Lehrstuhl A für Mathematik
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 20. Januar 2012

Lie-Gruppen I, Übungsblatt 13

Wird besprochen am Mittwoch, den 25. Januar 2012, 9:55 Uhr

Aufgabe 51 Zeigen Sie: Der Kreis $S^1 = \mathbf{T}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Aufgabe 52 Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend. Zeigen Sie:

(a) Zu $\gamma : [0,1] \to S^n$ stetig existiert ein $m \geq 1$ mit $\|\gamma(s) - \gamma(t)\| < \frac{1}{2}$ für $|s-t| < \frac{1}{m}$.

(b) Zu dem Polygonzug $\delta : [0,1] \to S^{n+1}$, der die Punkte

$$\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{m}\right), \ldots, \gamma(1)$$

verbindet mit $\delta\left(\frac{k}{m}\right) = \gamma\left(\frac{k}{m}\right)$ für $k = 0, \ldots, m$, ist die durch $\alpha\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{1}{\|\delta(t)\|}\delta(t)$ definierten Kurve $\alpha : [0,1] \to S^n$ wohldefiniert und stetig.

(c) Es gilt $[\alpha] = [\gamma]$. *Hinweis*:

$$H(t,s) = \frac{(1-s)\gamma(t) + s\alpha(t)}{\|(1-s)\gamma(t) + s\alpha(t)\|}$$

(d) α ist nicht surjektiv. Das Bild von α ist die zentrische Projektion eines Polygonzuges auf die Sphäre.

(e) Ist $\beta : [0,1] \to S^n$ nicht surjektiv, so ist β nullhomotop. *Hinweis*: Es sei $p \in S^n \setminus \beta([0,1])$. Mittels stereographischer Projektion von p aus folgt die Homöomorphie von $S^n \setminus \{p\}$ und $\mathbf{R}^n$.

(f) $\pi_1(S^n) = \{0\}$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 53 Es seien M, N wegzusammenhängende topologische Räume. Zeigen Sie: $\pi_1(M \times N) \cong \pi_1(M) \times \pi_1(N)$.

Aufgabe 54 Bestimmen Sie für die folgenden Lie-Gruppen G die erste Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie: $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})$, $\mathrm{SO}(2)$, $\mathrm{SU}(2)$. (Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 13.10 aus der Vorlesung.)