Floquet-Theorie I

Ausarbeitung zum Seminar

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vortrag 11.10.2011

Gabriela Ansteeg

§1 Einleitung

Die nach dem französischen Mathematiker Gaston Floquet (1847-1920) [4] benannte Floquet-Theorie behandelt gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme der Form

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

wobei $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, $t \mapsto A(t)$ eine stetige, periodische Abbildung mit Periodendauer T ist.

Der Hauptsatz dieses ersten Abschnittes der Floquet-Theorie, der Satz von Floquet, wird uns eine kanonische Darstellung der Fundamentalmatrix der Differentialgleichung (1) liefern. Anhand dieser lässt sich künftig die Stabilität der Nulllösung, d.h. der Lösung zum Anfangswert Null, untersuchen. Darüber hinaus kann man mit dem Ergebnis zeigen, dass sich das System in ein homogenes lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten transformieren lässt, was Gegenstand späterer Vorträge ist.

§2 Einführung in die Floquet-Theorie

Im Folgenden wird die matrixwertige Exponentialreihe benötigt. Daher sei zu Beginn noch einmal daran erinnert, dass wir in der Vorlesung (Kap. II, Satz (2.3)) die Exponentialreihe für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ durch

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right)$$

definiert hatten. Außerdem werden die folgenden, in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften für $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ verwendet (Kap. II, Satz (2.4)):

a) Falls $AB = BA$, so ist $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
b) Falls B invertierbar, so ist $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1} \cdot \exp(A) \cdot B$.
c) $\exp(A)$ ist invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Zur Vorbereitung auf den Satz von FLOQUET benötigen wir den

(1.1) Satz.
a) Ist $C \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ eine invertierbare, komplexwertige Matrix, so gibt es eine komplexwertige Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{C})$, sodass $e^B = C$.

b) Ist $C \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ eine invertierbare, reellwertige Matrix, so gibt es eine reellwertige Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{R})$, sodass $e^B = C^2$.

Da wir im Beweis den natürlichen Logarithmus für komplexe Zahlen benötigen, machen wir zunächst folgende

(1.2) Definition. (Hauptzweig des komplexen Logarithmus)
Sei $w \in \mathbb{C}^*$ in der Polarkoordinatendarstellung

$$w = r \cdot e^{i\vartheta}, \qquad r > 0, \quad -\pi \leq \vartheta < \pi.$$

Dann ist der *natürliche Logarithmus von* $w \in \mathbb{C}^*$ definiert durch

$$\ln(w) := \ln(r) + i\vartheta.$$

Außerdem werden die folgenden beiden Hilfssätze aus der Vorlesung *Funktionentheorie* benötigt, die hier nicht bewiesen werden.

(1.3) Hilfssatz.
Für $w \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$e^{\ln(w)} = w.$$

(1.4) Hilfssatz.
Für $z \in \mathbb{C}^*$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}.$$

Darüber hinaus lässt sich für den Beweis Bemerkung I (6.9) nutzen:
Beschreiben zwei Potenzreihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit positivem Konvergenzradius die Funktionen f bzw. g in einer Veränderlichen, wobei $g(0) = c_0 = 0$, so ist die Reihendarstellung von $h(x) := f(g(x))$ gegeben durch

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{m} a_l \sum_{\substack{(i_1,\ldots i_l): \\ i_1+\ldots+i_l=m}} c_{i_1} \cdots c_{i_l} \right) x^m.$$

Beweis.
Gezeigt wird nur Teil a), Teil b) geht mit dem gleichen Ansatz.

a) Es genügt, die Aussage für invertierbare Matrizen in Jordan-Normalform zu zeigen. Denn angenommen, $C \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ ist nicht in Jordan-Normalform. Dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$, sodass $J = S^{-1}CS$ Jordan-Normalform hat. Gibt es dann eine Matrix $\tilde{B} \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{C})$, sodass $e^{\tilde{B}} = J$, so gilt $Se^{\tilde{B}}S^{-1} = C$ und mit II (2.4) b) dann $e^{S\tilde{B}S^{-1}} = Se^{\tilde{B}}S^{-1} = C$. Somit ist $B := S\tilde{B}S^{-1}$ wie gewünscht.
Sei nun also $C \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ in Jordan-Normalform, d.h., C besteht aus r Jordan-Kästchen $C_1, ..., C_r$, $r \in \mathbb{N}$. Wegen Lemma II (2.6) aus der Vorlesung genügt es, die Aussage für ein solches Kästchen zu zeigen.
Sei im Folgenden also $i \in \{1, ..., r\}$. Für die Matrix C_i gibt es eine Darstellung als $C_i = \lambda E + N$ mit zugehörigem Eigenwert λ und einer nilpotenten Matrix N, d.h., $N^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, wobei hier $m < n$ gilt. Da C invertierbar ist, sind alle Eigenwerte ungleich Null und die Matrix C_i lässt sich auch schreiben als

$$C_i = \lambda(E + \frac{1}{\lambda}N). \tag{$*$}$$

Definiert man nun den natürlichen Logarithmus für nilpotente Matrizen $Z \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{C})$ über

$$\ln(E + Z) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{Z^k}{k},$$

so konvergiert die Reihe wegen der Nilpotenz der Matrix Z und wir erhalten daher eine sinnvolle Definition, die auf unsere Matrix $\frac{1}{\lambda}N$ angewendet

$$\ln(E + \frac{1}{\lambda}N) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\frac{1}{\lambda}N)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{N^k}{k\lambda^k} =: M$$

ergibt.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass

$$\exp(\ln(E+Z)) = E + Z \tag{$**$}$$

gilt, wobei $Z \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix ist.
Um Bemerkung I (6.9) zu verwenden, setzen wir die Reihenentwicklungen

$$\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

wie in der Analysis I eingeführt, und

$$\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1,$$

gemäß Hilfssatz (1.4) an, wobei die Koeffizienten durch

$$a_i = \frac{1}{i!} \qquad \text{bzw.} \qquad c_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}, & k \neq 0 \end{cases}$$

gegeben sind.
Wegen Hilfssatz (1.3) wissen wir bereits, dass für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$h(1+z) = \exp(\ln(1+z)) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m} a_l \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_l):\\ i_1+\dots+i_l=m}} c_{i_1}\cdots c_{i_l}\right) z^m = 1 + z$$

gilt. Über das Cauchy-Produkt und Einsetzen erhält man die Aussage aus Bemerkung I (6.9) analog für Matrizen. Ein Koeffizientenvergleich liefert die (festen) Koeffizienten zu den entsprechenden Potenzen von Z in der allgemeinen Reihendarstellung

$$h(E+Z) = \exp(\ln(E+Z)) = \underbrace{a_0}_{=:d_0} E + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{m} a_l \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_l):\\ i_1+\dots+i_l=m}} c_{i_1}\cdots c_{i_l}\right)}_{=:d_m,\ m\in\mathbb{N}} Z^m,$$

die wegen der vorausgesetzten Nilpotenz der Matrix Z konvergiert: Es ist

$$d_m = \begin{cases} 1, & m \leq 1 \\ 0 & m > 1 \end{cases},$$

denn die skalarwertigen Koeffizienten sind identisch.
Somit erhalten wir die Gleichung $(**)$, also insbesondere

$$\exp(\ln(E + \frac{1}{\lambda}N)) = E + \frac{1}{\lambda}N.$$

Im nächsten Schritt setzen wir

$$B_i := \ln(\lambda)E + M.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} e^{B_i} &= \exp(\ln(\lambda)E + M) \overset{\text{II (2.4) a)}}{=} \exp(\ln(\lambda)E) \cdot \exp(\ln(E + \tfrac{1}{\lambda}N)) \\ &\overset{(**)}{=} (\lambda E)(E + \tfrac{1}{\lambda}N) = \lambda(E + \tfrac{1}{\lambda}N) \overset{(*)}{=} C_i. \end{aligned}$$

Also setze $B_i := \ln(\lambda)E + M$ und es gilt $e^{B_i} = C_i$. Für die Blockdiagonalmatrix $B := \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}$ erhält man somit $e^B = C$ wie gewünscht. □

Nun kommen wir zum

(1.5) Satz. (Satz von Floquet)
Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix des T-periodischen linearen Differentialgleichungssystems (1). Dann gilt

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Weiter gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, sodass

$$e^{TB} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T),$$

sowie eine T-periodische Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, $t \mapsto P(t)$ mit

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Außerdem gibt es eine reellwertige Matrix $R \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ und eine $2T$-periodische Funktion $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, $t \mapsto Q(t)$ mit

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tR} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis.
Die Funktion A: $\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, $t \mapsto A(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, da sie periodisch ist. Zudem ist sie nach Voraussetzung stetig und somit existiert nach Vorlesung (II (1.4) a)) die Lösung des Systems (1) auf ganz $\mathbb{R}$.
Setze $\Psi(t) := \Phi(t+T)$, dann ist auch $\Psi(t)$ eine Lösung von (1):

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t).$$

Definiere nun

$$C := \Phi^{-1}(0)\Phi(T) = \Phi^{-1}(0)\Psi(0).$$

Dann ist C invertierbar als Produkt zweier invertierbarer Matrizen. Da die Matrix C konstant ist und die Menge aller Lösungen des Systems (1) einen Vektorraum bilden (Kap. II (1.4) b)), ist $\Phi(t)C$ eine Fundamentalmatrix der linearen Differentialgleichung zum Anfangswert

$$\Phi(0)C = \Phi(0)\Phi^{-1}(0)\Psi(0) = \Psi(0).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung gilt dann $\Psi(t) = \Phi(t)C$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Man erhält daraus die erste Aussage des Satzes:

$$\begin{aligned} \Phi(t+T) &= \Psi(t) = \Phi(t)C = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T), \text{ sowie} \\ \Phi(t+2T) &= \Phi((t+T)+T) = \Psi(t+T) = \Phi(t+T)C = \Phi(t)C^2. \end{aligned}$$

Die zweite Aussage erhält man als Anwendung von Satz (1.1) a): Zu der Matrix $C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$, sodass

$$e^{TB} = C,$$

und nach Teil b) existiert eine Matrix $R \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ mit

$$e^{2TR} = C^2.$$

Setze nun $P(t) := \Phi(t)e^{-tB}$ und $Q(t) := \Phi(t)e^{-tR}$, dann gelten für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Phi(t+T)e^{-tB-TB} \\ &\overset{\text{II (2.4) a)}}{=} \Phi(t+T)e^{-TB}e^{-tB} \\ &= \Phi(t)Ce^{-TB}e^{-tB} \\ &\overset{\text{II (2.4) a),c)}}{=} \Phi(t)e^{-tB} \\ &= P(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q(t+2T) &= \Phi(t+2T)e^{-tR-2TR} \\ &\overset{\text{II (2.4) a)}}{=} \Phi(t+2T)e^{-2TR}e^{-tR} \\ &= \Phi(t)C^2e^{-2TR}e^{-tR} \\ &\overset{\text{II (2.4) a),c)}}{=} \Phi(t)e^{-tR} \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

Schließlich erhält man daraus die gesuchten Darstellungen

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= P(t)e^{tB} \\ &= Q(t)e^{tR}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

(1.6) Definition. (Floquet-Normalform)
Die Darstellung $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ im Satz von Floquet bezeichnet man als Floquet-*Normalform* der Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ eines Differentialgleichungssystems der Gestalt (1).

Nun betrachten wir vektorielle Lösungen des periodischen Systems (1) zu einem speziellen Anfangswert, welche sich unter Verwendung einer Fundamentalmatrix bestimmen lassen. Dies halten wir kurz fest in dem

(1.7) Lemma.
Es sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix des periodischen Systems (1), $\tau \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung zum Anfangswert $x(\tau) = v$ gegeben durch

$$\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)v.$$

Beweis.
Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(\tau)v = A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)v = A(t)\psi(t), \\ \psi(\tau) &= \Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau)v = v. \end{aligned}$$

Mit der Eindeutigkeit folgt die Behauptung. □

Verschiebt man den zur Zeit τ gehörigen Anfangsvektor v um eine Periode, so erhält man den Vektor $\Phi(\tau + T)\Phi^{-1}(\tau)v$. Die zugehörige Abbildung führt zu folgender

(1.8) Definition. (Monodromie-Operator, charakteristische Multiplikatoren)
Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix des T-periodischen linearen Differentialgleichungssystems (1) und sei $\tau \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto \Phi(\tau + T)\Phi^{-1}(\tau)v$$

heißt *Monodromie-Operator* des zugehörigen periodischen Systems.

b) Die Eigenwerte der Monodromie-Matrix $\Phi(\tau + T)\Phi^{-1}(\tau)$ nennt man *charakteristische Multiplikatoren* des Monodromie-Operators.

Die nachstehende Abbildung veranschaulicht die Funktion des Monodromie-Operators, welcher den Anfangsvektor v bei $t = \tau$ um eine Periode nach vorne verschiebt, also auf den Vektor $\Phi(\tau + T)\Phi^{-1}(\tau)v$ bei $t = \tau + T$.

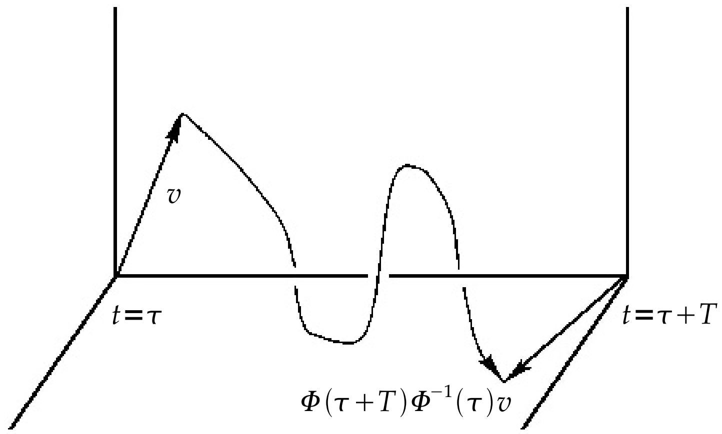

Abb.1: Funktion des Monodromie-Operators

Aus der Vorlesung ist der Begriff der Transversale in der Ebene bekannt (Kap. V, Definition (1.4)), sowie dass eine Lösung, die auf einer Transversalen startet und wieder zu ihr zurückkehrt, eine C^1-Abbildung induziert, die Poincaré-Abbildung (Kap. V, Definition (1.8)).
Auch in Dimensionen $n > 2$ lassen sich Transversalen und Poincaré-Abbildungen betrachten, wobei die Transversale dann einen $(n-1)$-dimensionalen affinen Unterraum darstellt (Kap. V, Bemerkung (1.9)).
Fasst man das periodische Differentialgleichungssystem (1) als das autonome System

$$\dot{y} = A(\psi)y, \qquad \dot{\psi} = 1,$$

auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$ mit $\mathbb{T} := [0, T]$ auf, so sind die Lösungen von der Gestalt

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ (t+c) \bmod T \end{pmatrix},$$

wobei $y(t)$ Lösung des ursprünglichen Systems $\dot{y} = A(t)y$ ist und c vom Anfangswert abhängt. $\mathbb{R}^n$ ist hierbei ein n-dimensionaler affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$.
Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt $\psi(t) = \psi(t + mT)$, d.h., es gibt eine Transversale $\mathbb{R}^n \times \psi_0$ mit $\psi_0 \in [0, T]$ fest, die von der Lösung immer wieder durchlaufen wird, und zwar stets nach genau einer Periode.
Damit stellt der Monodromie-Operator eine Poincaré-Abbildung dar.

(1.9) Proposition.
Gegeben sei das periodische homogene lineare Differentialgleichungssystem (1). Dann gelten:

a) Jede Monodromie-Matrix ist invertierbar. Anders ausgedrückt: Jeder charakteristische ist ungleich Null.

b) Alle Monodromie-Matrizen haben dieselben Eigenwerte, welche somit weder von der Wahl der Fundamentalmatrix noch vom Anfangswert abhängen.
Insbesondere gibt es – Vielfachheiten mitgezählt – genau n charakteristische Multiplikatoren.

Beweis.

a) Nach Definition des Monodromie-Operators als Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist er invertierbar und besitzt somit ausschließlich von Null verschiedene Eigenwerte.

b) Betrachten wir die Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ mit der Einheitsmatrix als Anfangswert zur Anfangszeit $t = 0$. Ist $\Psi(t)$ eine weitere Fundamentalmatrix, dann ist $\Psi(t) = \Phi(t)\Psi(0)$ wegen der Eindeutigkeit der Lösung.
Mit dem Satz von Floquet gilt weiter:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = \Phi(t)\Phi(T).$$

Für den Monodromie-Operator

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\, v \mapsto \Psi(\tau+T)\Psi^{-1}(\tau)v$$

erhält man

$$\begin{aligned}\Psi(\tau+T)\Psi^{-1}(\tau) &= \Phi(\tau+T)\Psi(0)\Psi^{-1}(0)\Phi^{-1}(\tau)\\ &= \Phi(\tau+T)\Phi^{-1}(\tau)\\ &= \Phi(\tau)\Phi(T)\Phi^{-1}(\tau)\end{aligned}$$

Also sind $\Psi(\tau+T)\Psi^{-1}(\tau)$ und $\Phi(T)$ zueinander ähnliche Matrizen und haben daher dieselben Eigenwerte. Da der Monodromie-Operator durch die beliebig gewählte Fundamentalmatrix $\Psi(t)$ allgemein gehalten war, haben also alle Monodromie-Matrizen dieselben n Eigenwerte. □

(1.10) Bemerkung.
In der Literatur findet man wegen der Gleichung $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ aus dem Satz von FLOQUET auch eine Definition der charakteristischen Multiplikatoren als Eigenwerte der Matrix $\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$. Diese Definition ist zu unserer äquivalent.

Beweis.
Um zu zeigen, dass beide Definitionen die gleichen Eigenwerte liefern, betrachten wir die FLOQUET-Normalform $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ mit $B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ und $P(t)$ T-periodisch.
Es ist $\Phi(0) = P(0) = P(T)$. Also erhält man

$$\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = e^{TB}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi(T)\Phi^{-1}(0) &= P(T)e^{TB}\Phi^{-1}(0)\\ &= \Phi(0)e^{TB}\Phi^{-1}(0)\\ &= \Phi(0)((\Phi^{-1}(0)\Phi(T))\Phi^{-1}(0),\end{aligned}$$

d.h., die Matrix $\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ hat dieselben Eigenwerte wie der Monodromie-Operator $\mathcal{M} : v \mapsto \Phi(T)\Phi^{-1}(0)$ zur Zeit $\tau = 0$ nach unserer Definition. □

Mit der FLOQUET-Darstellung der Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ des Systems (1) lässt sich die Monodromie-Matrix schreiben als

$$\begin{aligned}\Phi(\tau+T)\Phi^{-1}(\tau) &= P(\tau+T)e^{(\tau+T)B}(P(\tau)e^{\tau B})^{-1}\\ &= P(\tau)e^{\tau B}e^{TB}e^{-\tau B}P^{-1}(\tau)\\ &= P(\tau)e^{TB}P^{-1}(\tau),\end{aligned}$$

wobei die Voraussetzungen zur Anwendung von Lemma II (2.4) erfüllt sind.
Die obige Darstellung zeigt, dass die charakteristischen Multiplikatoren des Monodromie-Operators genau die Eigenwerte von e^{TB} sind.

(1.11) Definition. (charakteristischer Exponent / Floquet-Exponent)
Gegeben sei das T-periodische lineare System (1) mit einer Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ in der FLOQUET-Darstellung $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$.
$\mu \in \mathbb{C}$ heißt *charakteristischer Exponent* oder FLOQUET-*Exponent*, falls $\rho \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Multiplikator des durch $\Phi(t)$ definierten Monodromie-Operators ist und $e^{\mu T} = \rho$ gilt.

(1.12) Bemerkung.
Ist $\mu \in \mathbb{C}$ ein Floquet-Exponent, so ist auch $\mu + \frac{2\pi i k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Floquet-Exponent, denn $e^{(\mu+\frac{2\pi i k}{T})T} = e^{\mu T} e^{2\pi i k} = e^{\mu T} = \rho$. Das heißt, zu den n charakteristischen Multiplikatoren des T-periodischen linearen Differentialgleichungssystem (1) gibt es unendlich viele charakteristische Exponenten.

Anwendungen und Beispiele dieser Ergebnisse werden in folgenden Vorträgen behandelt.

§ 3 Literatur

[1] Carmen Chicone. Ordinary Differential Equations with Applications. Springer, 2^{nd} Edition, USA, 2006.

[2] Aloys Krieg, Sebastian Walcher. Gewöhnliche Differentialgleichungen. RWTH Aachen, 2010.

[3] Aloys Krieg. Analysis I. RWTH Aachen, 2007.

[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Gaston_Floquet