

DIE FENSTER-FOURIERTRANSFORMATION

1. Elementare Eigenschaften der Fenster-Fouriertransformation

Definition 1. Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ beliebig. Dann ist für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die *Fenster-Fouriertransformation* von f bezüglich der *Fenster-Funktion* g definiert durch:

$$V_g f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt.$$

Lemma 2. Seien V, W, E normierte Vektorräume, sowie $T : V \times W \rightarrow E$ eine beschränkte, sesquilineare Abbildung, das heißt, es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $(v, w) \in V \times W$ gilt:

$$\|T(v, w)\|_E \leq C \cdot \|v\|_V \cdot \|w\|_W.$$

Dann ist T stetig.

Definition. Für $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir die *Translation*, die *Modulation*, beziehungsweise die *Involution* von f durch:

$$\begin{aligned} T_x f : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto f(z-x), \\ M_\omega f : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto e^{2\pi i \langle z, \omega \rangle} \cdot f(z), \\ g^* : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \overline{g(-z)}. \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} T_x : L^2(\mathbb{R}^d) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), & f &\mapsto T_x f, \\ M_\omega : L^2(\mathbb{R}^d) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), & f &\mapsto M_\omega f, \\ * : L^2(\mathbb{R}^d) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), & f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

wohldefinierte, isometrische, lineare Abbildungen, die den Relationen

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \circ M_\omega &= T_\omega \circ \mathcal{F}, \\ \mathcal{F} \circ T_x &= M_{-x} \circ \mathcal{F}, \\ T_x \circ M_\omega &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot M_\omega \circ T_x \end{aligned}$$

genügen. Weiterhin gilt für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|T_x f - T_z f\|_2 \xrightarrow{z \rightarrow x} 0.$$

Mit diesen Definitionen kommen wir zu den ersten Eigenschaften der Fenster-Fouriertransformation:

Lemma 3. Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $V_g f \in C_0(\mathbb{R}^{2d})$. Insbesondere ist $V_g f$ gleichmäßig stetig.

Weiter ist

$$V : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^{2d}) \subset L^\infty(\mathbb{R}^{2d}), \quad (f, g) \mapsto V_g f$$

eine beschränkte, sesquilineare Abbildung mit $\|V_g f\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$, also stetig.

Schließlich gelten die Darstellungen:

$$\begin{aligned} (V_g f)(x, \omega) &= \widehat{f \cdot T_x \overline{g}}(\omega) \\ &= \langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle \\ &= \left\langle \widehat{f}, (T_\omega \circ M_{-x})(\widehat{g}) \right\rangle \\ &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \widehat{f \cdot T_\omega \widehat{g}}(-x) \\ &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_{\widehat{g}} \widehat{f})(\omega, -x) \\ &= e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (f \star M_\omega g^*)(x) \\ &= (\widehat{f} \star M_{-x} \widehat{g}^*)(\omega) \\ &= e^{-\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \cdot \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} \cdot e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} dt. \end{aligned}$$

Lemma 4. Sei V ein komplexer Vektorraum, $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform und $\psi_f : V \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x, x)$ die zugehörige quadratische Form. Dann gilt für $x, y \in V$:

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (\psi_f(x+y) + i \cdot \psi_f(x+iy) - \psi_f(x-y) - i \cdot \psi_f(x-iy)).$$

Insbesondere folgt für Sesquilinearformen $f, g : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\psi_f = \psi_g$ schon $f = g$. Weiterhin erhält man die sogenannte Polarisationsformel

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 + i \cdot \|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i \cdot \|x-iy\|^2 \right).$$

Lemma 5. Seien $f_1, g_1, f_2, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist für $i \in \underline{2}$ auch $V_{g_i} f_i \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ mit $\|V_{g_i} f_i\|_2 = \|f_i\|_2 \cdot \|g_i\|_2$ und es gilt weiterhin:

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \overline{\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}.$$

Der Operator $V_g : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d}), f \mapsto V_g f$ ist also für alle $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ injektiv und für $\|g\|_2 = 1$ eine Isometrie.

2. Die Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation

Um die Formel für die Inverse des Operators V_g formulieren zu können, benötigen wir einen geeigneten Integrationsbegriff für vektorwertige Integrale; in unserem Fall ist dies das schwache Integral, auch Pettis-Integral genannt.

Definition 6. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und (X, M, μ) ein Maßraum. Dann heißt eine Funktion $f : X \rightarrow \mathcal{H}$ schwach integrierbar (beziehungsweise Pettis-integrierbar), falls für alle $h \in \mathcal{H}$ die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle f(x), h \rangle$ messbar ist, das Integral $\int_X \langle f(x), h \rangle d\mu(x)$ existiert und die Abbildung

$$\psi_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, h \mapsto \overline{\int_X \langle f(x), h \rangle d\mu(x)}$$

ein beschränktes, lineares Funktional auf \mathcal{H} ist. In diesem Fall existiert nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein eindeutiges $g \in \mathcal{H}$ mit $\psi_f(h) = \langle h, g \rangle$ für alle $h \in \mathcal{H}$. Wir definieren das Pettis-Integral von f als:

$$\int_X^w f(x) d\mu(x) := g \in \mathcal{H}.$$

Mittels des Pettis-Integrals können wir nun die Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation formulieren:

Satz 7. ((Schwache) Inversionsformel für die Fenster-Fouriertransformation)

Seien $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$. Dann gilt für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}}^w (V_g f)(x, \omega) \cdot (M_\omega \circ T_x)(\gamma) d\left(\frac{x}{\omega}\right).$$

Als Nächstes wollen wir eine starke Version der Inversionsformel formulieren. Dies ist ähnlich zum Fall der Fouriertransformation, bei der die punktweise Darstellung $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx$ nur für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt, aber die Funktionenfolge

$g_n(\omega) := \int_{[-n, n]^d} f(x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, \omega \rangle} dx$ auch für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definiert ist und L^2 -Konvergenz $\left\| g_n - \widehat{f} \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ vorliegt.

Satz 8. Seien $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ fest mit $\langle \gamma, g \rangle \neq 0$ und es sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Mengen $K_n \subset \mathbb{R}^{2d}$ mit $K_n \subset K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^{2d} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist

$$f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \int_{K_n} (V_g f)(x, \omega) \cdot ((M_\omega \circ T_x)(\gamma))(t) d\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert. Weiterhin ist $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

3. Wahl der Fensterfunktion $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\overline{(V_f g)(x, \omega)} = e^{2\pi i \langle x, \omega \rangle} \cdot (V_g f)(-x, -\omega).$$

Damit folgt insbesondere $|(V_f g)(x, \omega)| = |(V_g f)(-x, -\omega)|$. Das heißt, dass bei Vertauschen des Abschneidefensters g und der zu analysierenden Funktion f (jedenfalls betragsmäßig) nur die Argumente der Fenster-Fouriertransformation am Ursprung gespiegelt werden.

Dies bedeutet, dass das Fenster alleine basierend auf der Struktur der Fenster-Fouriertransformation nicht gegenüber der zu analysierenden Funktion ausgezeichnet ist.

Wir betrachten die Beispielfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oder } x > 30, \\ 3 \cdot \sin(8\pi x), & x \in [0, 10], \\ \frac{19}{10} \cdot (\sin(2\pi x) - \sin(14\pi x) + \sin(24\pi x)), & x \in [10, 20], \\ 3 \cdot \sin(\pi \cdot (x - 20)^2), & x \in [20, 30], \end{cases}$$

die in Abbildung 3.1 skizziert ist.

Die Fenster-Fouriertransformationen, die sich mit den beiden Abschneidefunktionen $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2/4}$ und $g_2 := \chi_{[-\frac{7}{20}, \frac{7}{20}]}$ ergeben, sind in den Abbildungen 3.2 und 3.3 zu sehen.

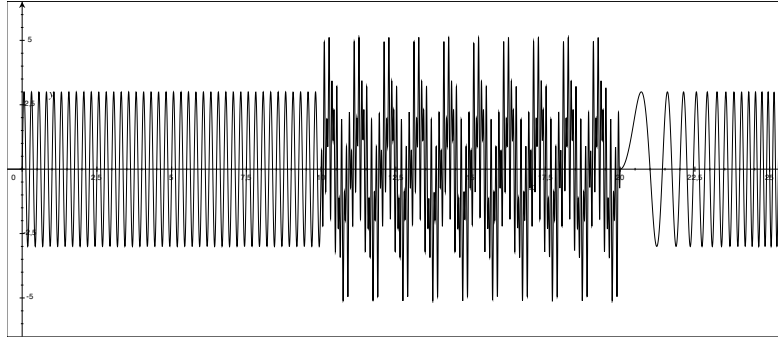


ABBILDUNG 3.1. Skizze der Funktion f .

Wie in den beiden Abbildungen zu erkennen ist, ist die Frequenzauflösung bei der Analyse mittels des Fensters g_1 besser als bei Analyse mittels g_2 . Im Gegensatz dazu ist die zeitliche Auflösung bei der Analyse mittels des Fensters g_2 besser als bei der Analyse mittels g_1 .

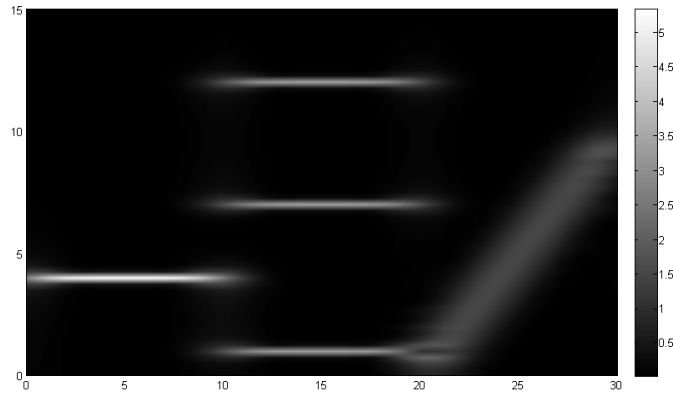


ABBILDUNG 3.2. Dichtegraph von $|V_{g_1} f|$.

Um diese Effekte heuristisch zu deuten, erinnern wir zunächst an die folgende Definition:

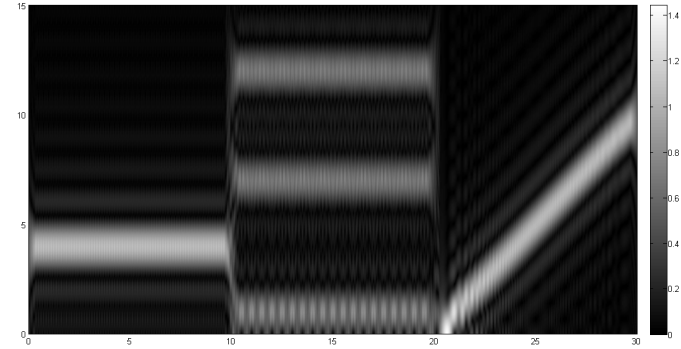


ABBILDUNG 3.3. Dichtegraph von $|V_{g_2} f|$.

Definition. Eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ heißt ε -konzentriert auf eine messbare Menge $T \subset \mathbb{R}^d$, falls gilt:

$$\left(\int_{T^c} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_2.$$

Mit dieser Definition im Zusammenhang steht die Unschärferelation von Donoho und Stark:

Satz. Sei $0 \neq f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ε_T -konzentriert auf $T \subset \mathbb{R}^d$. Weiterhin sei \hat{f} ε_Ω -konzentriert auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Falls $\varepsilon_T + \varepsilon_\Omega \leq 1$ gilt, so folgt:

$$\lambda_d(T) \cdot \lambda_d(\Omega) \geq (1 - \varepsilon_T - \varepsilon_\Omega)^2.$$

Für das Fenster $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sei g nun ε_T -konzentriert auf $T \subset \mathbb{R}^d$ und \hat{g} sei ε_Ω -konzentriert auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für kleine $\varepsilon_T, \varepsilon_\Omega \geq 0$. Dann ist $(M_\omega \circ T_x)(g)$ ε_T -konzentriert auf $x + T$ und $\mathcal{F}((M_\omega \circ T_x)(g)) = (T_\omega \circ M_{-x})(\hat{g})$ ist ε_Ω -konzentriert auf $\omega + \Omega$.

Das heißt, die Fenster-Fouriertransformation $(V_g f)(x, \omega) = \langle f, (M_\omega \circ T_x)(g) \rangle$ misst den Anteil der Zelle $(x + T) \times (\omega + \Omega)$ an der Zeit-Frequenz-Verteilung von f . Nun möchte man möglichst kleine Werte von $\lambda_d(T)$ (gute Zeitauflösung) und $\lambda_d(\Omega)$ (gute Frequenzauflösung) erreichen. Die Unschärferelation von Donoho und Stark besagt, dass dies nicht beliebig möglich ist, denn es muss gelten:

$$\lambda_d(T) \cdot \lambda_d(\Omega) \geq (1 - \varepsilon_T - \varepsilon_\Omega)^2.$$