Existenz von Gabor-Frames

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 23.03.2011

Laura Neisius

In diesem Vortrag werden wir die Existenz von Gabor-Frames näher untersuchen. Hierzu werden wir betrachten, wann eine Fensterfunktion g einen Gabor-Frame erzeugt und wie dementsprechend die Parameter α und β gewählt werden müssen.

Erinnerung

Hier werden einige für den Vortrag relevante Erkenntnisse aus bereits vergangenen Präsentationen kurz zusammengefasst.

(0.1) (Gabor-Frame)
Sei $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und nicht die Nullfunktion.

Dann wird $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : k, n \in \mathbb{Z}^d\}$ mit $\alpha, \beta > 0$ *Gabor-System* genannt.

Ist $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame für $L^2(\mathbb{R}^d)$, so wird $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ *Gabor-Frame* genannt und es gilt für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $A, B > 0$

$$A\|f\|_2^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B\|f\|_2^2 \,.$$

In Operatorschreibweise also $AI \leq S \leq BI$.

Der Gabor-Frame-Operator S ist selbstadjungiert, beschränkt, positiv und invertierbar. $\diamond$

(0.2) (Wiener-Raum)
Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gehört g zum Wiener-Raum $W := W(\mathbb{R}^d)$, wenn

$$\|g\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in Q} |g(x+n)| < \infty$$

gilt mit $Q = Q_1 = [0, 1]^d$. $\diamond$

(0.3) (Walnut-Darstellung)
Sei $g \in W$ und $\alpha, \beta > 0$.

Die Walnut-Darstellung des Gabor-Frame-Operators gilt auf allen Banach-Räumen, in denen die beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger dicht liegen, und wird gegeben durch

$$S_{g,g}f = \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f$$

mit den Korrelationsfunktionen

$$G_n = G_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \tfrac{n}{\beta} - \alpha k) g(x - \alpha k)$$

Es gilt weiterhin, dass $G_n \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty \leq (\frac{1}{\alpha} + 1)^d (2\beta + 2)^d \|g\|_W^2 < \infty$

Wir wissen bereits, dass $S_{g,g}$ beschränkt ist auf allen Banach-Räumen, die

(i) isometrisch translationsinvariant, das heißt $\|T_x f\|_B = \|f\|_B$ gilt für alle $f \in B$, und

(ii) stabil, das heißt für alle $f \in B$ gilt

$$|g(x)| \leq |f(x)| \quad \Rightarrow \quad g \in B \text{ und } \|g\|_B \leq \|f\|_B \,,$$

sind.

Insbesondere ist $S_{g,g}$ also beschränkt auf allen $L^p := L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. ◇

§1 Einfache nicht-orthogonale Entwicklungen

In diesem Abschnitt werden wir einige einfache Beispiele für Gabor-Frames konstruieren. Dabei wird uns die Walnut-Darstellung des Gabor-Frame Operators unterstützen, welche wir in diesen speziellen Fällen noch weiter vereinfachen können. Da die im Folgenden vorgestellten Gabor-Frames sehr einfach zu handhaben sind, werden sie auch *einfache nicht-orthogonale Entwicklungen* genannt.

(1.1) Satz
Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit einem Träger in $Q_L = [0, L]^d$. Wenn $\alpha \leq L$ und $\beta \leq \frac{1}{L}$, dann ist der Frame-Operator $S = S_{g,g}$ der Multiplikationsoperator

$$Sf(x) = (\beta^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2) f(x)$$

Weiterhin ist $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ein Frame mit Frame-Schranken $\beta^{-d}a$ und $\beta^{-d}b$ genau dann, wenn

$$a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mid g(x-\alpha k) \mid^2 \leq b \qquad f.\ddot{u}.\,. \tag{1}$$

gilt. Weiterhin ist $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ genau dann ein starres Frame, wenn $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |g(x-\alpha k)|^2$ fast überall konstant ist. ◇

(1.2) Beispiele

(1) Sei nun $\alpha = L$ und supp$g = Q_L = [0,L]^d$. Weiterhin soll (1) gelten, d.h.

$$a \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mid g(x-\alpha k) \mid^2 \leq b \qquad f.\ddot{u}.$$

Dann gilt für $x \in Q_L : \sqrt{a} \leq |g(x)| \leq \sqrt{b}$ und g ist nicht stetig.

(2) Betrachte $g = \chi_{Q_L}$ und $\alpha = L$. Wieder gelte die Ungleichung (1). Dann folgt mit Satz (1.1), dass $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ein starres Frame ist mit $A = B = \beta^{-1}$ für $\beta \leq \frac{1}{L}$.

(3) Mit der Normierung $g = L^{-\frac{d}{2}}\chi_{Q_L}$ ist das Gabor-System $G(g,L,\frac{1}{L})$ sogar eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R}^d)$. ◇

Wie wir gesehen haben, ist es nicht weiter schwierig ein Gabor-System zu konsturieren, welches bereits eine Orthonormalbasis darstellt. Leider erreichen wir mit diesen Basiselementen nicht die gewünschte Genauigkeit in der Zeit-Frequenz-Analyse. Auch die Lokalisierbarkeit im Frequenzraum geht bei einer Treppenfunktion als Fensterfunktion verloren.

Nach sorgfältiger Betrachtung der Frame-Theorie stellt sich heraus, dass die Redundanz des Gabor-Systems sowie die Stetigkeit der zugehörigen Fensterfunktion notwendig ist, um eben die gewünschten Ergebnisse zu erhalten.

§2 Existenz von Gabor-Frames

Wir sind nun in der Lage für jede durchdacht gewählte Funktion g zu zeigen, dass sie für bestimmte Werte α und β einen Gabor-Frame erzeugt.
Eine Aussage, die ein zenrales Ergebnis der Untersuchung von Gabor-Frames ist, lässt sich wie folgt formulieren:

Wenn $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und α sowie β klein genug sind mit $\alpha, \beta > 0$, dann stellt $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ einen Frame für $L^2(\mathbb{R}^d)$ dar.

Um diese Aussage zu präzisieren, möchten wir im folgenden Kapitel wiederum den Frame-Operator $S_{g,g}$ und dessen Eigenschaften untersuchen. Wir erwarten, dass uns die Walnut-Darstellung des Frame-Operators mit den zugehörigen Korrelationsfunktionen

$$G_n(x) = G_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \tfrac{n}{\beta} - \alpha k) g(x - \alpha k)$$

die Suche nach geeigneten α und β erleichtern wird. Dabei legen wir ein besonderes Augenmerk auf die Invertierbarkeit von $S_{g,g}$, da diese zusammen mit dem Wissen, dass der Frame-Operator für eine Funktion $g \in W(\mathbb{R}^d)$ bereits beschränkt ist, impliziert, dass das System $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ einen Frame darstellt.

(2.1) Satz (WALNUT)
Seien $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha > 0$ so gewählt, dass für Konstanten $a, b > 0$ gilt

$$a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} | g(x - \alpha k) |^2 \leq b < \infty \qquad f.ü. \tag{2}$$

Dann existiert ein Wert $\beta_0 = \beta_0(\alpha) > 0$, sodass $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ einen Gabor-Frame für alle $\beta \leq \beta_0$ darstellt. Ist im Speziellen β_0 so gewählt, dass

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta_0)}\|_\infty < \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)| \tag{3}$$

gilt, dann ist $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Frame für alle $\beta \leq \beta_0$ mit Frame-Schranken

$$A = \beta^{-d} \left(a - \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty \right) \qquad \text{und} \qquad B = \beta^{-d} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty \right) . \tag{4}$$

$\diamond$

Für den Beweis benötigen wir folgenden

(2.2) Hilfssatz
Sei $g \in W(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\lim_{\beta \to 0} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta)}\|_\infty = 0 \,. \qquad \diamond$$

An (3) erkennt man, dass der Multiplikationsoperator $f \mapsto \beta^{-d} G_0 \cdot f$ die übrigen Terme dominiert:

$$(3) \qquad \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha,\beta_0)}\|_\infty < \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)| \,.$$

Man nennt den Frame-Operator dann *diagonal dominant*. Von dieser Beobachtung ausgehend, wollen wir nun die Invertierbarkeit von S in anderen Räumen herleiten.

(2.3) Korollar
Unter den Bedingungen von Satz (2.1) ist $S_{g,g}$ invertierbar auf jedem stabilen, isometrisch translations-invarianten Banach Raum $B \subseteq S'(\mathbb{R}^d)$, in dem die beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger dicht liegen. Im Speziellen ist $S_{g,g}$ also invertierbar auf allen $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. $\diamond$

Nun möchten wir die diagonale Dominanz des Gabor-Frame-Operators in der Matrix Darstellung untersuchen. Wir werden sehen, dass dies uns eine hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit von $S_{g,g}$ liefert, die ein wenig schwächer ist als (3). Dazu betrachten wir erst einmal folgendes

(2.4) Lemma
Sei $\left(a_{jl}\right)_{j,l \in J}$ eine Matrix, die einen beschränkten, positiven Operator A in $\ell^2(J)$ definiert und A sei diagonal dominant, das heißt, es gelte

$$\inf_{j \in J} \left(|a_{jj}| - \sum_{l:l \neq j} |a_{jl}| \right) \geq \delta > 0 \,. \tag{5}$$

Dann ist $A \geq \delta I$ in dem Sinne, dass $\langle Ac, c \rangle \geq \delta \|c\|_2^2 \quad \forall c \in \ell^2(J)$. Weiterhin folgt daraus, dass A invertierbar auf $\ell^2(J)$ ist und $\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \delta^{-1}$ gilt. $\diamond$

(2.5) Proposition (Ron-Shen)
Angenommen für $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha,\ \beta > 0$ ist der Gabor-Frame-Operator $S_{g,g}$ beschränkt in $L^2(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d}\left(G_0(x) - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^d\\ n\neq 0}} |G_n(x)|\right) = \delta > 0\ . \tag{6}$$

Dann ist $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ invertierbar auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ ist ein Frame. $\diamond$

(2.6) Bemerkung
Ist $g \in W(\mathbb{R}^d)$, so gilt (6) bereits, wenn α und β klein genug gewählt werden. $\diamond$

Literaturverzeichnis

[1] *Foundation of Time-Frequency Analysis* von *Karlheinz Gröchenig*

[2] Vorlesungsmitschrift zu der Vorlesung *Funktionalanalysis* im Wintersemester 2010/11 von *PD Dr. Alfred Wagner*