Reihenentwicklungen von Lösungen (I)

Vortrag zum Seminar *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 22.11.2011

Carmen Freuen

Ziel dieses Vortrages ist es, die Reihenentwicklung von Lösungen linearer Differentialgleichungen vorzustellen und zu untersuchen. Dabei sei vorab angemerkt, dass die Aussagen der Ausarbeitung alle für den reellen Zahlenbereich getroffen worden sind. Es finden sich jedoch analoge Aussagen für den Fall, dass die Variablen komplex sind.

§1 Einleitung

— *Motivation* —

Viele naturwissenschaftliche Fragestellungen (in der Physik, Mathematik, etc.) führen uns zu Differentialgleichungen, welche nicht in einer geschlossenen Form lösbar sind. Damit sind solche Differentialgleichungen gemeint, deren Lösung weder durch Polynome, noch durch rationale Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen oder ähnlichem ausgedrückt werden können.

Betrachtet man beispielsweise die Gleichung

$(*)\ y'' = \sin(y) – y'$

als mögliche Modellierung eines gedämpften Pendels, so stellt man fest, dass diese nicht elementar lösbar ist.

Für viele solcher Gleichungen ist es allerdings möglich, die Lösung als Potenzreihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot\ (z - z_0)^n$, $z \in \mathbb{R}$ mit den festen Konstanten $a_n, z_0 \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ darzustellen[1] und die entsprechenden Koeffizienten a_n zu bestimmen. Dieser Lösungsansatz soll im Folgenden insbesondere anhand linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorgestellt werden.

[1]Zur Definition vgl. Krieg, A., Analysis I, Kapitel III (4.1)

Im folgenden Satz wollen wir einige bekannte Eigenschaften von Potenzreihen darstellen.

— *Bekanntes und Grundlegendes* —

(1.1) Satz (Eigenschaften von Potenzreihen)

Es seien $t_0, a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und die Potenzreihe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n$ gegeben.

(i) Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n$ hat einen Konvergenzradius $R \geqslant 0$ und konvergiert absolut für $|(t - t_0)| < R$.[2]

(ii) Es sei $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n$ und $|(t - t_0)| < R$. Dann gilt für $k \geqslant 1$:

$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1) \cdot a_n \cdot (t - t_0)^{n-k}$. Insbesondere hat auch die k-te Ableitung den Konvergenzradius R .[3]

(iii) Falls a, b aus dem Konvergenzintervall R stammen, so gilt:

$\int_a^b f(s)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b s^n \; ds.$ [4]

(iv) Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen:

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - t_0)^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $\widetilde{R} > 0$ ist und für $|(t - t_0)| < \min \left\{ R, \widetilde{R} \right\}$ gilt

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - t_0)^n$, dann gilt $a_n = c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(v) Addition von Potenzreihen:

Es seien $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n$ und $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - t_0)^n$ konvergente Potenzreihen.

[2] Vgl. Krieg, A. , Analysis I, Kapitel III (4.5) und (2.1)
[3] Vgl. Krieg, A., Analysis II, Kapitel VII (2.10)
[4] Vgl. Krieg, A., Analysis II, Kapitel VII (2.7)

Dann gilt: $f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + c_n) \cdot (t - t_0)^n$ überall dort, wo beide Potenzreihen konvergieren. [5]

(vi) Multiplikation von Potenzreihen:

Es seien $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0)^n$ und $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - t_0)^n$ konvergente Potenzreihen. Dann gilt: $f(t) \cdot g(t) \ = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot (t - t_0)^n$ mit $p_n = a_n c_0 + a_{n-1}c_1 + ... + a_0 c_n$. Diese Potenzreihe konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ für die f und g konvergieren. [6] ◇

(1.2) Satz (Majorantenkriterium)

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Gegeben sei eine konvergente reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{R}_+^\star$ gibt, so dass

$$|a_k| \leqslant M \cdot c_k \text{ für alle } k \geqslant N,$$ ◇

dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(1.3) Satz (Quotientenkriterium)

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}, a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Sei

$$r := \liminf_{k\to\infty} |\tfrac{a_{k+1}}{a_k}|,\ R := \limsup_{k\to\infty} |\tfrac{a_{k+1}}{a_k}|,$$

also $0 \leqslant r \leqslant R \leqslant \infty$. Dann gilt:

(i) Aus $R < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(ii) Aus $r > 1$ folgt die Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. ◇

[5] Vgl. Krieg, A., Analysis I, Kapitel III (1.6)
[6] Vgl. Krieg, A., Analysis I, Kapitel III (2.14)

(1.4) Definition (analytisch)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ (oder $I \subseteq \mathbb{C}$) ein Intervall.

Dann heißt die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *analytisch* im Punkt $a \in I$, falls f eine Reihendarstellung

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t-a)^n$ mit $c_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit Entwicklungspunkt a und positivem Konvergenzradius R besitzt. $\diamond$

§ 2 Problemstellung

Als Einstieg in die Thematik soll uns die Gleichung $(*)$ dienen, welche wir mit einer einfachen, aber relativ umständlichen Methode lösen werden. Mit Hilfe dieser Methode kann man auch einige nichtlineare Gleichungen lösen.

Zusätzlich zu unserer Differentialgleichung seien folgende Anfangsbedingungen gegeben:

$\mathrm{y}(0) = \frac{\pi}{4}, \mathrm{y}'(0) = 0.$

Nach Vorlesung (Kapitel II (5.1)) wissen wir, dass es zu den gegebenen Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung gibt, da man das gegebene System in ein System erster Ordnung transformieren kann und sich die eindeutige Lösung dann als Folge aus Kapitel I, Satz (6.11) ergibt.

Außerdem kann man die Lösung als Potenzreihe um $t = 0$ entwickeln [7]. Doch wie erhält man diese Reihe, die die vorgegebenen Anfangsbedingungen erfüllt?

Wenn die Lösung der Differentialgleichung $(*)$ als Potenzreihe darstellbar ist, dann muss jede Ableitung im Punkt $t = 0$ existieren. Eine mögliche Lösung φ hat somit die Taylor-

[7] Krieg, A., Walcher, S. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Kapitel II (5.1)

entwicklung um 0:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \frac{\varphi''(0)}{2!} \cdot t^2 + \ldots + \frac{\varphi^n(0)}{n!} \cdot t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0) \cdot \frac{(t-0)^k}{k!}$$

Für $|t| < R$ (Konvergenzradius) konvergiert diese Reihe gegen $\varphi(t)$. [8]

Durch die Anfangswertbedingungen wissen wir, dass $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, d.h. die Lösung verläuft durch den Punkt (0, $\frac{\pi}{4}$) mit Steigung 0, da $\varphi'(0) = 0$ gilt.

Angenommen, dass φ die Lösung der Differentialgleichung $(*)$ ist, so liefert Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\varphi''(t) = -\sin(\varphi(t)) - \varphi'(t).$$

Setzt man $t = 0$ folgt daraus:

$$\varphi''(0) = -\sin(\varphi(0)) - \varphi'(0) = -\sin(\frac{\pi}{4}) - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Weitere Reihenwerte ergeben sich durch differenzieren der Differentialgleichung:

$$\varphi^{(3)}(t) = -\cos(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) - \varphi''(t).$$

Einsetzen von $t = 0$ liefert hier:

$$\varphi^{(3)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die vierte Ableitung ergibt:

$$\varphi^{(4)}(t) = \sin(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)^2 - \cos(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t) - \varphi'''(t).$$

Einsetzen von $t = 0$ liefert: $\varphi^{(4)}(0) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Zusätzlich ist die Anfangswertbedingung $\varphi'(0) = 0$ gegeben, woraus $\varphi'(0) \cdot t = 0$ folgt. Auf diese Weise kann man rekursiv alle Reihenglieder im Punkt $t = 0$ ermitteln:

[8] Vgl. Krieg, A., Analysis I, Kapitel V (3.11)

$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{=\varphi(0)} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}\cdot t^2}{2\cdot 2!}}_{=\varphi''(0)\cdot\frac{t^2}{2!}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}\cdot t^3}{2\cdot 3!}}_{=\varphi^{(3)}(0)\cdot\frac{t^3}{3!}} + \dots .$$

Problematik:

1. Die Methode ist sehr umständlich und es wird im Allgemeinen immer schwieriger, das nächste Reihenglied zu bestimmen.
2. Selbst wenn es gelingt $\varphi^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, ist es im Allgemeinen unmöglich die Konvergenz der erhaltenen Reihe zu zeigen und damit die Methode zu rechtfertigen.
3. Man kann eine Lösung erhalten, die nicht die ursprüngliche Gleichung löst. Betrachtet man hierzu beispielsweise die Gleichung $y' = f(t)$ mit

   $$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t^2) & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

   Angenommen φ ist eine Lösung von $y' = f(t)$ mit $\varphi(0) = 0$, die als konvergente Reihe darstellbar ist, dann folgt daraus, dass alle Koeffizienten dieser Reihe gleich Null sein müssen, denn es gilt: $a_n = f^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. (mit Differenzenquotienten nachweisbar). Daraus ergibt sich $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n = 0$. Mit Satz (1.1) (v) folgt, dass die Reihe somit der Nullfunktion entsprechen muss. Die Nullfunktion ist allerdings keine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

§3 Reihenentwicklungen

Bevor wir nun eine Methode studieren mit der wir eine Reihenentwicklung von Lösungen linearer Differentialgleichungen erhalten ohne auf die oben genannten Probleme zu stoßen, stellen wir zunächst ein nützliches Lemma vor.

(1.5) Lemma

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analytische Funktionen im Punkt a, gegeben durch die Potenzreihen $f(t) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \cdot (t-a)^n$, $g(t) = \sum_{n=q}^{\infty} d_n \cdot (t-a)^n$, $t \in \mathbb{R}$ mit $p, q \in \mathbb{N}, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Außerdem sei $p < q$ und $c_p \neq 0, d_q \neq 0$. (Diese Annahme sorgt dafür, dass die Reihe von f mit dem Term $(t-a)^p$ und die Reihe von g mit dem Term $(t-a)^q$ beginnt.)

Dann sind die Funktionen f und g linear unabhängig auf jedem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ auf dem beide Reihen konvergieren.

Beweis

Nehmen wir an, die Funktionen f und g seien konvergent auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zudem seien die Funktionen linear abhängig auf diesem Intervall I. Dann existieren nach Definition von linearer Abhängigkeit Konstanten A und B (mit $A \neq 0$ oder $B \neq 0$), sodass für jedes $t \in I$ gilt:

$$A \cdot f(t) + B \cdot g(t) = A \cdot \sum_{n=p}^{\infty} c_n \cdot (t-a)^n + B \cdot \sum_{n=q}^{\infty} d_n (t-a)^n = 0$$

Addiert man diese beide Reihen nun gliedweise (vgl. Satz (1.1) vi.), dann ergibt sich für die daraus resultierende Potenzreihe:

$$A \cdot c_p \cdot (t-a)^p + B \cdot d_q \cdot (t-a)^q + A \cdot c_{p+1} \cdot (t-a)^{p+1} + B \cdot d_{q+1} \cdot (t-a)^{q+1} + \ldots =$$
$$A \cdot c_p \cdot (t-a)^p + \ldots + A \cdot c_{q-1} \cdot (t-a)^{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} (A \cdot c_n + B \cdot d_n) \cdot (t-a)^n = 0$$

Da $p < q$ gilt, hat der Term $A \cdot c_p \cdot (t-a)^p$ die niedrigste Ordnung (folgt aus Koeffizientenvergleich in den Potenzen von $(t-a)$). Aus diesem Koeffizientenvergleich der Potenzen von $(t-a)$ schließen wir nun, dass $A = 0$ gilt. Dann gilt aber auch:

$$B \cdot \sum_{n=q}^{\infty} d_n \cdot (t-a)^n = \underbrace{-A \cdot \sum_{n=p}^{\infty} c_n \cdot (t-a)^n}_{=0}$$

für alle $t \in I$.

Daraus folgt aber, dass $B = 0$ sein muss (vgl. Satz (1.1) (v) und $d_q \neq 0$ nach Voraussetzung).

Damit folgt dann auch schon, dass $A = B = 0$ gilt. Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass f und g linear abhängig sind. □

Nun kann auch ein einfaches Beispiel angegeben werden.

(1.6) Beispiel

Nachdem wir diese Aussage kennengelernt haben, studieren wir ein spezifisches Problem:

Wir möchten gerne folgende Differentialgleichung lösen:

$$y'' - ty \;=\; 0 \tag{1}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen seien gegeben durch $\varphi(0) = a, \varphi'(0) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Da es keine Lösung in einer geschlossenen Form gibt (muss akzeptiert werden), versuchen wir die Lösung zu erhalten, indem wir einen Potenzreihenansatz machen. Diese Methode beginnt mit der Annahme, dass die gesuchte Lösung φ analytisch ist im Punkt $t = 0$. (Wären die Anfangsbedingungen für $t = t_0$ gegeben, würden wir mit der Annahme beginnen, dass φ analytisch ist im Punkt $t = t_0$).

Aus der Annahme folgt, dass $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe der Form

$$\varphi(t) = c_0 + c_1 \cdot t + \ldots + c_k \cdot t^k + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^k \;\text{ mit }\; c_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

entwickelt werden kann. Diese Potenzreihe konvergiert für $|t| < A$, mit einer zu bestimmenden positiven Konstante A.

Aufgabe ist es nun, die Koeffizienten c_k der Potenzreihe so zu bestimmen, dass φ sowohl die Gleichung (1) als auch die zugehörigen Anfangsbedingungen erfüllt.

Falls nun die Potenzreihe (2) eine Lösung von (1) darstellt, dann muss diese Potenzreihe zweimal differenzierbar sein (ansonsten kann sie unmöglich die Differentialgleichung erfüllen).

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot t + \ldots + k \cdot c_k \cdot t^{k-1} + \ldots &&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k \cdot t^{k-1}, && t \in \mathbb{R} \\ \varphi''(t) &= 2 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot t + \ldots &&= \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot c_k \cdot t^{k-2}, && t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

Multiplizieren wir des weiteren φ mit t, so erhalten wir:

$$t \cdot \varphi(t) \;=\; c_0 \cdot t + c_1 \cdot t^2 + \ldots + c_k \cdot t^{k+1} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^{k+1}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Setzen wir (3) und (4) nun in die ursprüngliche Differentialgleichung (1) ein, so ergibt sich:

$$\varphi''(t) - t \cdot \varphi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot c_k \cdot t^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^{k+1} \tag{5}$$

Betrachten wir die erste Reihe von (5) so fällt auf, dass diese mit dem konstanten Term $2 \cdot c_2$ beginnt. Um beide Reihen kombinieren zu können, separieren wir diesen konstanten Term von der ersten Reihe und führen bei der zweiten Reihe eine Indexverschiebung aus.

Dafür sei $k = n - 3$ und für die zweite Reihe ergibt sich somit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot t^{k+1} \;=\; \sum_{n=3}^{\infty} c_{n-3} \cdot t^{n-2}, t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Da der Index nicht von Bedeutung ist, ersetzen wir nun wiederum n durch k.

Im nächsten Schritt fahren wir erst mal nur formal fort, d.h. die Gültigkeit der Umformungen wird später gesichert, indem wir die Konvergenz der Reihen nachweisen.

Damit ergibt sich (5) erneut als:

$$\begin{aligned}\varphi''(t) - t\cdot\varphi(t) = &\quad 2\cdot c_2 + \sum_{k=3}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot c_k\cdot t^{k-2} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}\cdot t^{k-2}\\ = &\qquad 2\cdot c_2 + \sum_{k=3}^{\infty}[k\cdot(k-1)\cdot c_k - c_{k-3}]t^{k-2}, t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Angenommen die Umformungen waren bis hierhin gerechtfertigt, dann ist φ genau dann eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1), wenn die Koeffizienten c_k folgende Gleichung erfüllen:

$$2\cdot c_2 + \sum_{k=3}^{\infty}[k\cdot(k-1)\cdot c_k - c_{k-3}]t^{k-2} \;=\; 0$$

Wegen des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen (siehe Satz (1.1) v.) müssen alle Koeffizienten 0 ergeben.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}&2\cdot c_2 = 0 \text{ bzw.}\\ &k\cdot(k-1)\cdot c_k - c_{k-3} = \;0\;(k=\;3,\;4,\;5,\;\ldots)\;.\end{aligned}$$

Solche Relationen kann man nun dazu benutzen, die Koeffizienten c_k rekursiv zu bestimmen:

$$\begin{aligned}&& 2\cdot c_2 \;&=\; 0 \Rightarrow\; c_2 \;=\; 0\\ \text{Für k=3 gilt:} && 3\cdot 2\cdot c_3 - c_0 \;&=\; 0 \Rightarrow\; c_3 \;=\; \frac{1}{2\cdot 3}\cdot c_0\\ \text{Für k=4 gilt:} && 4\cdot 3\cdot c_4 - c_1 \;&=\; 0 \Rightarrow\; c_4 \;=\; \frac{1}{3\cdot 4}\cdot c_1\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise erhält man weitere Werte der Reihe:

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{1}{4\cdot 5}\cdot c_2 = 0\\
c_6 &= \frac{1}{5\cdot 6}\cdot c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\cdot c_0\\
c_7 &= \frac{1}{6\cdot 7}\cdot c_4 = \frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\cdot c_1 \ \ldots
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen lassen sich diese Reihenwerte nun wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{llllll}
c_2 & = 0 & c_3 & = \dfrac{1}{3!}\cdot c_0 & c_4 & = \dfrac{2}{4!}\cdot c_1\\
c_5 & = 0 & c_6 & = \dfrac{1\cdot 4}{6!}\cdot c_0 & c_7 & = \dfrac{2\cdot 5}{7!}\cdot c_1\\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
c_{3\cdot m+2} & = 0 & c_{3\cdot m} & = \dfrac{1\cdot 4\ldots\cdot(3\cdot m-2)}{(3\cdot m)!}\cdot c_0 & c_{3\cdot m+1} & = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots\cdot(3\cdot m-1)}{(3\cdot m+1)!}\cdot c_1
\end{array}$$

Diese Reihenwerte lassen sich durch Induktion verifizieren:

Induktion für $c_{3\cdot m+2}$:

IA) Es sei $c_{3\cdot m+2} = 0$. Für $m = 0$ ist $c_2 = 0\checkmark$.

IV) Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}_0$.

IS)

$$m \to m+1$$

$$\begin{aligned}
c_{3(m+1)+2} = c_{3m+5} &= \frac{c_{(3m+5)-3}}{(3m+5)\cdot((3m+5)-1)} = \frac{c_{3m+2}}{(3m+5)\cdot(3m+4)}\\
&\overset{IV}{=} \frac{0}{(3m+5)\cdot(3m+4)} = 0
\end{aligned}$$

Induktion für $c_{3\cdot m}$:

IA) Es sei $c_{3\cdot m} = \frac{1\cdot 4\ldots\cdot(3\cdot m-2)}{(3\cdot m)!}\cdot c_0$. Für $m = 1$ ist $c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot c_0$ ✓.

IV) Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$.

IS)

$$m \to m+1$$

$$\begin{aligned}
c_{3(m+1)} = c_{3m+3} &= \frac{c_{(3m+3)-3}}{(3m+3)\cdot((3m+3)-1)} = \frac{c_{3m}}{(3m+3)\cdot(3m+2)} \\
&\overset{IV}{=} \frac{1\cdot 4\ldots(3m-2)}{(3m)!\cdot(3m+3)\cdot(3m+2)}\cdot c_0 = \frac{1\cdot 4\ldots(3m-2)\cdot(3(m+1)-2)}{(3m)!\cdot(3m+3)\cdot(3m+2)\cdot(3m+1)}\cdot c_0 \\
&= \frac{1\cdot 4\ldots(3m-2)\cdot(3(m+1)-2)}{(3(m+1))!}\cdot c_0
\end{aligned}$$

<u>Induktion für c_{3m+1}:</u>

IA) Es sei $c_{3\cdot m+1} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots\cdot(3\cdot m-1)}{(3\cdot m+1)!}\cdot c_1$. Für $m=1$ ist $c_4 = \frac{1}{3\cdot 4}\cdot c_1$ ✓.

IV) Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$.

IS)

$$m \to m+1$$

$$\begin{aligned}
c_{3(m+1)+1} = c_{3m+4} &= \frac{c_{(3m+4)-3}}{(3m+4)\cdot((3m+4)-1)} = \frac{c_{3m+1}}{(3m+4)\cdot(3m+3)} \\
&\overset{IV}{=} \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3m-1)}{(3m+1)!\cdot(3m+4)\cdot(3m+3)}\cdot c_1 \\
&= \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3m-1)\cdot(3(m+1)-1)}{(3m+1)!\cdot(3m+4)\cdot(3m+3)\cdot(3m+2)}\cdot c_1 \\
&= \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3m-1)\cdot(3(m+1)-1)}{(3(m+1)+1)!}\cdot c_1
\end{aligned}$$

Damit werden alle möglichen Koeffizienten der Reihe durch c_0 und c_1 dargestellt. Diese kann man nun mit Hilfe der Anfangsbedingungen $\varphi(0)=a, \varphi'(0)=b$ bestimmen.

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= c_0 + c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0^2 + \ldots &&= a \;\Rightarrow\; c_0 = a \qquad bzw. \\
\varphi'(0) &= c_1 + 2\cdot c_2\cdot 0 + 3\cdot c_3\cdot 0^2 + \ldots &&= b \;\Rightarrow\; c_1 = b \quad (vgl.(2),(3))
\end{aligned}$$

Damit erhält man, vorausgesetzt alle Umformungen waren gerechtfertigt, eine Lösung der Form:

$$\varphi(t) \;=\; a\cdot[1+\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(1\cdot 4\ldots(3\cdot m-2)}{(3\cdot m)!}\cdot t^{3\cdot m}]}_{=c_{3\cdot m}\cdot t^{3\cdot m}} + b\cdot[t+\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2\cdot 5\ldots(3\cdot m-1)}{(3\cdot m+1)!}\cdot t^{3\cdot m+1}]}_{=c_{3\cdot m+1}\cdot t^{3\cdot m+1}}.$$

Um zu prüfen, ob alle Annahmen gerechtfertigt waren, zeigen wir nun die Konvergenz beider Reihen mit Hilfe des Quotientenkriteriums [9]:

Gegeben sei die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\ldots(3\cdot m-2)}{(3\cdot m)!}\cdot t^{3m}$ mit $\frac{1\cdot4\ldots(3\cdot m-2)}{(3\cdot m)!}\neq 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot 4\ldots(3\cdot(m+1)-2)}{(3\cdot(m+1))!}\cdot t^{3(m+1)}\quad\cdot\quad\frac{(3\cdot m)!}{1\cdot 4\ldots(3\cdot m-2)\cdot t^{3m}}\\ =\;&\lim_{m\to\infty}\frac{3\cdot m+1}{(3m+3)\cdot(3m+2)\cdot(3m+1))}\cdot t^3 \;=\; \lim_{m\to\infty}\frac{1}{(3m+3)\cdot(3m+2)}\cdot t^3 \;=\; 0\end{aligned}$$

Da $0<1$ gilt, folgt damit die absolute Konvergenz der Reihe.

Für die zweite Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\ldots(3\cdot m-1)}{(3\cdot m+1)!}\cdot t^{3m+1}$ mit $\frac{2\cdot5\ldots(3\cdot m-1)}{(3\cdot m+1)!}\neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 5\ldots(3\cdot(m+1)-1)}{(3\cdot(m+1)+1)!}\cdot t^{3(m+1)+1}\quad\cdot\quad\frac{(3\cdot m+1)!}{2\cdot 5\ldots(3\cdot m-1)t^{3m+1}}\\ =\;&\lim_{m\to\infty}\frac{3\cdot m+2}{(3\cdot m+3)\cdot(3\cdot m+4)\cdot(3\cdot m+2)}\cdot t^3 \;=\; \lim_{m\to\infty}\frac{1}{(3\cdot m+4)\cdot(3\cdot m+3)}\cdot t^3 \;=\; 0\end{aligned}$$

$\diamond$

Da $0<1$ gilt, folgt damit die absolute Konvergenz der Reihe auf $\mathbb{R}$.

Mit der gezeigten Konvergenz wissen wir, dass alle getroffenen Annahmen für alle $t\in\mathbb{R}$ gerechtfertigt waren.

Außerdem wissen wir durch Lemma (3.1.), dass die beiden Reihen

$\varphi_1(t) \;=\; 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\ldots(3\cdot m-2)}{(3\cdot m)!}\cdot t^{3\cdot m}$ und

$\varphi_2(t) \;=\; t+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\ldots(3\cdot m-1)}{(3\cdot m+1)!}\cdot t^{3\cdot m+1}$ linear unabhängig sind.

[9] Vgl. Krieg, A., Analysis I, Kapitel III (2.6)

Deswegen ist, falls $a, b \in R$ als willkürliche Konstanten festgesetzt sind, eine allgemeine Lösung der Gleichung (1) gegeben durch $a \cdot \varphi_1(t) + b \cdot \varphi_2(t)$.

Es sei angemerkt, dass für eine gute Approximation der Lösung (für kleine t) nur eine relativ geringe Anzahl Terme nötig ist. Für große Werte von t (z.B. $t = 10$)konvergiert die Reihe zu langsam, um von praktischem Nutzen zu sein.

(1.7) Satz

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in \mathbb{R}$ und die Funktionen $p, q, f : I \to \mathbb{R}$ seien analytisch im Punkt $t_0 \in I$.

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$y'' + p(t)y' + q(t)y \;=\; f(t)\ .$$

Dann gibt es eine eindeutige Lösung φ der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingungen $\varphi(t_0) = a\ ,\ \varphi'(t_0) = b$ erfüllt. Diese Lösung ist analytisch im Punkt $t = t_0$ und ihre Reihenentwicklung $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k$ mit $t \in I$, $c_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert mindestens für diejenigen Werte, für die die Potenzreihenentwicklungen von p , q und f für den Entwicklungspunkt t_0 konvergieren. Die entsprechenden Koeffizienten c_k können rekursiv durch direkte Substitution bestimmt werden. $\diamond$

Wichtig:

Es ist zu beachten, dass die Differentialgleichung unbedingt in der oben genannten Form gegeben sein muss (mit Leitkoeffizient 1).

Anmerkung: Der Beweis dieses Satzes wird im nächsten Vortrag vorgestellt. Hier stellen wir nur eine Anwendung des Satzes vor.

— *Die Legendregleichung* —

(1.8) Beispiel (Legendregleichung)

Gegeben sei die Gleichung $(1-t^2)\cdot y'' - 2\cdot t\cdot y' + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot y = 0$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante ist. Zu prüfen ist nun, ob die Lösung einen Potenzreihenansatz um den Punkt $t=0$ besitzt.

Um Satz (3.3) anwenden zu können, ist es zielführend die Gleichung zuerst durch $(1-t^2)$ zu dividieren ($t \neq \pm 1$). Es ergibt sich:

$$y'' - \frac{2\cdot t}{1-t^2}\cdot y' + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{1-t^2}\cdot y \;=\; 0$$

Diese Gleichung ist für $t \neq 1$ und $t \neq -1$ wohldefiniert.

Nutzen wir die Bezeichnungen aus Satz (3.3), so ist unser Entwicklungspunkt gegeben durch $t_0 = 0$.

Weiter erhalten wir für die in $t = t_0$ analytischen Funktionen p, q und f:

$p(t) = -\frac{2\cdot t}{1-t^2}$, $q(t) = \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{1-t^2}$ und $f(t) = 0$. Man stellt überdies fest, dass man p und q als konvergente Potenzreihen für $|t| < 1$ entwickeln kann:

Mit der geometrischen Reihe [10] ergibt sich:

$$\begin{aligned} p(t) &= -\frac{2\cdot t}{1-t^2} &&= -2\cdot t\cdot \sum_{k=0}^{\infty} t^{2\cdot k} \\ q(t) &= \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{1-t^2} &&= \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} t^{2\cdot k} \end{aligned}$$

Für jede Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ existiert nach Satz (3.3) eine eindeutige analytische Lösung φ der Legendregleichung, die die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = a, \varphi'(0) = b$ erfüllt. Außerdem konvergiert die Reihenentwicklung von φ für $|t| < 1$.

[10] vgl.Krieg, A., Analysis I, Kapitel III (1.4)

Aus der Legendre- Gleichung $(1-t^2)\cdot y'' - 2\cdot t\cdot y' + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot y \;=\; 0$ ergibt sich mit dem Ansatz aus Beispiel (3.2) :

$$\varphi(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot t^k \;\text{ sowie,}$$

$$\varphi'(t) = c_1 + 2\cdot c_2\cdot t + \ldots + k\cdot c_k\cdot t^{k-1} + \ldots \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot c_k\cdot t^{k-1}$$

$$\varphi''(t) = 2\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3\cdot t + \ldots + k\cdot(k-1)\cdot c_k\cdot t^{k-2} + \ldots \;=\; \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot c_k\cdot t^{k-2}\,.$$

In den folgenden Schritten gehen wir zunächst wieder rein formal vor; die Rechtfertigung der Umformungen wird später gegeben.

Setzen wir nun $\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)$ in die Differentialgleichung ein, ergibt sich:

$$(1-t^2)\cdot\sum_{k=2}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot c_k\cdot t^{k-2} - 2\cdot t\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot c_k\cdot t^{k-1} + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot t^k \;=\; 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\cdot(k+1)\cdot c_{k+2}\cdot t^k - \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot(k-1)c_k\cdot t^k - 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot c_k\cdot t^k + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot t^k \;=\; 0$$

Für den Koeffizienten von $t^k \;\; (k \geqslant 2)$ erhalten wir damit:

$$(k+2)\cdot(k+1)\cdot c_{k+2} - k\cdot(k-1)\cdot c_k - 2\cdot k\cdot c_k + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot c_k = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$c_{k+2} \;=\; \frac{k\cdot(k+1) - \alpha\cdot(\alpha+1)}{(k+2)\cdot(k+1)}\cdot c_k$$

Für $k=0$ bzw. $k=1$ ergibt sich aus der obigen Gleichung:

$$k=0: \;\; 2\cdot c_2 + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot c_0 \;=0$$

$$k=1: \;\; 6\cdot c_3 - 2\cdot c_1 + \alpha\cdot(\alpha+1)\cdot c_1 \;=0$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 1 = c_0$, $\varphi'(0) = 0 = c_1$ verschwinden alle ungeraden Koeffizienten und man erhält:

$$c_0 = \varphi(0) = 1$$
$$c_2 = \frac{0 \cdot 1 - \alpha \cdot (\alpha+1)}{2 \cdot 1} \cdot c_0 = -\frac{\alpha \cdot (\alpha+1)}{2 \cdot 1} \cdot 1 = -\frac{\alpha \cdot (\alpha+1)}{2 \cdot 1}$$
$$c_4 = \frac{(3 \cdot 2 - \alpha \cdot (\alpha+1))}{3 \cdot 4} \cdot c_2 = \frac{(3 \cdot 2 - \alpha \cdot (\alpha+1)) \cdot (-\alpha \cdot (\alpha+1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$
$$\frac{-6\alpha \cdot (\alpha+1) + \alpha^2 \cdot (\alpha+1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\alpha \cdot (\alpha^3 + 2\alpha^2 - 5\alpha - 6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \ldots$$

Allgemein erhält man:

$$c_{2 \cdot k} = (-1)^k \cdot \frac{\alpha \cdot \ \ldots \ (\alpha - 2 \cdot k + 2) \cdot (\alpha+1) \ \ldots \ \cdot (\alpha + 2 \cdot k - 1)}{(2 \cdot k)!} \text{für k} \geqslant 1.$$

<u>Induktion für $c_{2 \cdot k}$:</u>

IA) Es sei $c_{2 \cdot k} = (-1)^k \cdot \frac{\alpha \cdot \ \ldots \ (\alpha - 2 \cdot k + 2) \cdot (\alpha+1) \ \ldots \ \cdot (\alpha + 2 \cdot k - 1)}{(2 \cdot k)!}$ für $k = 1$.

IV) Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$.

IS)

$$k \to k+1$$
$$c_{2(k+1)} = c_{2 \cdot k+2} = \frac{2k(2k+1) - \alpha(\alpha+1)}{(2k+1) \cdot (2k+2)} \cdot c_{2k}$$
$$= -\frac{\alpha^2 + \alpha - 2k \cdot (2k+1)}{(2k+1) \cdot (2k+2)} \cdot c_{2k}$$
$$= -\frac{(\alpha - 2k) \cdot (\alpha + 2k + 1)}{(2k+1) \cdot (2k+2)} \cdot c_{2k}$$
$$= -\frac{(\alpha - 2(k+1) + 2) \cdot (\alpha + 2(k+1) - 1)}{(2k+1) \cdot (2k+2)} \cdot c_{2k}$$
$$\stackrel{IV}{=} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \alpha \ldots (\alpha - 2k + 2) \cdot (\alpha+1) \ldots (\alpha + 2k - 1) \cdot (\alpha - 2(k+1) + 2) \cdot (\alpha + 2(k+1) - 1)}{(2(k+1))!}$$
$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot \alpha \ldots (\alpha - 2k + 2)(\alpha - 2(k+1) + 2) \cdot (\alpha+1) \ldots (\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2(k+1) - 1)}{(2(k+1))!}$$

Falls $\alpha \geqslant 0$ und gerade ist, bzw. $\alpha < 0$ und ungerade ist, ist die Lösung der Legendre-Gleichung durch folgendes Polynom gegeben:

$$\varphi(t) \;=\; 1+\sum_{k=1}^{\infty} c_{2\cdot k}\cdot t^{2\cdot k} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\alpha\cdot\;\ldots\;(\alpha-2\cdot k+2)\cdot(\alpha+1)\;\ldots\;\cdot(\alpha+2\cdot k-1)}{(2\cdot k)!}\cdot t^{2\cdot k}$$

$\varphi(t)$ ist ein Polynom, da für $\alpha = 2\cdot m, m \in \mathbb{N}$ folgt: $c_{2k} = 0$ für $k \geqslant m+1$, da der Faktor $\alpha - 2k + 2 = 0$ ist für $k = m+1$. Damit ist $\varphi(t)$ ein Polynom vom Grad $2m$.

Die ersten geraden, so genannten Legendre- Polynome sind:

$$\begin{aligned}
\alpha = 0 \quad &\Rightarrow \varphi(t) = 1\\
\alpha = 2 \quad &\Rightarrow \varphi(t) = 1 - 3\cdot t^2\\
\alpha = 4 \quad &\Rightarrow \varphi(t) = 1 - 10\cdot t^2 + \frac{35}{3}\cdot t^4
\end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = c_0 \;=\; 0 \;\;,\;\; \varphi'(0) = c_1 \;=\; 1$ erhalten wir aus Gleichung (7):

$c_0 = c_2 = \ldots = 0$, d.h. alle geraden Koeffizienten sind 0.

Weiter ergibt sich für die ungeraden Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
&c_1 = \varphi(0) = 1\\
&c_3 = \frac{1\cdot 2-\alpha\cdot(\alpha+1)}{2\cdot 3}\cdot c_1 = \frac{2-\alpha^2-\alpha}{2\cdot 3}\cdot 1 = -\frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha+2)}{2\cdot 3}\\
&c_5 = \frac{3\cdot 4-\alpha\cdot(\alpha+1)}{5\cdot 4}\cdot c_3 = \frac{(12-\alpha\cdot(\alpha+1))\cdot(-(\alpha-1)\cdot(\alpha+2))}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =\\
&\frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha+2)\cdot(-12+\alpha\cdot(\alpha+1))}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-3)\cdot(\alpha+2)\cdot(\alpha+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \quad \ldots
\end{aligned}$$

Allgemein erhält man:

$$c_{2\cdot k+1} \;=\; (-1)^k\cdot\frac{(\alpha-1)\cdot\;\ldots\;(\alpha-2\cdot k+1)\cdot(\alpha+2)\;\ldots\;\cdot(\alpha+2\cdot k)}{(2\cdot k+1)!} \text{für k} \geqslant 1.$$

Beweis per Induktion:

Induktion für $c_{2\cdot k+1}$:

IA) Es sei $c_{2\cdot k+1} = (-1)^k \cdot \frac{(\alpha-1)\cdot \,\dots\, (\alpha-2\cdot k+1)\cdot(\alpha+2)\,\dots\,\cdot(\alpha+2\cdot k)}{(2\cdot k+1)!}$ für $k = 1$.

IV)Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$.

IS)

$$
\begin{aligned}
& k \to k+1 \\
& c_{2(k+1)+1} = c_{(2\cdot k+1)+2} = \frac{(2k+1)\cdot(2k+2)-\alpha(\alpha+1)}{(2k+3)\cdot(2k+2)} \cdot c_{2k+1} \\
& = -\frac{\alpha^2+\alpha-2(k+1)\cdot(2k+1)}{(2k+3)\cdot(2k+2)} \cdot c_{2k+1} \\
& = -\frac{(\alpha-(2k+1))\cdot(\alpha+2(k+1))}{(2k+3)\cdot(2k+2)} \cdot c_{2k+1} \\
& = -\frac{(\alpha-2(k+1)+1)\cdot(\alpha+2(k+1))}{(2k+3)\cdot(2k+2)} \cdot c_{2k+1} \\
& \overset{IV}{=} \frac{(-1)^{k+1}\cdot(\alpha-1)\dots(\alpha-2k+1)\cdot(\alpha-2(k+1)+1)\cdot(\alpha+2)\dots(\alpha+2k)\cdot(\alpha+2(k+1))}{(2(k+1)+1)!}
\end{aligned}
$$

Falls $\alpha > 0$ und ungerade ist, bzw. $\alpha < 0$ und gerade ist, ist die Lösung der Legendregleichung durch folgendes Polynom gegeben:

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= t + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2\cdot k+1} \cdot t^{2\cdot k+1} \\
&= t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(\alpha-1)\cdot \;\dots\; (\alpha-2\cdot k+1)\cdot(\alpha+2)\;\dots\;\cdot(\alpha+2\cdot k)}{(2\cdot k+1)!} \cdot t^{2\cdot k+1}.
\end{aligned}
$$

$\varphi(t)$ ist ein Polynom, da für $\alpha = 2\cdot m-1, m \in \mathbb{N}$ folgt: $c_{2k+1} = 0$ für $k \geqslant m$, da der Faktor $\alpha - 2k+1 = 0$ ist für $k = m$. Damit ist die Lösung $\varphi(t)$ der Legendregleichung ein Polynom vom Grad $2m-1$. Diese Polynome, welche die Legendregleichung lösen, werden auch Legendre- Polynome genannt.

Die ersten ungeraden Legendre-Polynome sind:

$$\begin{aligned}
\alpha = 1 \quad &\Rightarrow \varphi(t) = t \\
\alpha = 3 \quad &\Rightarrow \varphi(t) = t - \frac{5}{3} \cdot t^3 \\
\alpha = 5 \quad &\Rightarrow \varphi(t) = t - \frac{14}{3} \cdot t^3 + \frac{21}{5} \cdot t^5
\end{aligned}$$

Es ist gezeigt, dass die Legendre- Gleichung $(1-t^2) \cdot y'' - 2 \cdot t \cdot y' + \alpha \cdot (\alpha+1) \cdot y = 0$, für eine nicht negative ganze Zahl $\alpha = n$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ als Lösung besitzt.

Da wir ein Polynom als Lösung erhalten, ist die Konvergenz der Lösung natürlich auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben. Satz (3.3) liefert nur Konvergenz auf $|t| < 1$; der Konvergenzbereich kann somit größer sein als im Satz angegeben.

Damit sind die ersten 5 Legendre- Polynome (geschrieben $P_n(t)$ bei Grad n) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1 && (\alpha = 0) \\
P_1(t) &= t && (\alpha = 1) \\
P_2(t) &= \frac{-1}{2} \cdot (1 - 3 \cdot t^2) && (\alpha = 2) \\
P_3(t) &= \frac{-3}{2} \cdot (t - \frac{5}{3} \cdot t^3) && (\alpha = 3) \\
P_4(t) &= \frac{3}{8} \cdot (1 - 10 \cdot t^2 + \frac{35}{3} \cdot t^4) && (\alpha = 4) \\
P_5(t) &= \frac{15}{8} \cdot (t - \frac{14}{3} \cdot t^3 + \frac{21}{5} \cdot t^5) && (\alpha = 5)
\end{aligned}$$

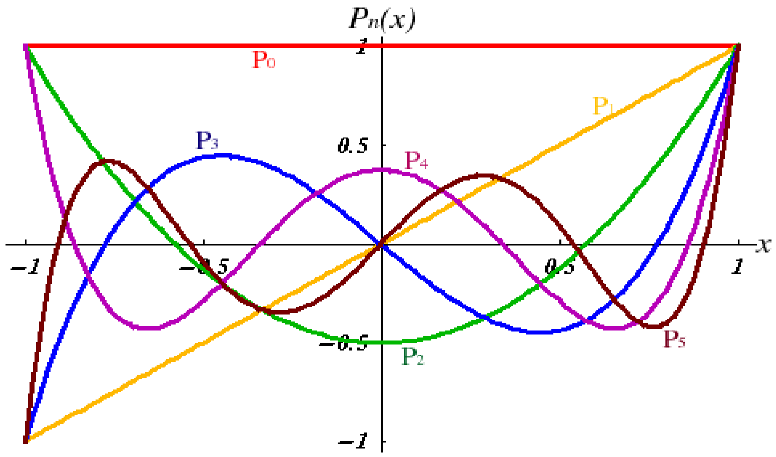
Diese Polynome erhält man, indem man den Vorfaktor der Legendre-Polynome so wählt, dass $P_n(1) = 1$ ergibt.

— *Anwendung der Legendre Polynome* —

Die vorgestellten Legendre-Polynome sind insbesondere in der Physik von großem Interesse.

Anwendungsbsp: : Die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials einer räumlich beschränkten Ladungsverteilung.

— *Anschauung Legendre Polynome* —



§4 Literatur

Brauer, F. /Nohel, J. A.: Ordinary Differential Equations. New York, Amsterdam 1967. Seite 119 – 177.

Skripte:

Krieg, A.: Analysis I. RWTH Aachen 2007.

Krieg, A.: Analysis II. RWTH Aachen 2008.

Krieg, A./Walcher, S.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. RWTH Aachen 2010.