Gabor Frames

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 22.03.2011

Bettina Hardy

Wir verwenden die folgenden Operatoren aus der Fourier-Analysis:

$$T_x f(t) = f(t-x) \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$
$$M_w f(t) = e^{2\pi i t w} f(t) \qquad w \in \mathbb{R}^d,$$
$$V_g f(x,w) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t w} dt \qquad g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}.$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

$$T_x^{-1} = T_{-x} = T_x^*,$$
$$M_w^{-1} = M_{-w} = M_w^*,$$
$$T_x M_w = e^{-2\pi i x w} M_w T_x.$$

— *Definition und wichtige Eigenschaften von Gabor Frames* —

(1.1) Definition (Gabor System/ Gabor Frame)
Seien eine Fensterfunktion $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ und Parameter $\alpha, \beta > 0$. Dann ist

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

ein Gabor System.
Falls $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame in $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist, so bezeichnet man es als Gabor Frame. Der zugehörige Gabor Frame-Operator ist definiert durch

$$Sf = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g.$$

◇

(1.2) Proposition
Sei $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame in $L^2(\mathbb{R}^d)$, dann existiert ein duales Fenster $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ so, dass $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ der duale Frame von $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ist. Hieraus folgt dann ebenfalls, dass jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ die folgenden Darstellungen besitzt:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \end{aligned}$$

wobei diese Reihen jeweils unbedingt konvergent in $L^2(\mathbb{R}^d)$ sind.
Außerdem sind die folgenden Normäquivalenzen erfüllt:

$$\begin{aligned} A\|f\|^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B\|f\|^2, \\ B^{-1}\|f\|^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma\rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2. \end{aligned}$$

◇

(1.3) Korollar
Sei $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame in $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit dualem Fenster $\gamma = S^{-1}g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ dann ist der inverse Frame Operator gegeben durch:

$$S_g^{-1}f = S_\gamma f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma\rangle T_{\alpha k} M_{\beta n}\gamma.$$

◇

Hieraus ergibt sich eine einfache Möglichkeit zum Invertieren des Gabor Frame-Operators.

— Existenz von Gabor Frames —

Wir wollen nun überprüfen, ob überhaupt ein Gabor Frame existiert und wie im Falle der Existenz eine geeignete Fensterfunktion aussehen könnte.
Dafür betrachten wir nun einen neuen Funktionenraum:

(2.1) Definition (Wiener Raum)
Der Wiener Raum ist gegeben durch

$$W = W(\mathbb{R}^d) = \{g \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \|g\|_W < \infty\}$$

wobei

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]^d} |g(x+n)|.$$

Der Unterraum der stetigen Funktionen wird mit $W_0(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet. ◇

(2.2) Korollar
Es gilt für alle $g \in W$:

$$\|g\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \|g T_n \chi_{[0,1]^d}\|_\infty$$

◇

(2.3) Bemerkung
Der Wiener Raum beinhaltet alle beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger und ist somit ein dichter Unterraum aller $L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$ ◇

(2.4) Lemma
Ist $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\gamma > 0$, dann gilt:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \gamma n)| \leq (\frac{1}{\gamma} + 1)^d \|g\|_W.$$

◇

(2.5) Lemma (Schur's Test)
Sei $(a_{jk})_{j,k \in J}$ eine unendliche Matrix über die Indexmenge J, so dass

$$\sup_{j \in J} \sum_{k \in J} |a_{jk}| \leq K_1, \qquad \sup_{k \in J} \sum_{j \in J} |a_{jk}| \leq K_2.$$

Dann ist der zugehörige, durch Matrix-Vektor-Multiplikation definierte, Operator A mit $(Ac)_j = \sum\limits_{k \in J} a_{jk} c_k$ beschränkt von $l^p(J)$ auf $l^p(J)$ für $1 \leq p \leq \infty$ mit $\|A\|_{l^p \to l^p} \leq K_1^{\frac{1}{q}} K_2^{\frac{1}{p}}$ (q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). ◇

(2.6) Definition (Synthese und Koeffizienten Operator)

$$Dc := \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g$$

$$(Cf)_{kn} = \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle \quad \text{für } k, n \in \mathbb{Z}^d$$

◇

(2.7) Korollar
Es gilt dann $Sf = DCf$ und $D = C^*$.
Damit gilt dann auch $\|S\| = \|DC\| = \|C^*C\| = \|C\|^2 = \|D\|^2$. ◇

(2.8) Proposition
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta > 0$. Dann ist $D_{g,\alpha,\beta}$ beschränkt von $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ nach $L^2(\mathbb{R}^d)$ und die Operatornorm erfüllt

$$\|D_{g,\alpha,\beta}\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha} + 1)^{\frac{d}{2}} (\frac{1}{\beta} + 1)^{\frac{d}{2}} \|g\|_W.$$

◇

(2.9) Korollar
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$, dann sind $C_{g,\alpha,\beta}$ und $S_g = D_g C_g$ beschränkte Operatoren mit

$$\|C_{g,\alpha,\beta}\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha} + 1)^{\frac{d}{2}} (\frac{1}{\beta} + 1)^{\frac{d}{2}} \|g\|_W,$$

$$\|S_g\|_{op} \leq (\frac{1}{\alpha} + 1)^d (\frac{1}{\beta} + 1)^d \|g\|_W^2.$$

◇