Schwartz Funktionen und Faltung

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 21.03.2011

Alexander Katzur

Die Nachfolgende Arbeit beruht auf den Seiten 235-243 des Lehrbuches *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications* von Gerald B. Folland. Sie liefert eine Einführung in die Theorie der Schwartzräume, wobei die meisten Resultate sogar auf Obermengen der Schwartzräume gezeigt werden. Zudem beschäftigt sie sich mit der Faltung zweier Funktionen. Hierbei wird besonders auf die Frage eingegangen, auf welchen Mengen die durch Faltung erhaltene Funktion endlich existiert. Des Weiteren erhalten wir das Ergebnis, dass die gefaltete Funktion, unter gewissen Voraussetzungen, mindestens genau so glatt ist, wie jede der Ausgangsfunktionen.
Zum Abschluss beweisen wir noch zwei Theoreme, welche Aussagen über die Konvergenzeigenschaften spezieller Folgen gefalteter Funktionen treffen.
Die vorliegende Arbeit kann zudem als Vorbereitung auf den nachfolgenden Vortrag *Fourier-Analysis* gesehen werden, da dort einige der Ergebnisse dieser Arbeit Verwendung finden.

§1 Einführung und Notationen

Im Folgenden werden einige Notationen und die Vektorräume eingeführt, mit denen wir im Weiteren arbeiten. Die Notationen sind konsistent zu denen des Buches.

Soweit nicht anders angegeben, arbeiten wir während der gesamten Arbeit auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$, wobei n auch im Weiteren immer für dessen Dimension steht. Zudem verwenden wir immer das Lebesgue Maß m, so dass im Folgenden die abkürzende Schreibweise $L^p(E,m) = L^p(E)$ für $E \subset \mathbb{R}^n$, messbar, benutzt wird. Hierbei ist

$$L^p(E,m) := \{f : E \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ messbar}, \ \|f\|_p < \infty\}, \ 1 \le p \le \infty,$$

und

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty; \quad \|f\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{x\in E}|f(x)|.$$

Als weitere Funktionennorm verwenden wir noch $\|f\|_u = \sup_{x\in E} |f(x)|$.
Für $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ ist außerdem $C^k(U)$ die Menge der k-fach partiell stetig

differentierbaren Funktionen und $C^\infty(U) := \bigcap_{k=1}^\infty C^k(U)$. Weiterhin ist für beliebiges $E \subset \mathbb{R}^n$

$$C_c^\infty(E) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \operatorname{supp}(f) \subset E, \ \operatorname{supp}(f) \ kompakt\},$$

wobei $\operatorname{supp}(f)$ der Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \neq 0\}$ ist. (Diese Definition macht Sinn, da f stetig ist.)
Des Weiteren ist für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad |x| := \sqrt{x \cdot x}$$

und die partielle Ableitung nach x_j

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Für Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad , \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i! \text{ und } \partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

und wenn zusätzlich $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

(1.1) Bemerkung
Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist nicht trivial.

Wir führen nun den Raum der Schwartzfunktionen ein. Dieser ist von besonderem interesse in der Fourier-Analysis, da die Fourier-Transformation auf ihm einen Isomorphismus bildet. Dies wird im Vortrag „Fourier-Analysis“bewiesen.

(1.2) Definition (Schwartzraum)
Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum der $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen, bei denen jede Ableitung schneller gegen 0 strebt, als jede beliebige Potenz von $1 + |x|$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \ \forall N \in \mathbb{N}_0, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\},$$

wobei

$$\|f\|_{(N,\alpha)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$$

und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\diamond$

Dieser Raum ist nicht trivial, da zum Beispiel $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f_\alpha(x) = x^\alpha \exp(-|x|^2)$ für jeden Multiindex α in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.

(1.3) Bemerkung
$\|f\|_{(N,\alpha)}$ ist Halbnorm für alle $N \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. ◇

Durch die Halbnormen $\|.\|_{(N,\alpha)}$ wird eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

(1.4) Definition und Lemma (induzierte Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)
Wir definieren die durch die Halbnormen $\|.\|_{(N,\alpha)}$ induzierte Metrik auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gemäß

$$d(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_{(N_k,\alpha_k)}}{1+\|f-g\|_{(N_k,\alpha_k)}}.$$

Dabei ist $\{(N_i,\alpha_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n$. ◇

Man beachte, dass der Schwartzraum Teilmenge eines jeden $L^p(\mathbb{R}^n)$-Raumes, $1 \le p \le \infty$ ist, und somit die Ergebnisse, die wir auf den L^p-Räumen erhalten, auch für den Schwartzraum Gültigkeit besitzen.

(1.5) Proposition
Es gilt: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \forall p \in [1,\infty]$. Weiterhin ist die Einbettung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ stetig , d.h. dass eine Funktionenfolge, die in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, auch in $\|.\|_p$ konvergiert. ◇

Nun wollen wir etwas über die Struktur des Schwartzraumes aussagen.

(1.6) Proposition (Proposition 8.2)
Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Frechetraum (siehe A.15), mit der Topologie, die durch die $\|.\|_{(N,\alpha)}$ erzeugt wird. ◇

Nun wollen wir noch ein paar äquivalente Charakterisierungen für Elemente des Schwartzraumes angeben.

(1.7) Proposition (Proposition 8.3)
Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind äquivalent

a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

b) $x^\beta \partial^\alpha f$ beschränkt für alle Multiindizes α, β

c) $\partial^\alpha \left(x^\beta f\right)$ beschränkt für alle Multiindizes α, β ◇

— Translation und Stetigkeit —

Da wir im nächsten Kapitel die Faltung zweier Funktionen betrachten, ist es ratsam sich zunächst mit der Stetigkeit der Translation auf verschiedenen Funktionenräumen zu befassen. Diese wird im Folgenden bei der Einführung der Faltung benötigt. Dazu führen wir die folgende Notation ein:
Falls f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\tau_y f(x) = f(x-y).$$

Man beachte, dass die Normen $\|.\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\|.\|_u$ invariant unter Translation sind.

(1.8) Definition (gleichmäßige Stetigkeit)
f ist gleichmäßig stetig, wenn $\|\tau_y f - f\|_u \to 0$ für $y \to 0$. $\diamond$

(1.9) Bemerkung
Die obige Definition der gleichmäßigen Stetigkeit ist äquivalent zur $\varepsilon - \delta$ Definition. $\diamond$

(1.10) Lemma (Lemma 8.4)
Wenn $f \in C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \ : \ \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$, dann ist f gleichmäßig stetig. $\diamond$

Eine wichtige Eigenschaft der Translation ist:

(1.11) Proposition (Proposition 8.5)
Sei $1 \leq p < \infty$, dann ist Translation eine stetige Operation in der L^p-Norm, d.h. für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lim_{y \to 0} \|\tau_{y+z} f - \tau_z f\|_p = 0.$$

$\diamond$

Dies gilt nicht für $p = \infty$, da z.B. die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ x \mapsto \mathcal{X}_{[0,1]}(x), \ \mathcal{X} \text{ Indikatorfunktion}$$

in $L^\infty(\mathbb{R})$ ist und für $y \neq 0$ gilt $\|\tau_y f - f\|_\infty = 1$.

§2 Faltung

Im Folgenden werden wir uns mit der Faltung zweier Funktionen beschäftigen. Man beachte, dass die hierbei erzielten Ergebnisse auch für periodische Funktionen des $\mathbb{R}^n$ Gültigkeit besitzen. Zur Vereinfachung wählen wir die Periode in jeder Variablen als 1, so dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ periodisch ist, wenn

$$f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}^n.$$

Demnach ist jede periodische Funktion vollständig durch ihre Werte auf dem Einheitswürfel

$$Q := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$$

bestimmt. Deshalb kann man periodische Funktionen auch als Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

ansehen. Dieser wiederum lässt sich mit der Menge aller $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ identifizieren, so dass $|z_j| = 1$ für alle j, indem man die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\exp(2\pi i x_1), \dots, \exp(2\pi i x_n))$$

betrachtet. Somit ist $\mathbb{T}^n$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Wenn wir die nachfolgenden Ergebnisse zur Faltung auf periodische Funktionen anwenden wollen, muss der Integrationsbereich von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T}^n$ verkleinert werden. Dies findet in der weiteren Arbeit keine Verwendung, wird jedoch in Vortrag 3 zur „Fourier-Analysis“benötigt.

(2.1) Definition (Faltung)
Seien f und g zwei messbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir die Faltung von f mit g als die Funktion $f * g$ gemäß

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y)dy,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, für die dieses Integral existiert. $\diamond$

Die Frage, die sich nun stellt, ist, welche Bedingungen an f und g notwendig sind, damit $f * g$ wenigstens fast überall existiert.
Im Weiteren benötigen wir die Tatsache, dass für eine messbare Funktion f gilt, dass $K(x,y) := f(x-y)$ messbar ist auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

(2.2) Proposition (Exercise 5, p 245)
Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $s(x,y) := x - y$, dann ist $s^{-1}(E)$ Lebesgue-messbar, wenn E Lebesgue-messbar ist. Somit ist s messbar. $\diamond$

Demnach ist $K = f \circ s$ messbar, wenn f messbar ist.

Die Faltung zweier Funktionen hat die folgenden Eigenschaften.

(2.3) Eigenschaften (Proposition 8.6)
Unter der Annahme, dass die folgenden Integrale existieren, gilt

a) $f * g = g * f$
b) $(f * g) * h = f * (g * h)$
c) für $z \in \mathbb{R}^n$: $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$
d) wenn A der Abschluss der Menge $\{x + y \ : \ x \in \operatorname{supp}(f),\ y \in \operatorname{supp}(g)\}$, dann ist $\operatorname{supp}(f * g) \subset A$. $\diamond$

— Existenz —

Nun noch einige Ergebnisse die uns Voraussetzungen für die Existenz der Faltung, zumindest fast überall, liefern.

(2.4) Proposition (Young Ungleichung, Proposition 8.7)
Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann existiert $f * g(x)$ für fast alle x, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. $\diamond$

(2.5) Proposition (Proposition 8.8)
Seien p, q konjugierte Exponenten, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (insbesondere also auch $p = 1$, $q = \infty$ und umgekehrt). Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, dann existiert $f * g(x)$ für alle x, $f * g$ ist beschränkt und gleichmäßig stetig und $\|f * g\|_u \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
Wenn $1 < p < \infty$, dann ist $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, wobei

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \ : \ \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } \{x : |f(x)| > \varepsilon\} \text{ kompakt}\}. \qquad \diamond$$

(2.6) Proposition (Proposition 8.9)
Angenommen $1 \leq p, q, r \leq \infty$ und $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Dann

a) [Young Ungleichung, allgemeine Form] Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

b) Sei zusätzlich $p > 1, q > 1$ und $r < \infty$. Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in$ *schwach* $L^q(\mathbb{R}^n)$ (siehe A.18), dann ist $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_r \leq C_{pq} \|f\|_p [g]_q$, wobei C_{pq} unabhängig von f und g ist.

c) Angenommen $p = 1$ und $r = q > 1$. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in$ *schwach* $L^q(\mathbb{R}^n)$, dann $f * g \in$ *schwach* $L^q(\mathbb{R}^n)$ und $[f * g]_q \leq C_q \|f\|_1 [g]_q$, wobei C_q unabhängig von f und g. ◇

— *Faltung und Differentiation* —

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Faltung ist, dass unter bestimmten Voraussetzungen an f und g die Funktion $f * g$ mindestens so glatt ist, wie f oder g, denn es gilt dann

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = \partial^\alpha \int f(x-y) g(y) dy = \int \partial^\alpha f(x-y) g(y) dy = (\partial^\alpha f) * g(x)$$

oder auf analogem Wege

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha (g * f) = f * (\partial^\alpha g).$$

Nun werden Bedingungen für f und g gesucht, so dass das Vertauschen des Intergrals und der Ableitung erlaubt ist.

(2.7) Proposition (Proposition 8.10)
Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha g$ beschränkt für $|\alpha| \leq k$, dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ für $|\alpha| \leq k$. ◇

Mit diesem Ergebnis können wir die folgende Aussage beweisen, welche uns die Vertauschung von Integration und Differentiation auf einer großen Menge von Funktionen erlaubt, sofern g nur kompakten Träger hat.

(2.8) Folgerung (Excercise 7, p 246)
Wenn $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, dann $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ für die $\int_K |f(x)| dx < \infty$ für jede kompakte messbare Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. ◇

Man beachte, dass $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.

Nun wollen wir noch zeigen, dass die Faltung zweier Funktionen des Schwartzraumes wieder im Schwartzraum ist.

(2.9) Proposition (Proposition 8.11)
Wenn $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Notation: Sei ϕ eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, $t > 0$, dann ist

$$\phi_t(x) := t^{-n}\phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

(2.10) Bemerkung
Wenn $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\int \phi_t$ unabhängig von t, da

$$\int \phi = \int \phi(y)dy = t^{-n}\int \phi\left(\frac{x}{t}\right)dx = \int \phi_t$$

Zudem gilt für $t \to 0$, dass sich die Masse von ϕ_t im Nullpunkt bündelt, da für alle $\varepsilon > 0$ ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq k_\varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon > \int\limits_{|y|>k} |\phi(y)|dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{(k,\infty)}(|y|)|\phi(y)|dy \\
&= t^{-n}\int \mathcal{X}_{(k,\infty)}\left(\frac{|x|}{t}\right)\left|\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right|dx \\
&= t^{-n}\int \mathcal{X}_{(tk,\infty)}(|x|)\left|\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right|dx \\
&= \int\limits_{|x|>tk} |\phi_t(x)|\,dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Wir kommen nun zu den beiden Hauptergebnissen dieser Arbeit.

(2.11) Satz (Theorem 8.14)
Angenommen $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int \phi(x)dx = a$.

a) Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, dann $f * \phi_t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} af$ in der L^P-Norm.

b) Wenn f beschränkt und gleichmäßig stetig, dann gilt $f * \phi_t \overset{glm.}{\underset{t \to 0}{\longrightarrow}} af$.

c) Wenn $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, f stetig auf $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, dann $f * \phi_t \to af$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U, für $t \to 0$. $\diamond$

Aus diesem Satz erhalten wir das folgende nützliche Ergebnis. Dies wird im Vortrag zur „Fourier-Analysis“Verwendung finden.

(2.12) Korollar (Proposition 8.17)
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und damit auch $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ und in $C_0(\mathbb{R}^n)$.$\diamond$

Mit etwas stärkeren Bedingungen an ϕ lässt sich sogar zeigen, dass $f * \phi_t \to af$ fast überall für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(2.13) Satz (Theorem 8.15)
Angenommen $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(n+\varepsilon)}$ für $C, \varepsilon > 0$ und $\int \phi(x)dx = a$. Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann gilt

$$f * \phi_t(x) \to af(x),\ t \to 0$$

für alle x in der Lebesgue Menge L_f von f (A.7). Insbesondere also für fast alle x und jedes x in dem f stetig ist. $\diamond$

Wenn wir dieses Ergebnis mit dem aus Folgerung 2.8 kombinieren, dann erhalten wir, dass für beliebiges $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, und $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, mit $\int g(x)dx = 1$, die Funktion

$$f * g_t \in \mathbb{C}^k(\mathbb{R}^n)$$

für alle $t > 0$ ist und

$$f * g_t(x) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f(x)$$

für jedes x in der Lebesguemenge L_f von f. Wir können also für jedes Element aus $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, Folgen von beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen konstruieren, die fast überall punktweise gegen f konvergieren.
Ähnliche Ergebnisse erhält man durch Kombination von Proposition 2.7 oder Folgerung 2.8 mit Satz 2.11.

§ A Verwendete Ergebnisse

— *Ergebnisse aus [1]* —

(A.7) Definition (Lebesgue Menge von f, p 97) Die Lebesgue Menge von f wird definiert als

$$L_f := \{x \ : \ \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0\},$$

wobei $B_r(x)$ die offene Kugel mit Radius r um x ist.

(A.11) Definition (Hausdorffraum, p 117) Ein topologischer Raum X ist ein Hausdorffraum, falls für $x \neq y$ disjunkte offene Mengen U und V existieren, so dass $x \in U$ und $y \in V$.

(A.15) Definition (Frechetraum, p 167) Ein vollständiger topologischer Hausdorffraum, dessen Topologie durch eine abzählbare Familie von Halbnormen bestimmt wird, ist ein Frechetraum.

(A.18) Definition (schwach L^p, p 197-198) Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und f eine messbare Funktion auf X. Für $0 < p < \infty$ ist $f \in$ *schwach* $L^p(\mathbb{R}^n)$, falls $[f]_p < \infty$, wobei

$$[f]_p := \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \right)^{1/p} = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \mu(\{x \ : \ |f(x)| > \alpha\}) \right)^{1/p}$$

Hierbei heißt λ_f die Verteilungsfunktion von f.

— *sonstige Ergebnisse* —

(A.1) Lemma
Sei $\{(N_i, \alpha_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^n$, $d(f,g) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|f-g\|_{(N_i,\alpha_i)}}{1+\|f-g\|_{(N_i,\alpha_i)}}$ und seien $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{S}$, so dass $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$, dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0 \iff \forall i \geq 1,\ \|f_k - f\|_{(N_i,\alpha_i)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$ ◇

Literatur

[1] Folland, Gerald B. (1999). *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, Second Edition*, John Wiley and Sons, Inc., New York.