Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 22. Dezember 2011

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 12

Wird besprochen am Mittwoch, den 11. Januar 2012, 9:55 Uhr

Aufgabe 47 Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, $H \subset G$ eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von G mit zugehöriger Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} = L(H) \subset \mathfrak{g}$.

Zeigen Sie: Der *Normalisator*

$$N(H) = \left\{ p \in G : pHp^{-1} = H \right\}$$

von H in G ist eine abgeschlossene Untergruppe von G. Zeigen Sie ferner:

$$L(N(H)) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

Folgern Sie: Genau dann ist H ein Normalteiler, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ ist.

Aufgabe 48 Es sei $V(n,k)$ die Menge der k-dimensionalen Teilräume des $\mathbf{R}^n$. Geben Sie eine Bijektion zwischen $V(n,k)$ und dem Quotienten $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ an. Dabei wird $O(k) \times O(n-k)$ kanonisch mit der Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} : p \in O(k), q \in O(n-k) \right\} \subset O(n)$$

identifiziert.

(*Hinweis*: Betrachten Sie eine geeignete Operation von $O(n)$ auf $V(n,k)$.)

Bemerkung: Durch die Bijektion wird $V(n,k)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$, die sogenannte *Graßmann-Mannigfaltigkeit*.

Aufgabe 49 Zeigen Sie: Es gibt keinen stetigen Schnitt $\sigma : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$.

Aufgabe 50 Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Wir schreiben $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ für die Gruppe aller Vektorraumautomorphismen von $\mathfrak{g}$, und $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ für die Gruppe aller Lie-Algebrenautomorphismen. Offensichtlich gilt $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(\dim(\mathfrak{g}), \mathbf{R})$; speziell ist $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ eine Lie-Gruppe, deren Lie-Algebra durch den Raum der Vektorraum-Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ gegeben ist. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

(b) Für $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linear gilt: Genau dann ist $T \in L(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$, wenn für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$T([X,Y]) = [T(X), Y] + [X, T(Y)]. \qquad (*)$$

Bemerkung: Lineare Abbildungen mit Eigenschaft $(*)$ nennt man auch *Derivationen* von $\mathfrak{g}$. Als Folgerung aus (b) erhält man: Der Kommutator zweier Derivationen ist wieder eine Derivation.