



Topologie, Übungsblatt 9

Abgabe bis Freitag, den 16. Dezember 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 37 (3 Punkte) Intervallschachtelungsprinzip In einem metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

- (a) Der Raum ist vollständig,
- (b) Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener, nichtleerer Mengen A_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$ gilt: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ besteht aus genau einem Punkt. Dabei ist $\text{diam}(B) = \sup \{d(x, y) : x, y \in B\}$ für $B \subset X$.

Aufgabe 38 (1+1+1 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $y \in X$ ein Punkt. Gibt es einen Punkt $a \in A$ mit $d(y, a) = \inf \{d(y, b) : b \in A\}$, wenn

- (a) A kompakt ist,
- (b) A abgeschlossen ist (betrachte z. B. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$),
- (c) $X = \mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Metrik und A abgeschlossen ist.

Aufgabe 39 (3 Punkte) Es sei X ein abzählbarer, kompakter Hausdorff-Raum, $x \in X$. Ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener Menge $U_n \subset X$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{x\}$, so ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x .

Aufgabe 40 (3 Punkte) Die Metriken $d_1(x, y) = |x - y|$ und $d_2(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ induzieren dieselbe Topologie auf \mathbb{R} .

Zeigen Sie: Es gibt eine Cauchy-Folge in (\mathbb{R}, d_2) , die keine Cauchy-Folge in (\mathbb{R}, d_1) ist.