Fourier-Analysis

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 21.03.2011

Stephanie Feddern

Die vorliegende Seminararbeit basiert auf den Seiten 247-254 des Buches *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications* von Gerald B. Folland. Sie gibt eine Einführung in die Fourier-Analysis, indem zunächst die Fourier-Transformation für spezielle periodische, messbare Funktionen definiert wird. Anschließend werden diese Resultate auf spezielle messbare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ übertragen. Ein Hauptresultat ist der Satz über die inverse Fourier-Transformation, der unter gewissen Bedingungen die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Fourier-Transformation ermöglicht.

§1 Einführung

Eines der fundamentalen Prinzipien der harmonischen Analysis ist das Ausnutzen von Symmetrien.
Betrachtet man einen Raum, auf dem eine Gruppe operiert, so ist die Idee, Funktionen zu untersuchen, die sich auf einfache Weise unter der Gruppenoperation transformieren lassen. Ziel ist es, beliebige Funktionen in Summen oder Integrale dieser simpleren Funktionen zu zerlegen.

Im Folgenden betrachten wir die Räume $\mathbb{R}^n$ sowie $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Beides sind Abelsche Gruppen mit der Addition als Gruppenoperation. In der harmonischen Analysis sind unsere Bausteine Funktionen, bei denen die Translation des Additionsoperators durch Multiplikation der Funktion mit einem Faktor vom Betrag 1 dargestellt werden kann. Man sucht also Funktionen für die gilt, dass für alle x ein $\phi(x)$ mit $|\phi(x)| = 1$ existiert, so dass $f(y+x) = \phi(x)f(y)$.
Haben f und ϕ diese Eigenschaft, dann ist $f(x) = \phi(x)f(0)$, also ist f vollständig durch ϕ bestimmt, wenn $f(0)$ gegeben ist.
Weiterhin gilt:

$$\phi(x)\phi(y)f(0) = \phi(x)f(y+0) = \phi(x)f(y) = f(x+y) = \phi(x+y)f(0).$$

Also falls $f \neq 0$, so gilt $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$.

Um alle f zu finden, die sich wie oben beschrieben verhalten, reicht es demnach alle ϕ mit Betrag 1 zu finden, die $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ erfüllen.

Wenn wir zusätzlich fordern, dass ϕ messbar ist, dann erhalten wir eine vollständige Lösung des Problems.

(1.1) Satz
Sei ϕ eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{T}^n$) mit $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ und $|\phi| = 1$. Dann existiert ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\xi \in \mathbb{Z}^n$), so dass $\phi(x) = e^{2\pi i \xi \cdot x}$. ◇

Mit diesem Satz haben wir also eine eindeutige Darstellung unserer Grundbausteine gefunden.

§2 Die Fourier-Transformation auf $\mathbb{T}^n$

siehe Ausarbeitung

§3 Die Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$

— *Die Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$* —

Wir wollen die Fourier-Transformation zunächst einmal für L^1-Funktionen definieren:

(3.1) Definition (Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wie die *Fourier-Transformation* von f durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx.$$

◇

Für diese lässt sich folgendes Resultat zeigen:

(3.2) Lemma
Es gilt für die Fourier-Transformation von f:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to BC(\mathbb{R}^n),$$

wobei $BC(\mathbb{R}^n)$ die beschränkten und stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. ◇

Nun wollen wir einige elementare Eigenschaften von $\mathcal{F}$ zusammenfassen:

(3.3) Satz
Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

a) $(\tau_y f)\hat{} = e^{-2\pi i\xi\cdot y}\hat{f}(\xi)$ und $\tau_\eta(\hat{f}) = \hat{h}$, wobei $h(x) = e^{2\pi i\eta\cdot x} f(x)$.

b) Ist T eine invertierbare lineare Transformation auf $\mathbb{R}^n$ und $S = (T^*)^{-1}$ die Inverse der Transponierten, dann gilt $(f \circ T)\hat{} = |\det T|^{-1}\hat{f} \circ S$. Insbesondere: Ist T eine Rotationsmatrix, gilt $(f \circ T)\hat{} = \hat{f} \circ T$; und wenn $Tx = t^{-1}x$ $(t > 0)$, dann gilt $(f \circ T)\hat{}(\xi) = t^n \hat{f}(t\xi)$, so dass $(f_t)\hat{}(\xi) = \hat{f}(t\xi)$ mit der Notation aus A.23.

c) $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.

d) Ist $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq k$, dann ist $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha \hat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]\hat{}$.

e) Ist $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq k$ und $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq k-1$, dann ist $(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

f) (**Riemann-Lebesgue Lemma**) $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$. ◇

Die Eigenschaften d) und e) aus obigem Satz liefern eine fundamentale Eigenschaft der Fourier-Transformation: Die Glattheit von $\hat{f}$ wird durch die Abklingrate der Funktion f im Unendlichen festgelegt und umgekehrt.

Wir betrachten im nächsten Korollar die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, der wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in C_\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \text{ für alle } N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha \text{ Multiindex} \Big\}.$$

Dabei ist

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \left|\partial^\alpha f(x)\right|$$

für irgendein $N \in \mathbb{N}_0$ und einen Multiindex α. Zur Erinnerung: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

(3.4) Korollar
$\mathcal{F}$ bildet den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich selbst ab. ◇

Wir erhalten insbesondere, dass die Fourier-Transformation eines Elementes des Schwartz-Raums wieder in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Dieses Resultat werden wir später noch verwenden.

Im Folgenden werden wir eine wichtige spezielle Fourier-Transformation berechnen, die wir im Beweis zu Satz 3.8 brauchen werden:

(3.5) Proposition
Ist $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ mit $a > 0$, dann gilt $\hat{f}(\xi) = a^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/a}$.

— *Die inverse Fourier-Transformation* —

Nun können wir die Fourier-Transformation invertieren:

(3.6) Definition (Inverse Fourier-Transformation)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die *inverse Fourier-Transformation* durch

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

◇

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zeigen wir, dass $(\hat{f})^\vee = f$. Einfaches Anwenden des Satzes von Fubini schlägt fehl, denn der Integrand von

$$(\hat{f})^\vee = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i\xi\cdot y} e^{2\pi i\xi\cdot x}\, dy\, d\xi$$

ist nicht in $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, |e^{-2\pi i\xi\cdot y}|\, |e^{2\pi i\xi\cdot x}|\, dy\, d\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy\, d\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_1\, d\xi.$$

Einen Ausweg bietet die Einführung einer Folge von Hilfsfunktion um die Anwendung des Satzes von Fubini zu ermöglichen. Die Betrachtung des Grenzwertes liefert uns dann das gewünschte Resultat.
Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

(3.7) Lemma
Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$. ◇

Ein analoges Resultat gilt für die inverse Fourier-Transformation, welches im folgenden Satz ebenfalls benötigt wird: Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\int \check{f} g = \int f \check{g}$.

Nun kommen wir zu einem Hauptresultat dieser Arbeit:

(3.8) Satz (Satz über die inverse Fourier-Transformation)
Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann stimmt f fast überall mit einer stetigen Funktion f_0 überein und es gilt $(\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f_0$. ◇

Wir haben mit obigem Satz also eine Möglichkeit gefunden, eine L^1-Funktion f aus ihrer Fourier-Transformierten fast überall zu rekonstruieren, falls $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Es folgen unmittelbar die folgenden beiden Resultate:

(3.9) Korollar
Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} = 0$, dann ist $f = 0$ fast überall. ◇

(3.10) Korollar
Die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein topologischer Isomorphismus. ◇

— *Die Erweiterung der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$* —

Die Frage ist nun, ob man die Fourier-Transformation auch auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ erweitern kann. Eine Antwort liefert folgendes Resultat:

(3.11) Satz (Satz von Plancherel)
Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}\big|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)}$ lässt sich eindeutig als unitärer Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. ◇

Wir haben nun also den Definitionsbereich der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ ausgeweitet.
Der Interpolationssatz von Riesz-Thorin (A.17) liefert das folgende Resultat für die dazwischenliegenden L^p-Räume, worauf im Vortrag nicht näher eingegangen wird:

(3.12) Satz (Hausdorff-Young Ungleichung auf $\mathbb{R}^n$)
Es sei $1 \leq p \leq 2$ und q der konjugierte Exponent zu p, es gelte also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ und $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$. ◇

Der Vollständigkeit halber definieren wir nun die Fourier-Integraldarstellung:

(3.13) Definition (Fourier-Integraldarstellung)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die *Fourier-Integraldarstellung* durch

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \, d\xi.$$

Diese stellt f als Superposition von Funktionen der Form $e^{2\pi i \xi \cdot x}$ dar. ⋄

Mit obiger Definition haben wir nun das zu Beginn gesteckte Ziel zumindest für L^1-Funktionen erreicht, deren Fourier-Transformation auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist: Wir können diese als Integral von Grundbausteinen der Form $e^{2\pi i \xi \cdot x}$ darstellen.
Die Fourier-Integraldarstellung kann man auch für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren, jedoch ist die punktweise Konvergenz nicht notwendiger Weise gegeben.

— *Die Poissonsche Summenformel* —

Zum Abschluss wollen wir noch einmal auf den Raum $\mathbb{T}^n$ zurückkommen und uns folgende Fragestellung ansehen:
Kann man aus einer gegebenen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine periodische Funktion konstruieren?
Intuitiv erhält man zwei mögliche Ansätze: Einerseits kann man $\mathbb{R}^n$ in n-dimensionale Würfel der Kantenlänge 1 zerlegen und f über all diese Würfel summieren, also $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x-k)$. Falls diese Reihe konvergiert, ist sie mit Sicherheit eine periodische Funktion. Andererseits kann man $\hat{f}$ auf $\mathbb{Z}^n$ einschränken und die Fourier-Reihe $\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \hat{f} e^{2\pi i \kappa \cdot x}$ betrachten. Beide Ansätze werden in folgendem Satz analysiert:

(3.14) Satz
Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_k f$ punktweise f.ü. und in $L^1(\mathbb{T}^n)$ gegen eine Funktion Pf mit $\|Pf\|_1 \le \|f\|_1$. Weiterhin ist die Fourier-Transformation auf $\mathbb{T}^n$ gleich der Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}^n$ für alle $\kappa \in \mathbb{Z}^n$: $(Pf)\hat{}(\kappa) = \hat{f}(\kappa)$ ⋄

Wir erhalten also, dass beide oben dargestellten Ansätze funktionieren und zur gleichen Antwort führen.

Wenn wir Bedingungen an f stellen, um zu garantieren, dass obige Reihe absolut punktweise konvergiert, können wir eine verfeinerte Aussage treffen:

(3.15) Satz (Poissonsche Summenformel)
Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und es gelte $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-n-\epsilon}$ und $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-n-\epsilon}$ für $C, \epsilon > 0$. Dann gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \hat{f} e^{2\pi i \kappa \cdot x},$$

wobei beide Reihen absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergieren. Insbesondere gilt für $x = 0$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}.$$

◇

§ A Verwendete Resultate

An dieser Stelle werden nur die Teile des Anhangs aufgeführt, die im Handout genannt werden. Es handelt sich dabei um Ergebnisse des Buches *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications* von Gerald B. Folland. Dabei entsprechen die Zahlen in Klammern der Nummerierung des Buches, die Seitenzahlen beziehen sich auf die 2. Auflage von 1999. Es wurden an manchen Stellen Ergänzungen vorgenommen, damit alle Bezeichnungen bekannt sind.

(A.17) Satz (6.27 Interpolationssatz von Riesz-Thorin, Seite 200)
Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ Maßräume und $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$. Falls $q_0 = q_1 = \infty$, sei außerdem ν semiendlich. Für $0 < t < 1$, seien p_t und q_t definiert durch

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Ist T eine lineare Abbildung von $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ nach $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$, so dass $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$ für $f \in L^{p_0}(\mu)$ und $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$ für $f \in L^{p_1}(\mu)$, dann gilt $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ für $f \in L^{p_t}(\mu)$, $0 < t < 1$. ◇

(A.23) Notation (8.13, Seite 242)
Für eine Funktion ϕ auf $\mathbb{R}^n$ und $t > 0$ schreiben wir

$$\phi_t(x) = t^{-n} \phi(t^{-1} x).$$

◇