Frames in Hilberträumen

Handout zum Vortrag am 21.03.2011 von Jan Knappmann

§ 1 Der Frame-Operator

(1.1) Definition (Frame und straffer Frame)
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und seien $A,B > 0$. Eine Familie $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, von Elementen aus $\mathcal{H}$ heißt ein *Frame* von $\mathcal{H}$ mit den Schranken A und B, wenn für alle $f \in \mathcal{H}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

Gilt dabei $A = B$ und somit Gleichheit, spricht man von einem *straffen Frame*. $\diamond$

(1.2) Beispiele
(Frames aus Orthogonalbasen) $\diamond$

Einige wichtige, assoziierte Operatoren:

(1.3) Definition (Frame-Operator)
Sei $\{a_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, eine Teilmenge von $\mathcal{H}$.

a) Der *Koeffizientenoperator* C ist definiert durch

$$C : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathcal{J}) : f \mapsto \{\langle f, a_j \rangle \mid j \in \mathcal{J}\}$$

b) Für eine endliche Folge $c = (c_j)_{j \in \mathcal{J}}$ ist der *Rekonstruktionsoperator* D definiert durch

$$D : \ell^2(\mathcal{J}) \to \mathcal{H} : c \mapsto \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j \, a_j$$

c) Der *Frame-Operator* S ist definiert durch

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : f \mapsto \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, a_j \rangle \, a_j$$

$\diamond$

Deren wichtigste Eigenschaften:

(1.4) Lemma
Sei $\{e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame von $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) Der Koeffizientenoperator C ist ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}$ nach ℓ^2 mit abgeschlossenem Bild.

b) Der Operator D besitzt eine beschränkte Fortsetzung auf $\ell^2(\mathcal{J})$, kann also von ganz $\ell^2(\mathcal{J})$ nach $\mathcal{H}$ definiert werden, und erfüllt

$$\| \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j\| \leq \sqrt{B}\, \|c\|_2 \qquad ,\forall\, c \in \ell^2(\mathcal{J}).$$

Bezeichnet man diese Fortsetzung kurzerhand wieder mit D, so gilt:
C und D sind adjungiert, also $C^* = D$.

c) Der Frame-Operator $S = DC = C^*C = DD^*$ bildet $\mathcal{H}$ surjektiv auf sich selbst ab und ist ein positiver, invertierbarer Operator, der

$$A\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \leq S \leq B\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \qquad \text{und} \qquad B^{-1}\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \leq S^{-1} \leq A^{-1}\ \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

erfüllt.
Insbesondere gilt: $\{e_j|\ j \in \mathcal{J}\}$ ist ein straffer Frame genau dann, wenn gilt $S = A\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.

d) Die optimalen Frame-Schranken A_{opt} und B_{opt} sind gegeben durch

$$A_{opt} = \|S^{-1}\|^{-1} \qquad \text{und} \qquad B_{opt} = \|S\|.$$ ◇

§ 2 Darstellung über Frames

(2.1) Korollar
Sei $\{e_j\,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, ein Frame von $\mathcal{H}$.
Falls für eine Folge $c \in \ell^2(\mathcal{J})$ die Darstellung

$$f = \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j e_j$$

gilt, so existiert für alle $\epsilon > 0$ eine endliche Teilfolge $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(\epsilon) \subseteq \mathcal{J}$, so dass

$$\|f - \sum_{j\in\mathcal{F}} c_j e_j\| < \epsilon$$

für jede endliche Teilmenge $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_0$ gilt.
Man sagt:

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j\, e_j \qquad \text{konvergiert } \textit{unbedingt} \text{ gegen} \qquad f \in \mathcal{H}.$$ ◇

Wir betrachten nun eine Rekonstruktionsformel für $f \in \mathcal{H}$ über die Koeffizienten $\langle f, e_j\rangle$.

(2.2) Korollar
Ist $\{e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, ein Frame für $\mathcal{H}$ mit den Schranken $A, B > 0$, dann ist auch $\{S^{-1}e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame für $\mathcal{H}$ mit den Schranken $A^{-1}, B^{-1} > 0$, der sogenannte *duale* Frame.
Außerdem gelten für jedes $f \in \mathcal{H}$ die Darstellungen

$$f = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, S^{-1}e_j \rangle \, e_j \qquad (*)$$

und

$$f = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, e_j \rangle \, S^{-1}e_j, \qquad (**)$$

wobei die beiden Reihen in $\mathcal{H}$ unbedingt konvergieren. ◇

Die Koeffizienten $\langle f, S^{-1}e_j \rangle$ sind im folgenden Sinne kanonisch:

(2.3) Proposition
Ist $\{e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ Indexmenge, ein Frame von $\mathcal{H}$ und gilt $f = \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j e_j$ für eine Folge $c \in \ell^2(\mathcal{J})$.
Dann gilt

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} |c_j|^2 \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} |\langle f, S^{-1}e_j \rangle|^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $c_j = \langle f, S^{-1}e_j \rangle$ gilt. ◇

Ein Kriterium für die Eindeutigkeit der Koeffizientenfolge:

(2.4) Lemma
Sei $\{e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $\mathcal{J}$ abzählbare Indexmenge, ein Frame von $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Die Koeffizienten $c \in \ell^2(\mathcal{J})$ in $(*)$ sind eindeutig.

b) Der Koeffizientenoperator C bildet surjektiv nach $\ell^2(\mathcal{J})$ ab.

c) Für jede endliche Folge $c \in \ell^2(\mathcal{J})$ existieren $A', B' > 0$, so dass

$$A' \|c\|_{\ell^2} \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j \, e_j \leq B' \|c\|_{\ell^2} \; .$$

d) Der Rahmen $\{e_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ ist das Bild einer Orthonormalbasis $\{g_j \,|\, j \in \mathcal{J}\}$ unter einem invertierbaren, beschränkten Operator T.

e) Die Grammatrix G mit den Einträgen $G_{j,m} = \langle e_m, e_j \rangle$ mit $m, j \in \mathcal{J}$ definiert einen positiven, invertierbaren Operator auf $\ell^2(\mathcal{J})$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation.
Dabei wird der Folgenvektor c mit dem i-ten Folgenglied in der i-ten Komponente von rechts an die Matrix G mutipliziert.
Dies liefert:

$$Gc = (\sum_{i \in \mathcal{J}} c_i \langle e_i, e_j \rangle)_{j \in \mathcal{J}} \in \ell^2(\mathcal{J})$$

◇

(2.5) Definition (*Riesz*-Basis)
Ein Frame, der eine und damit alle Bedingungen des Lemmas (2.4) erfüllt, heißt eine *Riesz-Basis* von $\mathcal{H}$. ◇

§3 Der Frame-Algorithmus

(3.1) Algorithmus (Frame-Algorithmus)
Gegeben sei ein $\lambda \in (0, \frac{2}{B})$.
Setze $\delta = \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\} < 1$ und definiere rekursiv

$$f_0 = 0, \qquad f_{n+1} = f_n + \lambda S(f - f_n).$$

◇

Dann gilt $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ mit der Abschätzung $\|f - f_n\| \leq \delta^n \|f\|$.

Umschreiben des Frame-Algorithmus:

(3.2) Bemerkung
Sei im k-ten Schritt des Algorithmus $f_k = \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j^{(k)} e_j$ mit der Koeffizientenfolge $c^{(k)}$. Für diese Folge erhält man die Rekursion

$$c^{(k+1)} = c^{(k)} + c^{(1)} - \lambda G c^{(k)}.$$

◇

Einige hilfreiche Beobachtungen:

(3.3) Lemma

a) Ist $\{e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ein straffer Frame mit $A = B = 1$ und gilt $\|e_j\| = 1$ für alle $j \in \mathcal{J}$, dann gilt $\{e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ist eine Orthonormalbasis.

b) Ist $\{e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ein Frame, so gilt, dass $\{S^{-\frac{1}{2}} e_j | \, j \in \mathcal{J}\}$ ein straffer Frame mit $A = B = 1$ ist. $S^{-\frac{1}{2}}$ definiert die positive Quadratwurzel von S^{-1}.

c) Der *inverse Frame-Operator* ist S^{-1} gegeben durch

$$S^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : f = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle f, S^{-1} e_j \rangle S^{-1} e_j.$$

Damit ist S^{-1} ein Frame-Operator, der den dualen Frame $\{S^{-1} e_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ respektiert. ◇