Lehrstuhl A für Mathematik — Aachen, den 9. Dezember 2011
Dr. M. Neuhauser
21. November 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 11

Wird besprochen am Mittwoch, den 14. Dezember 2011, 9:55 Uhr

Aufgabe 44 Es seien $A \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen in $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ mit positiven Einträgen, und N die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Dann ist AN die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen. Zeigen Sie:

(a) Es sei (ι, H) eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ mit $\dim(H) = 2$. Zeigen Sie: Dann gibt es $k \in \mathrm{SO}(2)$ mit $k\iota(H)k^{-1} = AN$. Speziell ist $\iota(H)$ abgeschlossen.

(*Hinweis*: Mit Aufgabe 41 (b) ist die Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ von H ist zweidimensional und nicht kommutativ. Dann wird $d\iota_e(\mathfrak{h})$ von zwei Elementen X, Y mit $[X, Y] = X$ aufgespannt und der Kern von X ist auch invariant unter Y.)

(b) Es sei (ι, H) eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, und $\iota(H)$ ein Normalteiler. Dann ist entweder H trivial oder $\iota(H) = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.

Aufgabe 45 Für $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n-1$, $\vartheta \in \mathbf{R}$ sei

$$R_k(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) & \\ & & -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Zeile}$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $p \in S^{n-1}$ existieren $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1} \in R$ mit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = R_1(\vartheta_1) \cdot R_2(\vartheta_2) \cdots R_{n-1}(\vartheta_{n-1}) \cdot p$$

(b) Die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist wegzusammenhängend.

(c) Die Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist die Zusammenhangskomponente von I_n in $O(n)$.

Aufgabe 46 Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, $H \subset G$ eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von G mit zugehöriger Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} = L(H) \subset \mathfrak{g}$.

Es sei $Z(H) = \{p \in G : pq = qp \forall q \in H\}$ der *Zentralisator* von H in G. Zeigen Sie: Der Zentralisator $Z(H)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe mit:

$$L(Z(H)) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] = \{0\}\}$$