Algebraische invariante Mengen ebener polynomialer Gleichungen II

Vortrag zum Seminar *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 31.01.2012

Ines Lammertz

Nachdem im letzten Vortrag das theoretische Grundgerüst (erste Integrale, invariante algebraische Mengen, integrierende Faktoren, exponentielle Faktoren) vorgestellt wurde, beschäftigen wir uns nun mit der Konstruktion von ersten Integralen aus algebraischen invarianten Mengen mittels der Darboux-Theorie.

Wir betrachten wieder das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = P(x,y), \qquad \dot{y} = Q(x,y) \tag{1}$$

P und Q sind Polynome mit den Variablen x und y sowie komplexen Koeffizienten.
In diesem Vortrag bezeichnet $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ den Grad des Systems von Polynomen und wir nehmen immer an, dass die Polynome P und Q im Ring der komplexen Polynome mit den Variablen x und y teilerfremd sind.

§1 Einleitung

Bevor wir zum eigentlich Kern dieser Ausarbeitung, der Theorie von Darboux, kommen, benötigen wir zunächst noch eine Rechenregel sowie einige Definitionen:

Im letzten Vortrag hatten wir für invariante algebraische Mengen $f_1(x,y) = 0$ und $f_2(x,y) = 0$ bereits die Rechenregel

$$X(f_1 f_2) = \big(X(f_1)\big)f_2 + f_1\big(X(f_2)\big) = K_{f_1 f_2} f_1 f_2 \tag{*}$$

kennengelernt und außerdem gezeigt, dass

$$K_{f_i^{n_i}} f_i^{n_i} = X\big(f_i^{n_i}\big) = n_i f_i^{n_i - 1} X(f_i)$$

gilt für $n_i \in \mathbb{N}$.

Wir wollen diese beiden Rechenregeln nun verknüpfen und dabei auch kompliziertere Exponenten $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq r$ zulassen.

Betrachten wir zunächst den einfachen Fall

$$X(f^\alpha) = P\frac{\partial f^\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial f^\alpha}{\partial y}.$$

Anwenden der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} X(f^\alpha) &= \alpha f^{\alpha-1} P\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha f^{\alpha-1} Q\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \alpha f^{\alpha-1}\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \alpha f^{\alpha-1} X(f). \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme von $(*)$ können wir dies auf den allgemeinen Fall

$$X\left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r}\right)$$

erweitern.

Einfaches Nachrechnen liefert dann

$$X\left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r}\right) =$$
$$\alpha_1 X(f_1) \cdot f_1^{\alpha_1-1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r} + \alpha_2 X(f_2) \cdot f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2-1} \cdots f_r^{\alpha_r} + \cdots + \alpha_r X(f_r) \cdot f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r-1}.$$

Oder vereinfacht:

$$X\left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r}\right) = \left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r}\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{X(f_i)}{f_i}\right).$$

Mit (3) wird dies zu

$$X\left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r}\right) = \left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_r^{\alpha_r}\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i K_i\right). \tag{7}$$

Definition 2.1
Es ist außerdem

$$\mathbb{F}_{m-1}[x,y] = \left\{ S_i(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij} x^i y^j \text{, Grad } S_i \leq m-1 \right\}$$

ein Vektorraum, dessen Elemente sämtlich Polynome mit maximal Grad $m-1$ und $m(m+1)/2$ Koeffizienten in $\mathbb{F}$ sind.
Der Vektorraum $\mathbb{F}_{m-1}[x,y]$ ist isomorph zu $\mathbb{F}^{m(m+1)/2}$ mit

$S \to (a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \dots, a_{0,m-1})$.

Aus Analysis I wissen wir, dass die oben angegebene Dimension des Vektorraums $m(m+1)/2$ genau der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m entspricht. Wir sehen, dass dies gleich der Zahl der Koeffizienten $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \dots, a_{0,m-1}$ ist.

Beispiel:
Für $m = 3$ haben wir die 6 Koeffizienten $a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{02}, a_{11}$ und es ist $\frac{m(m+1)}{2} = 6$.

Definition 2.2
Wir sagen r Punkte $(x_k, y_k) \in \mathbb{F}^2$mit $k = 1, \dots, r$ sind unabhängig bezüglich $\mathbb{F}_{m-1}[x, y]$, wenn

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} x_k^i y_k^j a_{ij} = 0 \qquad , k = 1, \dots, r$$

in $\mathbb{F}^{m(m+1)/2}$ einen linearen Unterraum der Dimension $[m(m+1)/2] - r$ definiert.

Beispiel:
Wir überprüfen die Punkte $(1,0); (0,1)$ für $m = 2$ auf Unabhängigkeit. Die Summe liefert ein homogenes lineares Gleichungssystem für die a_{ij}, welches dann in unserem Fall einen Unterraum der Dimension $[m(m+1)/2] - r = 3 - 2 = 1$ definieren soll.
Es gilt:

$$\sum_{i+j=0}^{2-1} x_k^i y_k^j a_{ij} = a_{00}x^0y^0 + a_{10}x^1y^0 + a_{01}x^0y^1 = 0.$$

Einsetzen der beiden Punkte liefert

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10} \qquad &= 0 \\ a_{00} + \qquad + a_{01} &= 0 \end{aligned}$$

und wir erhalten wegen $-a_{00} = a_{10} = a_{01}$ wie gewünscht einen Unterraum der Dimension eins. Die Punkte sind demnach unabhängig.

Gegenbeispiel:
Betrachten wir dieses mal die Punkte $(0,0); (1,0); (2,0)$. Wegen $m = 2$ und $r = 3$ müsste unser Unterraum nun Dimension null haben, d.h. der Unterraum hat nur ein einziges Element: den Nullvektor.
Es gilt wieder:

$$\sum_{i+j=0}^{1} x_k^i y_k^j a_{ij} = a_{00}x^0y^0 + a_{10}x^1y^0 + a_{01}x^0y^1 = 0.$$

Einsetzen der drei Punkte liefert aber

$$\begin{aligned}
a_{00} \quad\quad\; &= 0 \\
a_{00} + \; a_{10} &= 0 \\
a_{00} + \; 2a_{10} &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a_{00} = a_{10} = 0$ und $a_{01} =$ beliebig.

Offensichtlich erhalten wir nicht den Nullvektor und somit hat der Unterraum nicht Dimension null, d.h. die Punkte sind nicht unabhängig.

Definition 2.3
Ein stationärer Punkt (x_0, y_0) des Systems (1) wird schwach genannt, wenn die Divergenz $\mathrm{div}(P, Q)$ des Systems im Punkt (x_0, y_0) null ist.

§2 Darboux-Theorie der Integrierbarkeit komplexer Systeme von Polynomen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von ersten Integralen unter Zuhilfenahme einiger ausgewählter Teile der Darbouxschen Theorie.

Satz 2.4
Wir nehmen an, dass ein komplexes System von Polynomen (1) von Grad m p irreduzible invariante Mengen $f_i(x,y) = 0$ zulässt, mit Kofaktoren K_i mit $i = 1, \dots, p$ sowie q exponentielle Faktoren $\exp(g_i/h_i)$ mit Kofaktoren L_j mit $j = 1, \dots, q$ und r unabhängige singuläre Punkte $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ zulässt, sodass $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ für $i = 1, \dots, p$ und $k = 1, \dots, r$.
Dann gilt:

Satz 2.4.i
a) Es existieren $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die nicht alle gleich null sind, sodass

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i = 0$$

genau dann wenn die Funktion

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} \tag{8}$$

ein erstes Integral des Systems (1) ist.

Beweis von 2.4.i (a)
Entsprechend unserer Annahme haben wir p invariante Mengen $f_i = 0$ mit Kofaktoren K_i. Aus dem vorherigen Vortrag wissen wir, dass die f_i die Gleichung $X(f_i) = K_i f_i$ erfüllen.
(a) folgt dann direkt aus (7), denn es gilt

$$X\left(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p}\right) = (f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p})\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X(f_i)}{f_i}\right) = (f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p})\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i\right).$$

Da (8) ein erstes Integral ist, gilt

$X(H) = 0$ mit $H = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p}$,

und damit

$$(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p})\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i\right) = 0.$$

Wegen $H \neq 0$ folgt daraus direkt

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i = 0.$$

b)
Es existieren $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ die nicht alle gleich null sind, sodass

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

genau dann wenn die Funktion

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1} \cdot \left(\exp\left(\frac{g_2}{h_2}\right)\right)^{\mu_2} \cdots \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q} \tag{9}$$

ein erstes Integral des Systems (1) ist.

Beweis von 2.4.i (b)
Wir schreiben $F_j = \exp(g_j/h_j)$. Zusätzlich zu den p invarianten Mengen $f_i = 0$ mit Kofaktoren K_i gibt es nun q exponentielle Faktoren $F_j$mit Kofaktoren L_j, welche die Gleichung $X(F_j) = L_j F_j$ erfüllen.

(b) folgt wieder aus (7), denn es gilt

$$X\left(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \cdots F_q^{\mu_q}\right) =$$

$$(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \cdots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{X(f_i)}{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \frac{X(F_j)}{F_j} \right) =$$

$$(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \cdots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j \right).$$

Da (9) ein erstes Integral ist, gilt

$X(H) = 0$ mit $H = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \cdots F_q^{\mu_q}$,

und damit

$$(f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \cdots F_q^{\mu_q}) \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j \right) = 0.$$

Wegen $H \neq 0$ folgt daraus direkt

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0.$$

$q.e.d.$

Beispiel zu 2.4.i (a)
Wenn $a \neq 0$ ist, dann hat das quadratische System

$$P = \dot{x} = -y(ay + b) - (x^2 + y^2 - 1), \qquad Q = \dot{y} = x(ay + b) \tag{10}$$

mit $m(m+1)/2 = 3$ die algebraischen Lösungen

$f_1 = ay + b = 0$ mit Kofaktor $K_1 = ax$ und
$f_2 = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mit Kofaktor $K_2 = -2x$.

Die Kofaktoren erhalten wir durch anwenden von (3). Es gilt

$$X(f) = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf.$$

Einsetzten liefert

$$X(f_1) = P\frac{\partial(ay + b)}{\partial x} + Q\frac{\partial(ay + b)}{\partial y} = 0 + x(ay + b) \cdot a = ax \cdot f_1.$$

Also $K_1 = ax$.
Analog erhalten wir K_2:

$$X(f_2) = P\frac{\partial(x^2+y^2-1)}{\partial x} + Q\frac{\partial(x^2+y^2-1)}{\partial y}$$
$$= [-y(ay+b) - (x^2+y^2-1)] \cdot 2x + x(ay+b) \cdot 2y$$
$$= -2x \cdot f_2$$

Und das liefert $K_2 = -2x$.

Mit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = a$ ist $2K_1 + aK_2 = 0$ und wir erhalten mit (2.4.i), dass

$$H(x,y) = (ay+b)^2(x^2+y^2-1)^a$$

ein erstes Integral des Systems (10) ist.

Satz 2.4.ii

Wenn $p + q + r \geq [m(m+1)/2] + 1$, dann existieren $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ nicht alle null, dergestalt, dass

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

gilt.

Beweis von 2.4.ii

Es muss gezeigt werden, dass die Polynome K_i, L_j für $p + q + r \geq [m(m+1)/2] + 1$ linear abhängig sind.

(a) „Simple Version“

Betrachten wir zunächst den Fall $p + q \geq m(m+1)/2$.

Da die Kofaktoren Polynome vom Grad $m-1$ sind, gilt $K_i, L_j \in \mathbb{C}_{m-1}[x,y]$.

Die Dimension von $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist $m(m+1)/2$.

Der Austauschsatz von Steinitz liefert:

Wenn die Dimension des Vektorraums $m(m+1)/2$ ist, dann hat jede linear unabhängige Menge von Elementen dieses Vektorraums höchstens $m(m+1)/2$ Elemente.

Für $p + q \geq m(m+1)/2$ können wir demnach direkt folgern, dass die Polynome K_i, L_j linear abhängig sind und somit eine nichttriviale Linearkombination der Form

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

existiert.

(b) „Verfeinerte Version“ für $p + q + r \geq [m(m+1)/2] + 1$.
Es gilt natürlich immer noch $K_i, L_j \in \mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ und die Dimension von $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist weiterhin $m(m+1)/2$.
Entsprechend unserer Annahme ist (x_k, y_k) ein stationärer Punkt des Systems (1) und es gilt $P(x_k, y_k) = Q(x_k, y_k) = 0$.
Aus

$$X(f_i) = P\frac{\partial f_i}{\partial x} + Q\frac{\partial f_i}{\partial y} = K_i f_i \tag{3}$$

folgt dann, dass $K_i(x_k, y_k) f_i(x_k, y_k) = 0$ ist.
Wir hatten angenommen, dass $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ ist, daher muss $K_i(x_k, y_k) = 0$ für $i = 1, \ldots, p$.
Entsprechend gilt

$$X(F_j) = P\frac{\partial F_j}{\partial x} + Q\frac{\partial F_j}{\partial y} = L_j F_j$$

und daraus folgt $L_j(x_k, y_k) F_j(x_k, y_k) = 0$.
Da aber $F_j = \exp(g_j/h_j)$ nicht verschwindet, muss $L_j(x_k, y_k) = 0$ sein für $j = 1, \ldots, q$.
Unserer Annahme entsprechend sind die r stationären Punkte unabhängig. Damit folgt unter Berücksichtigung von Definition 2.2, dass die Polynome K_i und L_j einen linearen Unterraum S von $\mathbb{C}_{m-1}[x,y]$ der Dimension $[m(m+1)/2] - r$ aufspannen.
Wie in (a) wissen wir, dass die $p + q$ Polynome K_i und L_j für $p + q > [m(m+1)/2]$ linear abhängig sind. Entsprechend können wir folgern, dass die
$p + q$ Polynome K_i und L_j für $p + q > [m(m+1)/2] - r$ in S linear abhängig sind.
Es gibt also $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ die nicht alle gleich null sind, sodass

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

ist. Damit ist (b) bewiesen.

Beispiel zu 2.4.ii
Für $abc \neq 0$ hat das reelle quadratische System

$$P = \dot{x} = x(ax + c), \qquad Q = \dot{y} = y(2ax + by + c) \tag{11}$$

genau die fünf folgenden invarianten algebraischen Lösungen mit Grad 1:

$f_1 = x = 0$
$f_2 = ax + c = 0$
$f_3 = y = 0$

$f_4 = ax + by = 0$
$f_5 = ax + by + c = 0$

Einfaches Nachrechnen liefert:

$$X(f_1) = P\frac{\partial f_1}{\partial x} + Q\frac{\partial f_1}{\partial y} = P \cdot 1 = x(ax + c) = (ax + c)f_1$$
$$X(f_2) = P\frac{\partial f_2}{\partial x} + Q\frac{\partial f_2}{\partial y} = a \cdot P = ax(ax + c) = ax \cdot f_2$$
$$X(f_3) = P\frac{\partial f_3}{\partial x} + Q\frac{\partial f_3}{\partial y} = 1 \cdot Q = y(2ax + by + c) = (2ax + by + c)f_3$$
$$X(f_4) = P\frac{\partial f_4}{\partial x} + Q\frac{\partial f_4}{\partial y} = a \cdot P + b \cdot Q = ax(ax + c) + by(2ax + by + c)$$
$$= ax(ax + c) + by \cdot ax + by(ax + by + c) = (ax + by + c)f_4$$
$$X(f_5) = P\frac{\partial f_5}{\partial x} + Q\frac{\partial f_5}{\partial y} = a \cdot P + b \cdot Q = (ax + by)f_5$$

und wir erhalten damit die fünf Kofaktoren

$K_1 = ax + c$
$K_2 = ax$
$K_3 = 2ax + by + c$
$K_4 = ax + by + c$
$K_5 = ax + by.$

Es ist nun $p = 5 > [m(m + 1)/2] + 1 = 3 + 1 = 4.$
Wegen (2.4.ii) wissen wir dass $\lambda_i \in \mathbb{C}$ nicht alle null existieren, sodass

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i = 0$$

gilt. Wegen (2.4.i) können wir folgern, dass ein erstes Integral der Form

$H(x, y) = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} f_4^{\lambda_4} f_5^{\lambda_5}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ existiert.

Nun muss $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i = 0$, also

$$0 = \lambda_1(ax + c) + \lambda_2(ax) + \lambda_3(2ax + by + c) + \lambda_4(ax + by + c) + \lambda_5(ax + by)$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = ax(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) + by(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) + c(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)$$

Damit ist eine mögliche Lösung von $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i = 0$ gegeben durch
$\lambda_1 = \lambda_5 = -1, \lambda_2 = \lambda_4 = 1$ und $\lambda_3 = 0.$

Entsprechend ist dann ein erstes Integral von (11)

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= f_1^{\lambda_1} \cdots\ f_5^{\lambda_5} \\
&= x^{-1} \cdot (ax+c)^1 \cdot y^0 \cdot (ax+by)^1 \cdot (ax+by+c)^{-1} \\
&= \frac{(ax+c)(ax+by)}{x(ax+by+c)}.
\end{aligned}
$$

Satz 2.4.iii
Es existieren $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$, nicht alle null, sodass

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -\mathrm{div}(P,Q)$$

genau dann wenn (9) ein integrierender Faktor des Systems (1) ist.

Beweis von 2.4.iii
Wenn $f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \cdots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \cdots F_q^{\mu_q} \coloneqq R$ ein integrierender Faktor ist, dann wissen wir aus dem letzten Vortrag, dass $X(R) = -R\ \mathrm{div}(P,Q)$ gilt (und umgekehrt).
(7) liefert, dass

$$X(R) = R\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j\right).$$

Daraus folgt direkt

$$
\begin{aligned}
&R\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j\right) = \ -R\ \mathrm{div}(P,Q) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = \ -\mathrm{div}(P,Q).
\end{aligned}
$$

$q.e.d.$

Beispiel zu 2.4.iii
1)
Das reelle System

$$P(x,y) = \dot{x} = x(1-y), \qquad Q(x,y) = \dot{y} = y(2+x)$$

hat die invarianten algebraischen Mengen

$$f_1(x,y) = x \qquad \text{und} \qquad f_2(x,y) = y.$$

Nachrechnen liefert die Kofaktoren

$$X(f_1) = P\frac{\partial f_1}{\partial x} + Q\frac{\partial f_1}{\partial y} = P = (1-y)f_1$$

$$X(f_2) = P\frac{\partial f_2}{\partial x} + Q\frac{\partial f_2}{\partial y} = Q = (2+x)f_2.$$

Es gilt

$$-\mathrm{div}(P,Q) = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = -(1-y) - (2+x) = \lambda_1(1-y) + \lambda_2(2+x)$$

für $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Also ist $f_1^{-1} f_2^{-1} = \frac{1}{xy}$ ein integrierender Faktor.

Im letzten Vortrag wurde unter Zuhilfenahme von (5) bereits ein zugehöriges erstes Integral bestimmt:

$H(x,y) = \ln(y) - y - 2 \cdot \ln(x) - x$

2)

Das reelle quadratische System

$$P = \dot{x} = -y - b(x^2 + y^2), \qquad Q = \dot{y} = x$$

hat die invariante Menge $f_1 = x^2 + y^2 = 0$.

Wegen

$$\begin{aligned} X(f_1) = P\frac{\partial f_1}{\partial x} + Q\frac{\partial f_1}{\partial y} &= P \cdot 2x + Q \cdot 2y \\ &= 2x\big(-y - b(x^2+y^2)\big) + 2yx \\ &= -2xy - 2bx(x^2+y^2) + 2xy \\ &= -2bx(x^2+y^2) \\ &= -2bxf_1 \end{aligned}$$

erhalten wir den Kofaktor $K_1 = -2bx$.

Offensichtlich ist aber

$$K_1 = \mathrm{div}(P,Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -2bx$$

Daher können wir schreiben:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \cdot K_1 = -\mathrm{div}(P, Q) \\ \Leftrightarrow\ &\lambda_1 \cdot (-2bx) = 2bx \\ \Leftrightarrow\ &\lambda_1 = -1 \end{aligned}$$

Nach (2.4.iv) ist dann f_1^{-1} ein integrierender Faktor.
Mit (8.2) finden wir das zu f_1^{-1} gehörige erste Integral H:

$$H(x, y) = \int f_1^{-1}(x, y) \cdot P(x, y) dy + h(x)$$

wobei $h(x)$ so gewählt wird, dass $\frac{\partial H}{\partial x} = -f_1^{-1} \cdot Q$ ist.

Einsetzen und integrieren liefert

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \int \left((x^2 + y^2)^{-1}\left(-y - b(x^2 + y^2)\right)\right) dy + h(x) \\ &= \int \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} - b\right) dy + h(x) \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2y}{x^2 + y^2} dy + \int b\, dy + h(x) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - by + h(x) \end{aligned}$$

Nun muss $h(x)$ dergestalt sein, dass $\frac{\partial H}{\partial x} = -f_1^{-1} \cdot Q = -x(x^2 + y^2)^{-1}$
Wenn wir H nach x ableiten erhalten wir:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2)^{-1} = -f_1^{-1} \cdot Q.$$

In diesem Fall ist also $h(x) = 0$ und wir haben als erstes Integral:

$$H(x, y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - by.$$