mit $\left| e^{\pi i \frac{l}{\alpha}} \right| = 1$. Also erfolgt damit man insgesamt:

$$|\langle M_{-\frac{l}{\alpha}} g, g\rangle| = \frac{\alpha|\sin(\frac{\pi l}{\alpha})|}{\pi|l|}$$

Ist nun $\alpha = \frac{p}{q}$ rational, $(p, q) = 1$ mit $p > 1$, dann ist mit $l = r + jp$ für $r = 0, 1, ..., p-1$:

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\chi}_{[0,1]}(\frac{l}{\alpha})| = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{r=0}^{p-1} |\sin(\frac{\pi q r}{p})| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|r + jp|} = \infty,$$

wobei gilt, dass $|\sin(\frac{\pi r q}{p} + \pi j)| \overset{j\in\mathbb{Z}}{=} |\sin(\frac{\pi r q}{p})|$.

(7.2.4) Definition
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig verteilt modulo 1, falls für jedes a, b mit $0 \leq a < b < 1$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\left\{j \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq N : (x_j)_j \subset [a,b]\right\} = b - a$$

Das bedeutet, der Anteil der Folge, der im Intervall $[a, b]$ liegt, konvergiert gegen die Länge des Intervalls.

Ist α irrational, so ist die Folge $\{\frac{l}{\alpha} : l \in \mathbb{Z}\}$ gleichmäßig verteilt modulo 1 und damit gilt dann:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\left\{1 \leq l \leq N : \inf_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{l}{\alpha} - k + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Um nun zu zeigen, dass auch die Folge, die in diesem Beispiel betrachtet wird, gleichmäßig modulo 1 verteilt ist, benötigt man das Weyl's Kriterium.
Betrachtet man die Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $x_l = \frac{l}{\alpha}$, $\alpha > 0$, dann gilt für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und für $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$, dass $e^{2\pi i k \alpha^{-1}} \neq 1$
daher ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N} e^{2\pi i k \frac{l}{\alpha}} &= \frac{1}{N} \frac{e^{2\pi i k (N+1)\alpha^{-1}} - 1}{e^{2\pi i k \alpha^{-1}} - 1} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\overbrace{e^{2\pi i k N \alpha^{-1}}}^{\text{im Betrag } \leq 1} e^{2\pi i k \alpha^{-1}} - 1}{e^{2\pi i k \alpha^{-1}} - 1} \leq \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Damit gilt weiter

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N} e^{2\pi i k \frac{l}{\alpha}}\right| \leq \frac{1}{N} \overset{N\to\infty}{\to} 0.$$

Also ist die konstruierte Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $x_l = \frac{l}{\alpha}$ gleichmäßig verteilt modulo 1.

Für Indizes l aus der Menge $\{l \in \mathbb{N} : \inf_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{l}{\alpha} - k + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}\}$ gilt: $|\sin(\frac{\pi l}{\alpha})| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Dies kann man mithilfe der gleichmäßigen Verteilung modulo 1 zeigen.

Zu zeigen ist, dass: $|\sin(\frac{\pi l}{\alpha})| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
Es gilt: $|\sin(\frac{2k+1}{4}\pi)| = \frac{1}{\sqrt{2}},\ k \in \mathbb{Z}$. Wähle nun die Grenzen $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4}$, dann gilt $\frac{l}{\alpha} \in \{\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\}$. Da $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $x_l = \frac{l}{\alpha}$ gleichmäßig modulo 1 verteilt ist, gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{card}\left\{1 \leq l \leq N : \frac{l}{\alpha} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right\} = \frac{1}{2}.$$

Demnach muss also gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \leq \frac{l}{\alpha} \leq \frac{3}{4} &\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{l}{\alpha} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nun kann man die gleichmäßige Verteilung modulo 1 der $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ abermals anwenden und bekommt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \underbrace{\operatorname{card}\left\{1 \leq l \leq N : \inf_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{2} - k\right| < \frac{1}{4}\right\}}_{:=\mathcal{M}} = \frac{1}{2}.$$

Denn ob man $\left|\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{2} - k\right|$ oder $\left|\frac{l}{\alpha} + \frac{1}{2} - k\right|$ betrachtet, macht keinen Unterschied. Bei dem 1. Fall geht man von $\frac{l}{\alpha} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ aus, im 2. Fall von $\frac{l}{\alpha} \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right]$, wobei $|\sin(\frac{l}{\alpha})|$ in beiden Fällen aufgrund des Betrages dieselben Werte annimmt.

Dementsprechend gilt für alle l aus der Menge $\mathcal{M}$:

$$\left|\sin(\frac{\pi l}{\alpha})\right| > \left|\sin\left(\pi(k + \frac{1}{4})\right)\right| \overset{\pi-\text{periodisch}}{=} \left|\sin(\frac{\pi}{4})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da wir nun die Abschätzung nach oben bewiesen haben, wissen wir insgesamt, dass auch die Reihe $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \left|\chi_{[0,1]}(\frac{l}{\alpha})\right|$ divergiert. Bedingung (A) ist nur erfüllt, wenn $\alpha = \frac{1}{q},\ q \in \mathbb{N}$.

Also haben wir mit diesem Beispiel gezeigt, dass die Bedingungen (A') und (A) sehr stark von den Gitterparametern abhängen und selbst für $g, \gamma \in W$ nicht zwangsläufig erfüllt sind.