Die Janssen-Darstellung für Gabor-Frame-Operatoren

Vortrag zum Seminar Funktionalanalysis, 23.03.2011

Katharina Bosch

§7 Die Struktur des Gabor Systems

In diesem Kapitel des Seminars geht es noch einmal um das Gabor-System, seine tiefere Struktur und notwendige Bedingungen für die Beschänktheit und Invertierbarkeit des Frame-Operators.
Wir betrachten dabei auch die Janssen-Darstellung. Wie schon bekannt, hat das Gabor-System folgende Darstellung:

$$\mathcal{G}(g,\alpha,\beta) = \{T_{\alpha k}M_{\beta n}g : \ k,n \in \mathbb{Z}^d\}$$

— (7.1) —

Aus den vorigen Kapiteln sind die Darstellungen des Frame Operators $S = S^{\alpha,\beta}_{g,\gamma}$ und des Gabor Frames G_n bekannt:

$$Sf = \sum_{n,k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g\rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma, \tag{7.1}$$

$$G_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{g}(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k)\gamma(x-\alpha k).$$

Im Folgenden werden nun kleinere Sätze aufgestellt, die ausreichen, um die Strukturtheoreme der Gabor Frames herzuleiten.

(7.1.1) Satz
Seien $g,\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d),\ D_g$ und D_γ beschränkt auf $l^2(\mathbb{Z}^d)$, dann gilt für alle $f,h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger:

$$\langle S_{g,\gamma}f, h\rangle = \langle \beta^{-d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f, h\rangle. \tag{7.3}$$

◇

Zur Erinnerung: Der *Schwartz-Raum* ist definiert durch:

$$S(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha X^\beta f(x)| < \infty \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

Elemente aus dem Dualraum $S'(\mathbb{R}^d)$, der Raum aller stetigen und linearen Funktionale von $S(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, heißen auch temperierte Distributionen. Zum Beispiel ist für alle $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $1 \leq p \leq \infty$: $L_g(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ eine temperierte Distribution.

(7.1.2) Korollar
Seien $D_g,\ D_\gamma$ beschränkt, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}^d$:

$$\|G_n\|_\infty \leq \beta^d \|S_{g,\gamma}\|_{op}. \qquad \diamond$$

Des weiteren noch ein Satz über die Beschränktheit des Gabor-Frames:

(7.1.3) Korollar
Sei $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ ein Gabor-Frame mit den Frame-Grenzen A, B, dann gilt:

$$A \leq \beta^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \leq B \qquad \diamond$$

— *Kapitel 7.2: Die Janssen-Darstellung* —

In diesem Kapitel wird nun versucht, eine symmetrische Darstellung des Gabor-Frame Operators zu erhalten. Dafür werden zuerst die α-periodischen Korrelationsfunktionen in ihre Fourier-Reihen entwickelt.
Der l-te Fourierkoeffizient von G_n ist:

$$\hat{G_n}(l) = \alpha^{-d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g \rangle.$$

Im Folgenden nun die Janssen-Darstellung, welche komplementär zur der ursprünglichen Definition des Frame-Operators ist.
(1) : informale Entwicklung:

$$\begin{aligned} S_{g,\gamma} f &= \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n T_{\frac{n}{\beta}} f \\ &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g \rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} f. \end{aligned}$$

(2) : Operator Notation

$$S_{g,\gamma} = (\alpha\beta)^{-d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g \rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}}. \tag{7.8}$$

Bei der Betrachtung von *(7.8)* sind einige Fragen zur Konvergenz dieser Reihe offen. Es wird eine Hilfsdefinition eingeführt, damit technische Fragen dieser Art umgangen werden können.

(7.2.1) Definition
Ein Funktionenpaar (g, γ) in $L^2(\mathbb{R}^d)$ genügt der Bedingung (A') für Paramter $\alpha, \beta > 0$, wenn gilt:

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}^d} |\langle \gamma, T_{\frac{k}{\beta}} M_{\frac{l}{\beta}} g \rangle| < \infty. \tag{7.9}$$

Ist $g = \gamma$, so genügt g der Bedingung (A).
Bedingung (A') garantiert die absolute Konvergenz der Reihenentwicklungen *(7.7)* und *(7.8)*. ◇

(7.2.2) Lemma
(g, γ) genügt der Bedingung (A') für gegebenes $\alpha, \beta > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{g,\gamma} &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{l,n \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} g \rangle M_{\frac{l}{\alpha}} T_{\frac{n}{\beta}} \\ &= (\alpha\beta)^{-d} \sum_{l,n \in \mathbb{Z}^d} \langle \gamma, T_{\frac{l}{\beta}} M_{\frac{n}{\alpha}} g \rangle T_{\frac{l}{\beta}} M_{\frac{n}{\alpha}}. \end{aligned}$$ ◇

Nun folgt zum Schluss noch ein Beispiel, welches zeigt, dass die Bedingungen sehr speziell sind.
Wir haben $g = \gamma = \chi_{[0,1]}$.

$$\langle g, T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}} g \rangle = \langle M_{-\frac{l}{\alpha}} T_{-\frac{n}{\beta}} g, g \rangle.$$

Also ist:

$$\langle g, T_{\frac{n}{\beta}} M_{\frac{l}{\alpha}} g \rangle = \left| \frac{1 - e^{2\pi i l \alpha^{-1}}}{2\pi i l \alpha^{-1}} \right|.$$

Es gilt weiter, dass

$$|\langle M_{-\frac{l}{\alpha}} g, g \rangle| = \frac{\alpha | \sin(\frac{\pi l}{\alpha})|}{\pi |l|}.$$

Und somit divergiert die Reihe $\sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\chi}_{[0,1]}(\frac{l}{\alpha})|$, wenn $\alpha = \frac{p}{q}$ rational ist.
Im anderen Falle zeigt man, dass $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ mit $x_l = \frac{l}{\alpha}$ modulo 1 verteilt ist. Dann hat man, dass für Indizes l aus der Menge $\{l \in \mathbb{N} : \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{l}{\alpha} - k + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4}\}$ gilt:

$$\left| \sin(\frac{\pi l}{\alpha}) \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Insgesamt erfolgt damit die Divergenz der Reihe und haben ein Beispiel gefunden, für das die Bedingung nicht erfüllt ist, obwohl die charakteristische Funktion eine sehr einfache ist.