Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser
25. Oktober 2011

Aachen, den 27. Oktober 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 8

Wird besprochen am Mittwoch, den 2. November 2011, 9:55 Uhr

Aufgabe 33 Es sei G eine zusammenhängende, kommutative Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie:

(a) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ist ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus. Dabei wird $\mathfrak{g}$ mit seiner additiven Struktur betrachtet.

(b) Es gibt einen Gruppen-Isomorphismus $\varphi : \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^k \to G$, für $k, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ geeignet.

Bemerkung: Der Isomorphismus $\mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^k \to G$ kann glatt gewählt werden.

Aufgabe 34 Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathfrak{g}$ wie in Aufgabe 27. Zeigen Sie: Für $\|X\| + \|Y\| < \ln(2)$ konvergiert die Campbell–Baker–Hausdorff-Reihe

$$\begin{aligned} X * Y = {} & X + \\ & + \sum_{k,m \geq 0, p,q \in \mathbf{N}_0^k, p_i+q_i>0} \frac{(-1)^k}{(k+1)(1+|q|)} \frac{(\operatorname{ad} X)^{p_1} (\operatorname{ad} Y)^{q_1} \cdots (\operatorname{ad} X)^{p_k} (\operatorname{ad} Y)^{q_k} (\operatorname{ad} X)^m}{p!q!m!} Y \end{aligned}$$

absolut bezüglich $\|\cdot\|$.

Hinweis: Zeigen Sie die Abschätzung:

$$\|X * Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \, e^{\|X\|} \sum_{k>0} \frac{1}{k+1} (e^{\|X\|+\|Y\|} - 1)^k$$

Aufgabe 35 Es sei $\mathfrak{h} \subset \mathrm{su}(2)$ eine Lie-Algebra. Zeigen Sie $\dim(\mathfrak{h}) \in \{1, 3\}$.

Aufgabe 36 Beweisen Sie Bemerkung 9.8 b), d. h. bestimmen Sie die Koeffizienten der Campbell–Baker–Hausdorff-Formel für Ausdrücke mit bis zu zwei geschachtelten Lie-Klammern: $X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \ldots$