



Lie-Gruppen I, Übungsblatt 10

Wird besprochen am Mittwoch, den 30. November 2011, 9:55 Uhr

Aufgabe 41 Es seien $A \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen in $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ mit positiven Einträgen, und N die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Dann ist AN die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung $\mathrm{SO}(2) \times A \times N \ni (k, a, n) \mapsto kan \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ ist ein Diffeomorphismus. Folgern Sie: $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ ist zusammenhängend, und $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ hat zwei Zusammenhangskomponenten.
- (b) Zeigen Sie: Dann hat $\mathrm{ad}(X)$ Rang zwei für alle $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \setminus \{0\}$.
- (c) Es seien $X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ mit $[X, Y] = X$. Zeigen Sie: Dann ist X nicht invertierbar.
(Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und betrachten Sie $\mathrm{Spur}(XYX^{-1} - Y)$.)

Bemerkung: Die Faktorisierung $g = kan$ nennt man Iwasawa-Zerlegung von $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.

Aufgabe 42 Es sei M eine Mannigfaltigkeit, auf der die Lie-Gruppe G glatt operiert. Auf dem Bahnenraum $M/G = \{G \cdot x : x \in M\}$ betrachten wir die Quotiententopologie: Es ist $U \subset M/G$ offen genau dann, wenn $\{x \in M : G \cdot x \in U\} \subset M$ offen ist.

- (a) Es sei G kompakt. Zeigen Sie: Die Quotiententopologie auf M/G ist Hausdorffsch.
- (b) Geben Sie ein Beispiel einer glatten, nichttransitiven Operation einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M an, bei der jeder Orbit dicht ist. Geben Sie die Quotiententopologie hier explizit an. (Hinweis zur Konstruktion: Sie können M als Lie-Gruppe wählen, und dazu eine geeignete Lie-Untergruppe G .)

Aufgabe 43 Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und (φ, H) eine zusammenhängende Lie-Untergruppe. Dann ist $\varphi(H)$ eine normale Untergruppe von G genau dann, wenn die Lie-Algebra $d\varphi|_e(\mathfrak{h})$ von H ein Ideal in $\mathfrak{g}$.