Reihenentwicklung von Lösungen V

Vortrag zum Seminar zur Gewöhnlichen Differentialgleichung, 20.12.2011

Jeanette Christin Beck

Wir haben bereits gesehen, dass die Differentialgleichung

$$L(y) = t^2y'' + t\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0$$

bei $t = 0$ einen regulären singulären Punkt hat. Mit Satz 4.2 folgt, dass mindestens eine Lösung der Form $\Phi_1(t) = |t|^{z_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ mit $c_0 = 1$ existiert, gültig in einer Umgebung von $t = 0$. z_1 ist dabei die Nullstelle des Indexpolynoms $f(z)$, welche den größten Realteil hat.

Desweiteren haben wir gesehen, dass wenn die zweite Nullstelle von $f(z)$ gleich der ersten Nullstelle ist (d.h. $z_1 = z_2$), oder wenn sich z_2 um eine ganze positive ganze Zahl von z_1 unterscheidet, dass dann (1) keine zweite linear unabhängige Lösung in der Form von $\Phi_1(t)$ besitzt.

§1 Lösungen nahe eines regulären singulären Punktes

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Form einer zweiten linear unabhängigen Lösung für den Fall $z_1 = z_2$ zu bestimmen.

(5.1) Satz
Die Differetialgleichung

$$L(y) = t^2y'' + t\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0 \tag{1}$$

sei gegeben, wobei α und β analytisch in $t = 0$ sind und für $|t| < r, r > 0$ konvergieren. Weiter seien z_1 und z_2 die Nullstellen des Indexpolynoms $f(z) = z(z-1) + \alpha_0 z + \beta_0$.

a) Wenn $z_1 = z_2$ gilt, dann existieren zwei linear unabhängige Lösungen Φ_1 und Φ_2 von der Form

$$\Phi_1(t) = |t|^{z_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \qquad \text{mit} \quad c_0 = 1$$

$$\Phi_2(t) = |t|^{z_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + \Phi_1(t)\log|\mathrm{t}|$$

für $0 < |t| < r$, wobei die Koeffizienten $c_k, b_k \in \mathbb{R}$ durch direktes Einsetzen in (1) bestimmt werden können.

b) Wenn $z_1 - z_2$ eine positive ganze Zahl ist, dann existieren zwei linear unabhängige Lösungen Φ_1 und Φ_2 von der Form

$$\Phi_1(t) = |t|^{z_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \qquad mit \quad c_0 = 1$$

$$\Phi_2(t) = |t|^{z_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + a\Phi_1(t)log(|t|)$$

für $0 < |t| < r$, wobei $a \in \mathbb{R}$ konstant ist und die Koeffizienten $c_k, b_k \in \mathbb{R}$ durch direktes einsetzen in (1) rekursiv bestimmt werden können.

Ich werde im weiteren Verlauf aber nur **Satz**(**5.1.a**) beweisen. Zudem werde ich vorerst auf dem Intervall $0 < t < r$ arbeiten und später eine Aussage über $t < 0$ treffen.

Beweis (Satz (5.1.a))
Bemerkung: Ich werde zuerst formal Vorgehen und anschließend die Gültigkeit durch einen Konvergenzbeweis darlegen.

Im letzten Vortrag haben wir gezeigt dass wenn $\Phi(t) = t^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ mit $c_0 = 1$ für $0 < t < r$ ist, dass dann gilt:

$$\begin{aligned} L(\Phi(t)) &= t^z\{(z(z-1) + \alpha_0 z + \beta_0)c_0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} [((k+z)(k+z-1) + (z+k)\alpha_0 + \beta_0)c_k + \sum_{j=0}^{k-1}((j+z)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j})c_j]t^k\} \\ &= t^z\{c_o f(z) + \sum_{k=1}^{\infty}[f(k+z)c_k + g_k(z)]t^k\} \qquad (*) \end{aligned}$$

wobei $f(z) = z(z-1) + \alpha_0 z + \beta_0$ und $g_k(z) = \sum_{j=0}^{k-1}((j+z)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j})c_j$ ist.

Da $f(z)$ ein Polynom 2. Grades ist, suchen wir Zahlen z, so dass $f(z+k) \neq 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Für solche z definieren wir ein rekursives c_k mit $c_0(z) = c_0 \neq 0$ und $f(z+k)c_k = -g_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, wobei c_o eine beliebige Konstante ist. Für $k = 0$ erhält man $f(z) = 0$.

Mit anderen Worten, wir definieren c_k als eine Lösung des rekursiven Systems $f(z+k)c_k = -g_k(z)$, jedoch für ein unbestimmtes z. Wie man sehen kann, ist hier c_k eine Funktion von z, da sowohl f als auch g von z abhängen. Dies war in den bisherigen Vorträgen nicht der Fall. Wir schreiben daher $c_k(z)$ anstelle von c_k.

Damit wird $(*)$ zu

$$L((\Phi(t,z)) = c_o t^z f(z). \tag{2}$$

Hier wurde $\Phi(t,z)$ anstelle von $\Phi(t)$ geschrieben um die Abhängigkeit der Funktion $\Phi(t) = t^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ von t und z zu betonen. Es ist klar, daß $\Phi(t,z_1)$ eine Lösung von $L(y) = t^2 y'' + t\alpha(t)y\prime + \beta(t)y = 0$ ist, dies wurde in Satz(4.1) gezeigt. Da z_1 eine Nullstelle des Indexpolynoms $f(z)$ ist, gilt $f(z_1) = 0$ womit folgt

$$L(\Phi(t,z_1)) = c_o t^{z_1} f(z_1) = 0$$

Diese Lösung wird im weiteren Verlauf mit $\Phi_1(t)$ bezeichnet. Da z_1 sogar eine Doppelte Nullstelle von $f(z)$ ist, gilt sogar $f'(z_1) = f(z_1) = 0$. Wenn (2) partiell nach z abgeleitet wird, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\Phi(t,z))}{\partial z} &= \frac{\partial(c_0 t^z f(z))}{\partial z} \\ &= c_o t^z [\log(\mathrm{t}) f(z) + f'(z)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Da $f'(z_1) = f(z_1) = 0$ folgt damit an der Stelle $z = z_1$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial L(\Phi(t,z))}{\partial z}\right|_{z=z_1} &= c_o t^z [\log(\mathrm{t}) f(z) + f'(z)]\big|_{z=z_1} \\ &= c_0 t^{z_1} [\log(\mathrm{t}) \underbrace{f(z_1)}_{=0} + \underbrace{f'(z_1)}_{=0}] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Da (2) partiell nach z abgeleitet wurde, kann auch

$$\frac{\partial L(\Phi(t,z))}{\partial z} = L\left[\frac{\partial \Phi(t,z)}{\partial z}\right]$$

geschrieben werden, Da $L(y)$ nicht explizit von z abhängt, sondern nur ihre Lösung $\Phi(t,z)$.
Damit zeigt (4), dass auch $\frac{\partial \Phi(t,z_1)}{\partial z}$ eine Lösung von
$L(y) = t^2 y'' + t\alpha(t)y\prime + \beta(t)y = 0$ ist. Diese Lösung wird als Φ_2 bezeichnet. (also $\Phi_2(t) = \frac{\partial \Phi(t,z_1)}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial z}$)

Aufgrund der Definition von $\Phi_1(t)$, wissen wir, dass gilt

$$\begin{aligned}\Phi_2(t) &= \frac{\partial\Phi(t,z)}{\partial z}\bigg|_{z=z_1} \\ &= \frac{\partial(t^z\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)t^k)}{\partial z}\bigg|_{z=z_1} \\ &= t^{z_1}\log(\mathrm{t})\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z_1)t^k + t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k'(z_1)t^k \\ &= \Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k'(z_1)t^k.\end{aligned}$$

Da c_0 konstant ist, folgt damit $c_0'(z_1) = 0$ und somit beginnt $\sum_{k=0}^{\infty}c_k'(z_1)t^k$ mit einem Term in t und wir können schreiben

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty}c_k'(z_1)t^k. \tag{5}$$

Da

$$\begin{aligned}c_k(z) &= \frac{-g_k(z)}{f(z+k)} \\ &= \frac{-\sum_{j=0}^{k-1}((j+z)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j})c_j}{(z+k)(z+k-1)+\alpha_0(z+k)+\beta_0}\end{aligned}$$

eine rationale Funktion ist, existieren auch die c_k' für $k \geq 1$, da $f(k+z) \neq 0$ und $g_k(z) = \sum_{j=0}^{k-1}((j+z)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j})c_j$ eine endliche Reihe ist.

Alle Rechnungen sind auch gültig, wenn t durch $|t|$ ersetzt wird.

Die Lösung $\Phi_2(t)$ ist wohldefiniert. Es ist also naheliegend, dass $L(y) = t^2y'' + t\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0$ in dem Fall $z_1 = z_2$ eine zweite lienar unabhängige Lösung von der Form

$$\begin{aligned}\Phi_2(t) &= \Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty}c_k'(z_1)t^k \\ &= \Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+1}'(z_1)t^{k+1} \\ &= \Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t^{z_1+1}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z_1)t^k. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Koeffizienten können auch hier durch Einsetzen von $\Phi_2(t)$ in $L(y) = t^2y'' + t\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0$ und einem Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Zeige nun noch, daß $\Phi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen von $L(y) = t^2y'' + t\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0$ sind.

Annahme: Seien $\Phi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ zwei linear abhängige Lösungen, dann gibt es A,B $\in \mathbb{R}$ mit A,B $\neq 0$, für die dann gilt

$$A\Phi_1 + B\Phi_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
A\Phi_1 + B\Phi_2 &= A(t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k) + B(\Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t^{z_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k) \\
&= A(t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k) + B\log(\mathrm{t})t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + t^{z_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k) \\
&= A(t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k) + B(\log(\mathrm{t})t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k + t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} t^k + t^{z_1}c_0\log(\mathrm{t})) \\
&= A(t^{z_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k) + B(t^{z_1}[\sum_{k=1}^{\infty} t^k(b_{k+1} + c_k\log(\mathrm{t})) + c_o\log(\mathrm{t})]) \\
&= A(t^{z_1}c_0 + t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k) + B(t^{z_1}c_o\log(\mathrm{t}) + t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} t^k(b_{k+1} + c_k\log(\mathrm{t}))) \\
&= At^{z_1}c_0 + At^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k + Bt^{z_1}c_o\log(\mathrm{t}) + Bt^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} t^k(b_{k+1} + c_k\log(\mathrm{t})) \\
&= t^{z_1}c_0(A + B\cdot\log(\mathrm{t})) + t^{z_1}\sum_{k=1}^{\infty} t^k(Ac_k + Bb_{k+1} + Bc_k\log(\mathrm{t})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da die lineare Abhängigkeit für alle t gelten soll und $c_0 \neq 0$ ist, müssen

$$A + B\log(\mathrm{t}) = 0 \qquad \textit{und} \qquad Ac_k + Bb_{k+1} + Bc_k\log(\mathrm{t}) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

sein.

$$
\begin{aligned}
&A + B\log(\mathrm{t}) = 0 \\
&\Leftrightarrow B\log(\mathrm{t}) = -A \\
&\Rightarrow \log(\mathrm{t}) = \frac{-A}{B} \lightning \qquad \text{da } \log(\mathrm{t}) \text{ nicht konstant ist} \\
&\Rightarrow B = 0 \\
&\Rightarrow A = 0
\end{aligned}
$$

Damit gilt $A = B = 0$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist.

Somit sind $\Phi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen von $L(y) = t^2y'' + t\alpha(t)y\prime + \beta(t)y = 0$. Analog zu Vortrag 1 kann eine konvergente Majorante bestimmt werden, sodass $\Phi_2(t)$ konvergiert für $0 < t < r$, und woduch die dieses Vorgehen seine Gültigkeit erhält. $\square$

Zurück zum Beispiel aus Vortrag III

(5.2) Beispiel
Wir bestimmten dort $\Phi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^k}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot k^2}$ als eine Lösung von $L(y) = t^2y'' + ty' + ty$. Das Indexpolynom $f(z)$ hatte in $z = 0$ eine doppelte Nullstelle. Wie suchen also eine zweite linear unabhängige Lösung in der Form Φ_2 mit $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)\log|\mathrm{t}| + |t| \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$.

Für $t > 0$ gilt:

$$\Phi_2'(t) = \Phi_1'(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_k t^k + \frac{1}{t}\Phi_1(t)$$

$$\Phi_2''(t) = \Phi_1''(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kb_k t^{k-1} + \frac{2}{t}\Phi_1'(t) - \frac{1}{t^2}\Phi_1(t)$$

Setze nun $\Phi_2(t), \Phi_2'(t), \Phi_2''(t)$ in $L(y) = t^2y'' + ty' + ty$ ein.
Damit erhält man,

$$\begin{aligned}
L(\Phi_2(t)) &= t^2[\Phi_1''(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kb_k t^{k-1} + \frac{2}{t}\Phi_1'(t) - \frac{1}{t^2}\Phi_1(t)] \\
&+ t[\Phi_1'(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_k t^k + \frac{1}{t}\Phi_1(t)] + t[\Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + t\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k] \\
&= t^2\Phi_1''(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kb_k t^{k+1} + 2t\Phi_1'(t) - \Phi_1(t) \\
&+ t\Phi_1'(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_k t^{k+1} + \Phi_1(t) + t\Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+2} \\
&= t^2\Phi_1''(t)\log(\mathrm{t}) + t\Phi_1'(t)\log(\mathrm{t}) + t\Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kb_k t^{k+1} + 2t\Phi_1'(t) - \Phi_1(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_k t^{k+1} + \Phi_1(t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Es gilt

$$t^2\Phi_1''(t)\log(\mathrm{t}) + t\Phi_1'(t)\log(\mathrm{t}) + t\Phi_1(t)\log(\mathrm{t}) = 0,$$

da $\Phi_1(t)$ bereits $L(y) = t^2y'' + ty' + ty$ erfüllt.

Damit wird (7) zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)kb_k t^{k+1} + 2t\Phi_1'(t) - \Phi_1(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_k t^{k+1} + \Phi_1(t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kb_k t^{k+1} + 2t\Phi_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)b_k t^{k+1} + b_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} t^{k+1} \\
&= b_0 t + 2t\Phi_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)kb_k + b_{k-1} + (k+1)b_k]t^{k+1} \\
&\overset{!}{=} 0**
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow b_0 + 2\Phi_1'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)kb_k + b_{k-1} + (k+1)b_k]t^k \\
&= b_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k \frac{t^{k-1}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)kb_k + b_{k-1} + (k+1)b_k]t^k \\
&= b_0 + 2((-1)t^0 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k k \frac{t^{k-1}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot k^2}) + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)^2 b_k + b_{k-1}]t^k \\
&= b_0 - 2 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k 2k \frac{t^{k-1}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)^2 b_k + b_{k-1}]t^k \\
&= b_0 - 2 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} 2(k+1) \frac{t^k}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot (k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)^2 b_k + b_{k-1}]t^k \\
&= b_0 - 2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k+1} 2(k+1) \frac{t^k}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot (k+1)^2} + (k+1)^2 b_k + b_{k-1}]t^k \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgrund des Identitätssatzes für Potenzreihen und einem Koeffizientenvergleich ist dies genau dann gleich Null, wenn $(k+1)^2 b_k = -\frac{(-1)^{k+1}2(k+1)t^k}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot (k+1)^2} - b_{k-1}$ und $b_0 = 2$ ist. Durch diese rekursive Relation können die b_k einfach bestimmt werden.

Bemerkung: Ich habe $(**)$ durch t geteilt. Dies ist jedoch unnötig, da der Identitätssatzes für Potenzreihen und Koeffizientenvergleich die gleiche Lösung hervorbringen würde.

— *Besselfunktion* —

Als Anwendung von Satz 4.2 und 5.1 betrachten wir nun eine der wichtigsten Gleichungen in der mathematischen Physik. Die Besselfunktion findet Anwendung in vielen Problemen mit Achsen-/ Zylindersymmetrie. Dazu gehören unter anderen Anwendungen bei denen Schwingungen und Wellen auftreten z.B. Wasserwellen in runden Behältern, Lichtbeugung an kreisförmigen Öffnungen oder auch in der Signalleitung in zylindischen Hohlleitern.

(5.3) Definition (Besselgleichung)
Sei $p \in \mathbb{C}$, $Re(p) > 0$. Dann lautet die Besselgleichung

$$L(y) = t^2y'' + ty' + (t^2 - p^2)y = 0. \tag{8}$$

(5.4) Satz (Besselfunktion) Ist $p \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0$, dann sind durch

$$J^p = \left|\frac{t}{2}\right|^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1^m}{m!\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

und

$$J^{-p} = \left|\frac{t}{2}\right|^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

zwei linear unabhängige Lösungen der Besselgleichung geben. J^p wird auch Besselfunktion 1.Art genannt.

Beweis
Bemerkung: Auch hier werden wir zuerst formal Vorgehen und anschließend die Gültigkeit durch einen Konvergenzbeweis darlegen.

Der Punkt $t = 0$ ist regulärer singulärer Punkt, denn es gilt $\alpha(t) = 1$ und $\beta(t) = p^2 - t^2$ sind analytisch in $t = 0$ und konvergieren für $|t| < \infty$.

Mit Satz 4.1 gilt, ist $p \neq 0$ oder $z_1 - z_2 \notin \mathbb{N}$, dann existieren zwei linear unabhängige Lösungen Φ_1 und Φ_2 von (7) in der Form

$$\Phi_1(t) = |t|^{z_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \qquad \text{mit} \qquad c_0 \neq 0$$

$$\Phi_2(t) = |t|^{z_2} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_k t^k \qquad \text{mit} \qquad \hat{c}_0 \neq 0$$

wobei auch hier die Koeffizienten c_k und $\hat{c}_k$ rekursiv bestimmt werden können.

Wir betrachten zuerst die Lösung $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ für $t > 0$. Dann gilt

$$\Phi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k) t^{z+k-1}$$

$$\Phi''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k)(z+k-1) t^{z+k-2}.$$

Einsetzen in die Besselgleichung liefert

$$\begin{aligned}
L(\Phi(t)) &= t^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k)(z+k-1) t^{z+k-2} + t \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k) t^{z+k-1} + (t^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{z+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{z+k} [(z+k)(z+k-1) + (z+k) + (t^2 - p^2)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{z+k} [(z+k)^2 + t^2 - p^2] \\
&= t^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k [(z+k)^2 + t^2 - p^2] \\
&= t^z \sum_{k=0}^{\infty} [c_k t^k ((z+k)^2 - p^2) + c_k t^{k+2}] \\
&= t^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k ((z+k)^2 - p^2) + t^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2} \\
&= t^z (c_0 \underbrace{(z^2 - p^2)}_{:=f(z)} + c_1((z+1) - p^2) t + \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^k ((z+k)^2 - p^2) + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^k) \\
&= t^z [c_0 f(p) + c_1 f(p+1) t + \sum_{k=2}^{\infty} t^k (c_k f(p+k) + c_{k-2})] \qquad (9)
\end{aligned}$$

Nach Vorraussetzung ist $c_0 \neq 0$, somit muss Aufgrund des Identitätssatze fÃijr Potezreihen $z^2 - p^2 = 0$ sein. Damit ist das Indexpolynom also gegeben durch $f(z) = z^2 - p^2$, welches $z_1 = p$ und $z_2 = -p$ als Nullstellen besitzt.

Weiter müssen $c_1 f(z+1) = 0$ und $c_k f(z+k) + c_{k-2} = 0$ sein.

Im weiteren Verlauf betrachte ich nur die Nullstelle $z_1 = p$. Der Fall $z_2 = -p$ kann analog berechnet werden.

Sein nun $z_1 = p$ und ersetze in (9) z durch p.
Dann gilt, dass aus $c_1 f(p+1) = 0$ folgt $c_1 = 0$,
da $f(p+1) = (p+1)^2 - p^2 = 2p+1 \neq 0$ ist, und aus $c_k f(p+k) + c_{k-2} = 0$ folgt $c_k = \frac{c_{k-2}}{f(p+k)} = \frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}$, da $f(p+k) = k(k+2p) \neq 0$ für $\forall k \in \mathbb{N}$.

Für die c_k gilt,

$$\begin{aligned}
k &= 2 & &\Rightarrow & c_2 &= \frac{-c_0}{2(2p+2)} \\
k &= 3 & &\Rightarrow & c_3 &= \frac{-c_1}{3(2p+3)} = 0 \\
k &= 4 & &\Rightarrow & c_4 &= \frac{-c_2}{4(2p+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 2^4 (p+1)(p+2)} \\
k &= 5 & &\Rightarrow & c_5 &= \frac{-c_3}{5(2p+5)} = 0 \\
&\vdots \\
k &= 2m-1 & &\Rightarrow & c_{2m-1} &= 0 \\
k &= 2m & &\Rightarrow & c_{2m} &= \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m!(p+1) \cdot (p+2) \cdot \ldots \cdot (p+m)}
\end{aligned}$$

Es ist nun zu zeigen, dass die Darstellung für c_{2m-1} und c_{2m} für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

<u>Induktion für c_{2m-1}</u>

IA : Es ist $c_{2m-1} = 0$.
Für $m = 1$ ist $c_1 = 0$✓
IV : Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $m \in \mathbb{N}$.

IS : $\quad m \to m+1$

$$\begin{aligned} c_{2(m+1)-1} &= c_{2m+1} \\ &= \frac{-c_{2m-1}}{f(p+(2m+1))} \\ &\overset{\text{IV}}{=} 0 \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$.

<u>Induktion für c_{2m}</u>

IA : Es ist $c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+m)}$.
Für $m = 1$ ist $c_2 = \frac{-c_0}{2^2(p+1)}$ ✓
IV : Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $m \in \mathbb{N}$.
IS : $\quad m \to m+1$

$$\begin{aligned} c_{2(m+1)} &= c_{2m+2} \\ &= \frac{-c_{2m}}{f(p+2m+2))} \\ &= \frac{-c_{2m}}{2(m+1)(2p+2m+2)} \\ &= \frac{-c_{2m}}{2^2(m+1)(p+m+1)} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{-(-1)^m c_0}{2^2(m+1)(p+m+1)2^{2m} m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+m)} \\ &= \frac{(-1)^{m+1} c_0}{2^{2(m+1)}(m+1)!(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+m)\cdot(p+m+1)} \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$.

Damit kann die Lösung Φ_1 geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= |t|^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \\
&= |t|^p (c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^k) \\
&= |t|^p \left(c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m c_0 t^{2m}}{2^{2m} m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+m)} \right) \\
&= |t|^p c_0 \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+m)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \right) \\
&= |t|^p c_0 \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+m)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \right) \\
&= |t|^p c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+m)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}
\end{aligned}$$

Erinnerung Γ - Funktion

Die Γ-Funktion ist nach Analysis II definiert durch

$$\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

und besitzt die folgenden Eigenschaften

$$\forall x > 0 \qquad \text{gilt} \qquad \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

$$\text{sowie} \qquad \Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir definieren nun c_0 als

$$c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= |t|^p c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+m)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \\
&= \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)} \cdot |t|^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+m)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \\
&= \left|\frac{t}{2}\right|^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \\
&= J^p(t)
\end{aligned}$$

Analog funktioniert das Verfahren für $z = -p$.
Wodurch man erhält

$$\Phi_2(t) = J^{-p}(t) = \left|\frac{t}{2}\right|^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

Es muß noch gezeigt werden, daß J^p und J^{-p} zwei linear unabhängige Lösungen von (7) sind.

Annahme: Seien J^p und J^{-p} zwei linear abhängige Lösungen, dann gibt es A,B $\in \mathbb{R}$ mit A,B $\neq 0$, für die dann gilt

$$AJ^p + BJ^{-p} = 0$$

$$\begin{aligned}
AJ^p + BJ^{-p} &= A \cdot \left|\frac{t}{2}\right|^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} + B \cdot \left|\frac{t}{2}\right|^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \\
&= A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)} \left|\frac{t}{2}\right|^{p+2m} + B \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left|\frac{t}{2}\right|^{-p+2m} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left|\frac{t}{2}\right|^{-p+2m}$$

den Term $|\frac{t}{2}|^{-p}$ enthält und die andere Reihe mit $|\frac{t}{2}|^p$ startet, folgt mit einem Koeffizientenvergleich, daß $B = 0$ gelten muß.

Andererseits muß gelten

$$A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)} \left|\frac{t}{2}\right|^{p+2m} = -B \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left|\frac{t}{2}\right|^{-p+2m}$$
$$= 0$$

woraus $A = 0$ folgt. Damit gilt $A = B = 0$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist.
Damit sind J^p und J^{-p} zwei linear unabhängige Lösungen von (7).

Wir müssen nur noch zeigen, daß J^p und J^{-p} konvergieren, damit unsere Vorgehen seine Gültigkeit erhält.

Zeige die Konvergenz von $J^p = |\frac{t}{2}|^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$.
Sei $U_m = \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)} |\frac{t}{2}|^{p+2m}$. Dann ist $U_m \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{U_{m+1}}{U_m}\right| &= \left|\frac{\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!\Gamma(m+p+2)}|\frac{t}{2}|^{p+2(m+1)}}{\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+p+1)}|\frac{t}{2}|^{p+2m}}\right| \\
&= \left|\frac{t}{2}\right|^2 \cdot \left|\frac{-\Gamma(m+p+1)}{(m+1)\Gamma(m+p+2)}\right| \\
&= \left|\frac{t}{2}\right|^2 \cdot \frac{1}{(m+1)\cdot(m+p+1)} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad m \to 0
\end{aligned}$$

Damit ist $J^p(t)$ nach dem Quatientenkriterium konvergent.

Zeige die Konvergenz von $J^{-p} = |\frac{t}{2}|^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$.
Sei $U_m = \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-p+1)} |\frac{t}{2}|^{-p+2m}$. Dann ist $U_m \neq 0$.

$$\left|\frac{U_{m+1}}{U_m}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!\Gamma(m-p+2)}\left|\frac{t}{2}\right|^{-p+2(m+1)}}{\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-p+1)}\left|\frac{t}{2}\right|^{-p+2m}}\right|$$

$$= \left|\frac{t}{2}\right|^2 \cdot \left|\frac{-\Gamma(m-p+1)}{(m+1)\Gamma(m-p+2)}\right|$$

$$= \left|\frac{t}{2}\right|^2 \cdot \frac{1}{(m+1)\cdot(m-p+1)} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad m \to 0 \qquad \square$$

Damit ist $J^{-p}(t)$ nach dem Quatientenkriterium konvergent.

Der Vollständigkeit halber, geben wir folgenden Satz ohne Beweis an.

(5.5) Satz

a) Ist $p = 0$, dann sind durch

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

und

$$K_0(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{2m} + \log|\mathrm{t}| \cdot J_0(t)$$

zwei linear unabhängige Lösungen für $t \neq 0$ gegeben.

b) Ist p eine positive ganze Zahl n, dann sind durch

$$J_n(t) = \left|\frac{t}{2}\right|^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

und

$$K_n(t) = -\frac{1}{2}\left|\frac{t}{2}\right|^{-n} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} + \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+k}\right)\right]\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$
$$+ J_n(t) \cdot log|t|$$

zwei linear unabhängige Lösungen für $t \neq 0$ gegeben. ($K_n(t)$ wird auch als Besselfunktion 2. Art bezeichnet.)