# Floquet-Theorie VI

Ausarbeitung zum Seminar
*Gewöhnliche Differentialgleichungen*

Vortrag 15. 11. 2011

Sara Bohmann

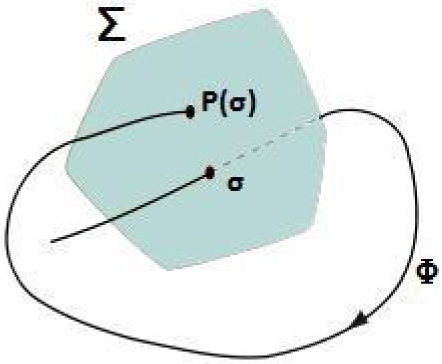
# §1 Einleitung

In diesem Teil der Floquet-Theorie wollen wir autonome Differentialgleichungen

$$\dot{u} = f(u) \quad , \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ stetig}$$

betrachten.

Sei dazu zunächst $t \mapsto \Phi(t, \sigma)$ , $\sigma \in \mathbb{R}^n$, eine Lösung solch einer autonomen Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung $\Phi(0, \sigma) = \sigma$ erfüllt.
$\Sigma$ sei ein Poincaré-Schnitt und $P$ die darauf definierte Poincaré-Abbildung gegeben durch $\sigma \mapsto \Phi(T(\sigma), \sigma)$ , $\sigma \in \Sigma$. Außerdem beschreibe $T : \Sigma \to \mathbb{R}_+^*$ die zugehörige Rückkehrzeitabbildung, die für einen Punkt $\sigma \in \Sigma$ die Zeit angibt, die dieser benötigt, um auf seinem Weg auf der Lösungsbahn zu $\Sigma$ zurückzukehren. Die Abbildungen $P$ und $T$ sind dabei nach Vorlesung stetig differenzierbar.
Diese vorliegende Situation soll in der folgenden Skizze verdeutlicht werden:




Insbesondere wollen wir uns nun mit geschlossenen Lösungsbahnen autonomer Differentialgleichungen beschäftigen. Sei dazu $\Gamma$ eine solche geschlossene Lösungsbahn. Sei zusätzlich $p \in \Gamma \cap \Sigma$ ein Fixpunkt der Poincaré-Abbildung (Es gilt also $P(p) = p$). Hat $\Gamma$ somit die Form

$$\Gamma = \{\Phi(t, p), t \geq 0\},$$

so ist $t \mapsto \Phi(t, p)$ periodisch, d.h. $\Phi(t, p)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und es existiert ein $\tau > 0$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\Phi(t + \tau, p) = \Phi(t, p)$.

Ziel dieses Vortrags ist es, ein Kriterium zu finden, mit dem wir geschlossene Lösungsbahnen auf asymptotische Stabilität untersuchen können.

# §2 Asymptotische Stabilität geschlossener Lösungsbahnen

Zuerst muss natürlich geklärt werden, was asymptotische Stabilität einer geschlossenen Lösungsbahn bedeutet.

**(6.1) Definition**
Sei $\Gamma$ eine geschlossene Lösungsbahn und $V$ eine Umgebung von $\Gamma$. Dann heißt $\Gamma$ *asymptotisch stabil*, wenn eine Umgebung $U$ von $\Gamma$ existiert, die in V enthalten ist und die Eigenschaft besitzt, dass jede Lösung von $\dot{u} = f(u)$, die in $U$ startet, in $V$ verläuft und asymptotisch zu $\Gamma$ ist.

Dass eine Lösung $t \mapsto \Phi(t, \sigma)$ , $\sigma \in \mathbb{R}^n$ , asymptotisch zu $\Gamma$ verläuft, bedeutet, dass sie der Lösungsbahn $\Gamma$ beliebig nahe kommt. Um dies mathematisch besser formulieren zu können, benötigen wir zunächst den Abstandsbegriff.

**(6.2) Definition**
Der *Abstand zwischen einem Punkt $q \in \mathbb{R}^n$ und einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$* ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(q, S) = \inf_{x \in S} |q - x| .$$

Der *Abstand zwischen zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$* ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

Wenn wir nun sagen, dass eine Lösung $t \mapsto \Phi(t, \sigma)$ , $\sigma \in \mathbb{R}^n$ , der Lösungsbahn $\Gamma$ beliebig nahe kommt, bedeutet das also:

$$\operatorname{dist}(\Phi(t, \sigma), \Gamma) \to 0 \ , \ t \to \infty.$$

Nun kommen wir zu dem Hauptsatz dieser Ausarbeitung, unserem Kriterium für asymptotische Stabilität geschlossener Lösungsbahnen.

**(6.3) Satz**
Sei $\Gamma$ eine geschlossene Lösungsbahn einer autonomen Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ und $P$ eine zugehörige Poincaré-Abbildung, definiert auf dem Poincaré-Schnitt $\Sigma$, sowie $p \in \Gamma \cap \Sigma$. Falls die Eigenwerte der Funktionalmatrix $DP(p)$ in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises liegen, dann ist $\Gamma$ asymptotisch stabil.

**(6.4) Bemerkung**
Die Vorraussetzung aus Satz (6.3), dass die Eigenwerte der Funktionalmatrix $DP(p)$ in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises liegen, bedeutet:
Ist $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ ein Eigenwert von $DP(p)$, so muss $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1$ gelten.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir zunächst die folgenden drei Zwischenresultate.

**(6.5) Korollar**
Falls alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises liegen, gibt es eine Norm $|\,.\,|$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda < 1$, sodass $|Av| < \lambda|v|$ für alle reellen und komplexen Vektoren $v$ gilt.

Korollar (6.5) soll in diesem Vortrag nicht bewiesen werden.

**(6.6) Lemma**
Angenommen, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$, sodass die geschlossene Lösungsbahn $\Gamma$ in $V$ und $\overline{V}$ im Definitionsbereich der Funktion $f$ enthalten sind. Für $t_* \geq 0$ existiert dann eine offene Menge $W \subseteq V$, die $\Gamma$ enthält und für die gilt, dass für jeden Punkt $\xi \in W$ die Lösung $t \mapsto \Phi(t, \xi)$ für $0 \leq t \leq t_*$ definiert und in $V$ enthalten ist. Außerdem gilt für $\xi, \nu \in W$ und $0 \leq t \leq t_*$:

$$|\Phi(t, \xi) - \Phi(t, \nu)| < |\xi - \nu|\, e^{Lt_*}.$$

$L$ ist dabei die globale Lipschitz-Konstante der Funktion $f$ auf $\overline{V}$.

In diesem Lemma wird implizit behauptet, dass aus den Voraussetzungen folgt, dass die Funktion $f$ auf $\overline{V}$ global einer Lipschitz-Bedingung genügt.
Dies kann man sich aber leicht klar machen, wenn man bedenkt, dass der Abschluss $\overline{V}$ nach Voraussetzung kompakt und die Funktion $f$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist. Die Lipschtiz-Stetigkeit folgt dann mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Die anderen Aussagen des Lemmas sind aus der Vorlesung bekannt. Sie entsprechen den Aussagen eines Hilfssatzes aus dem Beweis zu Satz III(2.5), der im Skript auf den Seiten S.83 unten und S.84 oben bewiesen wird.

Nun kommen wir zu einer Proposition, die uns im Beweis zu Satz (6.3) den asymptotischen Verlauf der geschlossenen Lösungsbahn liefern wird. Sie beschäftigt sich mit der n-fachen Anwendung der Poincaré-Abbildung auf einen Punkt $\sigma \in \Sigma$.

Zur Erinnerung:
Betrachtet wird die autonome Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ , $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, mit der Lösung $t \mapsto \Phi(t,\sigma)$ , $\sigma \in \mathbb{R}^n$, die die Anfangsbedingung $\Phi(0,\sigma) = \sigma$ erfüllt. $\Sigma$ ist ein Poincaré-Schnitt und $P$ die darauf definierte Poincaré-Abbildung gegeben durch $\sigma \mapsto \Phi(T(\sigma),\sigma)$ , $\sigma \in \Sigma$, wobei $T : \Sigma \to \mathbb{R}$ die zugehörige (stetig differenzierbare) Rückkehrzeitabbildung beschreibt. $\Gamma$ ist eine geschlossene Lösungsbahn und $p \in \Gamma \cap \Sigma$ ein Fixpunkt von $P$..

**(6.7) Proposition**
Sei $\sigma \in \Sigma$. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\sigma) = p$, dann folgt:

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,\sigma),\Gamma) = 0.$$

**Beweis.**
Zunächst benötigen wir die folgenden Hilfsannahmen und -definitionen:
Sei $\varepsilon > 0$ und $\Sigma_0$ eine offene Teilmenge des Poincaré-Schnitts $\Sigma$, sodass der Punkt $p$ in dieser Menge $\Sigma_0$ liegt und dass der Abschluss $\overline{\Sigma}_0$ eine kompakte Teilmenge von $\Sigma$ ist. Die Rückkehrzeitabbildung $T$ ist nach Definition stetig differenzierbar, also nach Analysis II ebenfalls stetig. Damit ist $T$ auf jedem Kompaktum beschränkt, also insbesondere auf $\overline{\Sigma}_0$. Sei $T^*$:=sup$\{T(\eta) : \eta \in \overline{\Sigma}_0\}$ diese obere Schranke.

Sei $V$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$, sodass die geschlossene Lösungsbahn $\Gamma$ in $V$ verläuft und der Abschluss $\overline{V}$ im Definitionsbereich $D$ von $f$ enthalten ist. Nach Lemma (6.6) (ersetze $t_*$ durch $T^*$) existiert dann eine offene Menge $W \subseteq V$, sodass $\Gamma$ in $W$ enthalten ist und dass für alle $\xi \in W$ die Lösung $s \mapsto \Phi(s,\xi)$ (die in $\xi$ startet) für $0 \leq s \leq T^*$ definiert ist und in $V$ verläuft.

Definiere nun für $\delta > 0$ die Menge $\Sigma_\delta = \{\eta \in \Sigma : |\eta - p| < \delta\}$, wobei $p \in \Gamma \cap \Sigma$ unser fester Punkt aus der Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\sigma) = p$ ist. Wähle nun ein $\delta > 0$ so klein, dass $\Sigma_\delta$ in $W \cap \Sigma_0$ enthalten ist und für alle $\eta \in \Sigma_\delta$ gilt:

$$|\eta - p|e^{LT^*} < \min\{m,\varepsilon\}, \tag{1}$$

wobei $m$ die minimale positive Distanz zwischen dem Rand von $V$ und $\Gamma$ ist und $L$ die globale Lipschitz-Konstante der Funktion $f$ auf $\overline{V}$ beschreibt.

Dass $f$ auf $\overline{V}$ global einer Lipschitz-Bedingung genügt, wurde bereits im Anschluss an Lemma (6.6) gezeigt. Die Verwendung der minimalen positiven Distanz $m$ zwischen dem Rand von $V$ und $\Gamma$ in Gleichung (1) sichert uns, dass die Lösung $\Phi(s,\eta)$ für $\eta \in \Sigma_\delta$ und $0 \leq s \leq T^*$ in $V$ bleibt.

Da nun nach Konstruktion $\Sigma_\delta \subseteq (W \cap \Sigma_0) \subseteq W$ und $p \in (\Gamma \cap \Sigma) \subseteq \Gamma \subseteq W$ gilt, folgt nach der zweiten Teilaussage von Lemma (6.6) für $\eta \in \Sigma_\delta$ und $0 \leq s \leq T^*$:

$$|\Phi(s,\eta) - \Phi(s,p)| < |\eta - p|e^{LT^*}.$$

Zusammen mit unserer Gleichung (1) ergibt sich dann für alle $\eta \in \Sigma_\delta$:

$$|\Phi(s,\eta) - \Phi(s,p)| < |\eta - p|e^{LT^*} \overset{(1)}{<} \min\{m, \varepsilon\} \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(\sigma) = p$. Diese Aussage ist äquivalent zu:
Für alle $\delta > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|P^n(\sigma) - p| < \delta$.
Es existiert also nach Konstruktion der Menge $\Sigma_\delta$ eine natürliche Zahl $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$P^n(\sigma) \in \Sigma_\delta. \tag{3}$$

Als nächstes benötigen wir folgendes Zwischenresultat:
Ist $t \geq \sum\limits_{j=0}^{N_0-1} T(P^j(\sigma))$, dann gibt es ein $n_0 \geq N_0$ und ein $s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq s \leq T^*$, sodass t in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$t = \sum_{j=0}^{n_0-1} T(P^j(\sigma)) + s. \tag{4}$$

Diese Aussage kann folgendermaßen gezeigt werden:
Sei $\sum\limits_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma)) \leq t \leq \sum\limits_{j=0}^{k+1} T(P^j(\sigma))$ für ein $k \geq N_0 - 1$. Dann gilt:

$$t = \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma)) + (t - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma))).$$

Wähle in (4) also $n_0 - 1 = k$ und $s = t - \sum\limits_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma))$.
Dann gilt: $n_0 = k + 1 \geq N_0 - 1 + 1 = N_0$ und

$$s = t - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma)) \leq \sum_{j=0}^{k+1} T(P^j(\sigma)) - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma)) = T(P^{k+1}(\sigma)).$$

Da die Rückkehrzeitabbildung $T$ auf $\Sigma_\delta \subseteq (W \cap \Sigma_0) \subseteq \Sigma_0 \subseteq \overline{\Sigma}_0$ durch $T^*$ beschränkt ist und $P^{k+1}(\sigma)$ nach (3) wegen $k+1 \geq N_0$ in $\Sigma_\delta$ liegt, gilt $s \leq T(P^{k+1}(\sigma)) \leq T^*$. Für das zu diesem $t$ gehörige $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt dann (nach (3)):

$$P^{n_0}(\sigma) \in \Sigma_\delta. \tag{5}$$

<u>Erinnerung</u> (Lokale Halbgruppeneigenschaft, Vorlesung Satz I(5.7)(a)) :
$f$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung und die Lösung $\Phi(x,z)$ existiere für alle $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und alle $x, x^* \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x + x^*, z) = \Phi(x, \Phi(x^*, z)). \tag{6}$$

Es wurde bereits gezeigt, dass $f$ auf ganz $\overline{V}$ sogar global einer Lipschitz-Bedingung genügt. Auch haben wir gesehen, dass die Lösung $s \mapsto \Phi(s,\xi)$ für alle $\xi \in W \subset \overline{V}$ definiert ist. Also können wir im Folgenden die lokale Halbgruppeneigenschaft der Lösung $\Phi$ nutzen.

Nun soll eine Identität für die n-fache Anwendung der Poincaré-Abbildung auf einen Punkt $\sigma \in \Sigma$ gezeigt werden, die später noch sehr nützlich sein wird:
Für $\sigma \in \Sigma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P^n(\sigma) = \Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma). \tag{7}$$

Wir werden diese Behauptung per Induktion über $n$ zeigen:

(IA) $n = 0$: Nach der Anfangsbedingung gilt: $\sigma = \Phi(0, \sigma)$.
$n = 1$: Nach Definition der Poincaré-Abbildung gilt: $P(\sigma) = \Phi(T(\sigma), \sigma)$.

(IV) Die Behauptung (7) gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$P^{n+1}(\sigma) = P(P^n(\sigma)) \overset{\text{(IV)}}{=} P(\Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma))$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \Phi(T(\Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma)), \Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma))$$

$$\overset{(6)}{=} \Phi(T(\Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma)) + \sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma)$$

$$\overset{\text{(IV)}}{=} \Phi(T(P^n(\sigma)) + \sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma)), \sigma) = \Phi(\sum_{j=0}^{n} T(P^j(\sigma)), \sigma)$$

Somit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Für ein $t = \sum_{j=0}^{n_0-1} T(P^j(\sigma)) + s$ mit $n_0 \geq N_0$ und $0 \leq s \leq T^*$ gilt nun:

$$\operatorname{dist}(\Phi(t,\sigma),\Gamma) \overset{(6.2)}{=} \inf_{q\in\Gamma} |\Phi(t,\sigma) - q| \leq |\Phi(t,\sigma) - \Phi(s,p)|$$

$$\overset{(4)}{=} |\Phi(\sum_{j=0}^{n_0-1} T(P^j(\sigma)) + s, \sigma) - \Phi(s,p)| = |\Phi(s + \sum_{j=0}^{n_0-1} T(P^j(\sigma)), \sigma) - \Phi(s,p)|$$

$$\overset{(6)}{=} |\Phi(s, \Phi(\sum_{j=0}^{n_0-1} T(P^j(\sigma)), \sigma)) - \Phi(s,p)| \overset{(7)}{=} |\Phi(s, P^{n_0}(\sigma)) - \Phi(s,p)| \overset{(2),(5)}{<} \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ war beliebig gewählt.
Daher gilt nun für alle $t \geq \sum_{j=0}^{N_0-1} T(P^j(\sigma))$ und $\epsilon > 0$:

$$\operatorname{dist}(\Phi(t,\sigma),\Gamma) < \varepsilon.$$

Also folgt wie gewünscht:

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,\sigma),\Gamma) = 0.$$

□

Nun sind wir bereit Satz (6.3), unser Kriterium für asymptotische Stabilität geschlossener Lösungsbahnen, zu beweisen:

**Beweis.**
<u>Zur Erinnerung:</u>
$\Gamma$ ist eine periodische Lösungsbahn einer autonomen Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ und $P$ eine zugehörige Poincaré-Abbildung, definiert auf dem Poincaré-Schnitt $\Sigma$, sowie $p \in \Gamma \cap \Sigma$ ein Fixpunkt von $P$. Die Eigenwerte der Ableitung $DP(p)$ liegen in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises.
Die Aussage des Satzes ist: Unter diesen Voraussetzungen ist $\Gamma$ asymptotisch stabil.

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $\Gamma$.
Nach Definition (6.1) ist dann zu zeigen, dass eine Umgebung $U$ von $\Gamma$ existiert, die in $V$ enthalten ist und die Eigenschaft besitzt, dass jede Lösung von $\dot{u} = f(u)$, die in $U$ startet, in $V$ verläuft und folgende Bedingung erfüllt:

$$\operatorname{dist}(\Phi(t,\sigma),\Gamma) \to 0 \ , \ t \to \infty$$

Der Beweis dazu wird folgenden Aufbau haben:

1) Existenz der Lösung $t \mapsto \Phi(t, \sigma)$, $\sigma \in \Sigma_0 \subseteq \Sigma$, für alle Zeiten $t \geq 0$
2) Existenz der Menge $U$ mit den Eigenschaften
   $\left.\begin{array}{l} \text{a) } \Gamma \subseteq U \\ \text{b) U offen} \end{array}\right\} \Rightarrow U$ Umgebung von $\Gamma$
   c) $U \subseteq V$
   d) Jede Lösung, die in $U$ startet, verläuft in $V$.
3) Asymptotischer Verlauf der Lösung $\Phi$, also
   $\text{dist}(\Phi(t, \sigma), \Gamma) \to 0$ , $t \to \infty$

*1) Existenz der Lösung $t \mapsto \Phi(t, \sigma)$, $\sigma \in \Sigma_0 \subseteq \Sigma$, für alle Zeiten $t \geq 0$:*

Sei $\Sigma'$ eine Hyperebene, die so groß gewählt wird, dass unser Poincaré-Schnitt $\Sigma$ eine Teilmenge dieser Hyperebene $\Sigma'$ ist. Nun legen wir die Koordinaten auf $\Sigma'$ genau so, dass unser $p \in \Gamma \cap \Sigma$ im Ursprung liegt. (Dass $p$ überhaupt in $\Sigma'$ enthalten ist, ist klar, da $p \in (\Gamma \cap \Sigma) \subseteq \Sigma \subseteq \Sigma'$.)
Im Folgenden werden wir alle Relationen in Bezug auf dieses Koordinatensystem auf $\Sigma'$ betrachten.

Dazu fassen wir die Funktionalmatrix $DP(p) = DP(0)$ der Poincaré-Abbildung $P$ an der Stelle $p = 0$ als Abbildung $DP(0) : v \mapsto DP(0)v$ , $v \in \Sigma'$ , auf.
$\Sigma'$ ist (wie auch $\Sigma$) eine Hyperebene der Dimension $n - 1$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\Sigma' \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0\} \text{ für ein } i \in \{1, ..., n\}.$$

Für $x \in \Sigma'$ gilt dann $(DP(0)x)_i = 0$, da $DP(0)$ als Matrixvektormultiplikation linear ist. Somit ist auch $DP(0)x \in \Sigma'$. Demnach bildet $DP(0)$ von $\Sigma'$ wieder nach $\Sigma'$ ab.
Man kann die Voraussetzung aus Satz (6.3), dass alle Eigenwerte der Funktionalmatrix $DP(p) = DP(0)$ in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises liegen, also auf die Eigenwerte der linearen Abbildung $DP(0) : \Sigma' \to \Sigma', v \mapsto DP(0)v$ übertragen.

Nach Korollar (6.5) gibt es damit eine Norm $| \, . \, |$ auf $\Sigma'$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda < 1$, sodass für alle Vektoren $v \in \Sigma'$ gilt:

$$|DP(0)v| < \lambda |v| \tag{8}$$

Somit folgt:

$$|DP(0)| = \sup_{v \in \Sigma', |v|=1} |DP(0)v| \overset{(8)}{<} \sup_{v \in \Sigma', |v|=1} \lambda |v| = \lambda \tag{9}$$

Wir nehmen nun an, $V$ habe den kompakten Abschluss $\overline{V}$.
Nach Lemma (6.6) (ersetze $t^*$ durch $2\tau$) existiert dann eine offene Menge $W$, die $\Gamma$ enthält und selbst im Abschluss von $V$ enthalten ist, mit der Eigenschaft, dass jede Lösung, die in $W$ startet, für $0 \leq t \leq 2\tau$ existiert und in $V$ verläuft, wobei $\tau := T(p) = T(0)$.
Da $p$ Fixpunkt der Poincaré-Abbildung $P$ ist, muss gelten:

$$\Phi(T(p), p) = P(p) = p = \Phi(0, p).$$

Also ist $\tau = T(p) = T(0)$ ein Vielfaches der Periode von $\Gamma$. $T(p)$ ist aber gleichzeitig die Zeit, die $p$ braucht, um auf der Lösungsbahn $\Gamma$ zum Poincaré-Schnitt $\Sigma$ zurückzukehren. $P$ bildet $p$ also auf den nach $p$ nächsten Schnittpunkt von $\Gamma$ mit $\Sigma$ ab. Das heißt aber, $\tau = T(p) = T(0)$ ist kein echtes Vielfaches der Periode, sondern ist die Periode selbst.

Sei $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ eine offene Kugel zentriert im Ursprung von $\Sigma'$. Es gilt also $\Sigma_0 = K_r(0)$ für ein $r > 0$. Wähle nun $r > 0$ so klein, dass:

1. $\Sigma_0 \subseteq W$ gilt.
2. die Rückkehrzeitabbildung $T$ eingeschränkt auf $\Sigma_0$ durch $2\tau$ beschränkt ist.
   Diese Bedingung an $\Sigma_0$ zu stellen ist möglich, da $T(p) = T(0) = \tau < 2\tau$ ($\tau > 0$) gilt und $T$ nach Definition stetig differenzierbar, also nach Analysis II auch stetig ist.
3. für alle $\sigma_0 \in \Sigma_0$ gilt:
   $$|DP(\sigma_0)| < \lambda. \tag{10}$$
   Die Poincaré-Abbildung $P$ ist stetig differenzierbar, also ist die Ableitung $DP(\sigma)$ in allen $\sigma \in \Sigma$ und somit insbesondere im Punkt $p = 0$ stetig. Auch die Norm $| \,.\, |$ ist nach Analysis II stetig. Außerdem gilt nach (9): $|DP(0)| < \lambda$. Somit ist auch diese Bedingung realisierbar.

Die Poincaré-Abbildung $P : \Sigma_0 \to \Sigma$ ($P$ eingeschränkt auf $\Sigma_0$) ist nach Definition differenzierbar. Außerdem ist die direkte Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten aus $\Sigma_0$ immer ganz in $\Sigma_0$ enthalten, da $\Sigma_0 = K_r(0)$ einen (offenen) Kreis beschreibt. Also gilt

$$S_{a,b} := \{a + t(b - a), t \in [0, 1]\} \subseteq \Sigma_0 \text{ für alle } a, b \in \Sigma_0.$$

Nach (10) gilt $|DP(\sigma_0)| < \lambda$ für alle $\sigma_0 \in \Sigma_0$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (MWS) gilt dann für $a, b \in \Sigma_0$:

$$|P(a) - P(b)| \leq \lambda |a - b|$$

Da 0 ein Fixpunkt der Poincaré-Abbildung $P$ ist, folgt für $\sigma_0 \in \Sigma_0$:

$$|P(\sigma_0)| = |P(\sigma_0) - P(0)| \leq \lambda|\sigma_0 - 0| = \lambda|\sigma_0|. \tag{11}$$

Insbesondere gilt damit (wegen $0 < \lambda < 1$):

$\sigma_0 \in \Sigma_0 \Rightarrow |\sigma_0| = |\sigma_0 - 0| < r \Rightarrow |P(\sigma_0) - 0| = |P(\sigma_0)| \overset{(11)}{\leq} \lambda|\sigma_0| < \lambda r < r.$

Somit gilt:

$$\sigma_0 \in \Sigma_0 \Rightarrow P(\sigma_0) \in \Sigma_0 \tag{12}$$

Durch iterative Anwendung von (12) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_0 \in \Sigma_0 \Rightarrow P^n(\sigma_0) \in \Sigma_0 \tag{13}$$

Lasst uns nun zeigen, dass alle Lösungen, die in $\Sigma_0$ starten, für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert sind.

Sei dazu zunächst $\sigma_0 \in \Sigma_0$ beliebig, aber fest.
Für die Menge $W$ haben wir bereits gezeigt, dass jede Lösung, die in $W$ startet, für $0 \leq t \leq 2\tau$ existiert.
Da nun nach Konstruktion $\Sigma_0 \subseteq W$ und $T(\sigma_0) \leq 2\tau$ gilt, ist auch die Lösung

$$t \mapsto \Phi(t, \sigma_0) \text{ für } 0 \leq t \leq T(\sigma_0) \tag{14}$$

definiert.

Im Beweis zu Proposition (6.7) haben wir bereits für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Identität gezeigt:

$$P^n(\sigma_0) = \Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0)), \sigma_0). \tag{15}$$

Nach (13) und (14) ist nun $\Phi(t, P^n(\sigma_0))$ für $0 \leq t \leq T(\sigma_0)$ definiert. Damit ist dann auch

$$\Phi(\underbrace{t + \sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0))}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty}, \sigma_0) \overset{(6)}{=} \Phi(t, \Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0)), \sigma_0)) \overset{(15)}{=} \Phi(t, P^n(\sigma_0))$$

für $0 \leq t \leq T(\sigma_0)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.
Somit ist $\Phi(t, \sigma_0)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert.

Da $\sigma_0 \in \Sigma_0$ beliebig gewählt war, folgt, dass alle Lösungen, die in $\Sigma_0$ starten, für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert sind.

*2) Existenz der Menge U mit den folgenden Eigenschaften*

- $\Gamma \subseteq U$
- *U offen*
- $U \subseteq V$
- *Jede Lösung, die in U startet, verläuft in V.*

Setze nun $U := \{\Phi(t, \sigma_0) | \sigma_0 \in \Sigma_0, t \geq 0\}$.

$\Gamma \subseteq U$ ist klar, da $p = 0 \in \Sigma_0$.
Weiterhin gilt nach 1): Jede Lösung, die in U startet, existiert für alle nichtnegativen Zeiten und verläuft nach Definition der Menge $U$ in $U$ und somit - wie wir gleich zeigen werden - auch in $V$.

Nun werden wir zeigen, dass U offen ist.

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nach Analysis I genau dann offen, wenn es für jeden Punkt $\xi \in U$ eine Umgebung von $\xi$ in $U$ gibt. Um zu zeigen, dass $U$ offen ist, setze also $\xi := \Phi(t_0, \sigma_0) \in U$ mit $\sigma_0 \in \Sigma_0$ und $t_0 \geq 0$. Um eine Umgebung von $\xi$ in $U$ zu finden, wollen wir den Satz über die Umkehrabbildung nutzen.

Erinnerung: (Satz über die Umkehrabbildung):
Sei $g : D \to E$ stetig differenzierbar und die Ableitung von $g$ sei an der Stelle $d \in D$ invertierbar. Dann existiert eine offene Umgebung $F$ von $d$ in $D$, sodass $g(F)$ offen und die Einschränkung $g : F \to g(F)$ ein Diffeomorphismus ist.

Unsere Lösung $\Phi$ des autonomen Differentialgleichungssystems $\dot{u} = f(u)$ ist nach Definition einer Lösung differenzierbar und somit nach Analysis I ebenfalls stetig. Auch die Funktion $f$ ist stetig. Also ist $\dot{\Phi} = f(\Phi)$ als Verkettung zweier stetiger Funktionen stetig. Somit ist $\Phi$ stetig differenzierbar.

Wenn wir nun die Einschränkung des Flusses $\Phi$ auf $(0, \infty) \times \Sigma_0$ betrachten, kann man - durch Nutzen der gleichen Idee wie beim Beweis des Begradigungssatzes - zeigen, dass die Ableitung $D\Phi$ im Nullpunkt und aufgrund ihrer Stetigkeit auch lokal um 0 invertierbar ist. Sei nun $\Sigma_0$ zusätzlich so klein gewählt, dass $D\Phi$ auf $(0, \infty) \times \Sigma_0$, also insbesondere in $(t_0, \sigma_0)$, invertierbar ist.

Dann existiert nach dem Satz über die Umkehrabbildung eine offene Menge $B$ von $(t_0, \sigma_0)$ in $(0, \infty) \times \Sigma_0$, sodass $\Phi(B)$ offen ist. Das heißt, es existiert eine offene Menge $\Phi(B)$ in $U$, wobei nach Konstruktion $\xi = \Phi(t_0, \sigma_0)$ in dieser offenen Menge $\Phi(B)$ enthalten ist (da $(t_0, \sigma_0)$ in $B$ enthalten ist).

Da eine solche Umgebung für jedes $\xi \in U$ existiert (da $\xi$ beliebig gewählt war), ist $U$ offen.

Nun wollen wir zeigen, dass $U$ in der Menge $V$ enthalten ist.
Setze dazu zunächst $\xi := \Phi(t_0, \sigma_0) \in U$ mit $t_0 \geq 0$ und $\sigma_0 \in \Sigma_0$.
Gezeigt werden muss nun, dass $\xi$ auch in $V$ liegt.

Um dies schlussfolgern zu können, schreiben wir zuerst $t_0 \geq 0$ um.
Für das gegebene $t_0 \geq 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma_0)) \leq t_0 \leq \sum_{j=0}^{k+1} T(P^j(\sigma_0)).$$

Es gilt außerdem:

$$t_0 = \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma_0)) + (t_0 - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma_0))).$$

Definiere nun $n := k + 1 \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{R}$ mit

$$s := t_0 - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma_0)).$$

Dann gilt:

$$s = t_0 - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma_0)) \leq \sum_{j=0}^{k+1} T(P^j(\sigma_0)) - \sum_{j=0}^{k} T(P^j(\sigma_0)) = T(P^{k+1}(\sigma_0)) = T(P^n(\sigma_0)).$$

Da $P^n(\sigma_0)$ wegen $\sigma_0 \in \Sigma_0$ nach (13) in $\Sigma_0$ liegt und $T(P^n(\sigma_0))$ deshalb durch $2\tau$ beschränkt ist, gilt auch $s \leq 2\tau$.
Insgesamt gibt es also für das zu $\xi$ gehörige $t_0 \geq 0$ die folgende Darstellung

$$t_0 = \sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0)) + s \tag{16}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s \leq 2\tau$. Insbesondere folgt damit:

$$\begin{aligned} \xi = \Phi(t_0, \sigma_0) &\overset{(16)}{=} \Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0)) + s, \sigma_0) = \Phi(s + \sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0)), \sigma_0) \\ &\overset{(6)}{=} \Phi(s, \Phi(\sum_{j=0}^{n-1} T(P^j(\sigma_0)), \sigma_0)) \overset{(15)}{=} \Phi(s, P^n(\sigma_0)) \end{aligned} \tag{17}$$

Da nun $0 \leq s \leq 2\tau$ und $P^n(\sigma_0) \in \Sigma_0 \subseteq W$ gilt, folgt $\xi \in V$ (da, wie am Anfang des Beweises gezeigt, jede Lösung, die in $W$ startet, für alle $0 \leq s \leq 2\tau$ in $V$ verläuft).

*3) Asymptotischer Verlauf der Lösung $\Phi$*

Um den asymptotischen Verlauf der Lösung $\Phi$ zu zeigen, wollen wir Proposition (6.7) in einer etwas veränderter Form nutzen.
Betrachte dazu

$$\lim_{n\to\infty} P^n(P^n(\sigma_0)) = \lim_{n\to\infty} P^{2n}(\sigma_0) = \lim_{n\to\infty} P^n(\sigma_0). \tag{18}$$

Da $p = 0$ ein Fixpunkt der Poincaré-Abbildung $P$ ist, gilt $P^n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Somit folgt für $\sigma_0 = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P^n(\sigma_0) = \lim_{n\to\infty} P^n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Um zeigen zu können, dass der Grenzwert auch für $\sigma_0 \neq 0$ gleich 0 ist, wollen wir $P^n(\sigma_0)$ nach oben gegen etwas anschätzen, das selbst gegen 0 geht.

Behauptung: Für $\sigma_0 \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|P^n(\sigma_0)| < \lambda^n |\sigma_0|. \tag{19}$$

Auch diese Abschätzung wollen wir per Induktion über $n$ beweisen:

(IA) $n = 1$: Nach (11) gilt: $|P(\sigma_0)| < \lambda|\sigma_0|$.

(IV) Die Behauptung (19) gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$|P^{n+1}(\sigma_0)| = |P^n(P(\sigma_0))| \overset{\text{(IV)}}{<} \lambda^n |P(\sigma_0)| \overset{\text{(IA)}}{<} \lambda^n \ \lambda|\sigma_0| = \lambda^{n+1}|\sigma_0|$$

Somit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Damit ergibt sich auch für $\sigma_0 \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} |P^n(P^n(\sigma_0))| \overset{(18)}{=} \lim_{n\to\infty} |P^n(\sigma_0)| \overset{(19)}{<} \lim_{n\to\infty} \lambda^n|\sigma_0| = 0,$$

da $0 < \lambda < 1$.
Schlussendlich können wir - für das selbe $\xi = \Phi(t_0, \sigma_0) \in U$ - mit Hilfe von Proposition (6.7) folgern

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t, P^n(\sigma_0)), \Gamma) = 0. \tag{20}$$

Außerdem gilt für jedes $t \geq 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,\xi),\Gamma) \overset{(17)}{=} \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t, \Phi(s, P^n(\sigma_0))), \Gamma) \overset{(6)}{=} \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(s+t, P^n(\sigma_0)), \Gamma)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t, P^n(\sigma_0)), \Gamma) \overset{(20)}{=} 0,$$

wie gewünscht. □

# §3 Literatur

[1] Carmen Chicone. Ordinary Differential Equations with Applications. Springer, 2nd Edition, USA, 2006.

[2] Aloys Krieg, Sebastian Walcher. Gewöhnliche Differentialgleichungen. RWTH Aachen, 2010.