Floquet Theorie II

Vortrag zum Seminar Gewöhnliche Differentialgleichungen, 18.10.2011

Sebastian Monschang

§ 1 Einführung

Auf den Ergebnissen des ersten Vortrags basierend werden wir in diesem Vortrag gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme der Gestalt

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

auf die Stabilität der Nulllösung untersuchen, wobei $A : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}), t \to A(t)$ eine stetige und T-periodische Abbildung ist. Dies werden wir über eine Transformation des Systems in ein homogenes lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten machen, um die Stabilität auf die uns aus der Vorlesung bekannten Kriterien zurückzuführen.

§ 2 Anwendungen der Floquet Normalform

— *Beispiele/Anwendungen zum ersten Vortrag* —

In diesem Abschnitt werden zunächst die Ergebnisse des vorherigen Vortrags beispielhaft angewendet.

(2.1) Beispiel
Betrachte das Anfangswertproblem $\dot{x} = a(t) \cdot x,\ x(t_0) = 1$ mit einer beliebigen stetigen T-periodischen Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zudem sei $\widetilde{c} \in \mathbb{R}$ konstant. Dann gilt:

$$\dot{x} = a(t) \cdot x$$

Da a stetig und periodisch, somit auch beschränkt ist, ex. eine Stammfunktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln x &= A(t) + \widetilde{c} \\ \Leftrightarrow x \quad &= e^{A(t)} \cdot e^{\widetilde{c}} \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\widetilde{c} = -A(t_0)$ um die Anfangswert-Bedingung zu erfüllen:

$$\Rightarrow x = \underbrace{e^{A(t)} \cdot \underbrace{e^{-A(t_0)}}_{=:c}}_{=:P(t)}$$

Wir erhalten somit die Floquet Normalform:

$$\Rightarrow \Phi(t) = P(t) \cdot e^{B \cdot t}$$

mit $B = 0$, da $P(t)$ bereits T-periodisch ist. Der charakteristische Multiplikator dieses 1-dim. Systems ist dementsprechend der (Eigen-)Wert von $e^{B \cdot T} = 1$. Für den Floquet-Exponenten $\mu \in \mathbb{C}$ gilt laut Definition (1.11): $e^{\mu \cdot T} = 1 \Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot k}{T}$ für $k \in \mathbb{Z}$. $\diamond$

Kommen wir zu einem weiteren Beispiel:

(2.2) Beispiel
Für das autonome lineare System $\dot{x} = A \cdot x$ erfüllt die Fundamentalmatrixlösung $t \mapsto \Phi(t)$ die Identität: $\Phi(T - t) = \Phi(T)\Phi^{-1}(t)$, welche wir an dieser Stelle jedoch nicht beweisen werden. Für nicht-autonome homogene lineare Systeme gilt diese allerdings nicht, wie im Folgenden gezeigt wird:

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } \Phi(t) = \cos(t) \cdot e^t, \text{ dann gilt:} \\
&\Phi(T - t) = \cos(T - t) \cdot e^{T-t} = \cos(T - t) \cdot e^T \cdot e^{-t} \\
&= [\cos(T) \cdot \cos(t) - \sin(T) \cdot \sin(t)] \cdot e^T \cdot e^{-t} \\
&\neq \cos(T) \cdot e^T \cdot \cos^{-1}(t) \cdot e^{-t} = \Phi(T)\Phi^{-1}(t)
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass Φ eine Lösung eines nicht-autonomen periodischen homogenen linearen Systems (1) ist:

$$\dot{\Phi}(t) = -\sin(t) \cdot e^t + \cos(t) \cdot e^t = \underbrace{\cos(t) \cdot e^t}_{\Phi(t)} \cdot \underbrace{\left(\frac{-\sin(t)}{\cos(t)} + 1 \right)}_{A(t)}$$

Also gilt diese Gleichung im allgemeinen nicht für nicht-autonome periodische homogene lineare Systeme. $\diamond$

Für das letzte Beispiel benötigen wir die *Formel von Liouville*, die hier jedoch nicht bewiesen wird.

(2.3) Hilfssatz (Liouvillesche Formel)
Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : J \to \mathbb{R}^{nxn}$ stetig und sei Φ(t) eine Matrixlösung auf J des homogenen linearen Systems $\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ x \in \mathbb{R}^n$, mit $A : J \to \mathbb{R}^n, t \mapsto A(t)$. Dann gilt für alle $t, t_0 \in J$:

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}(A(s))ds}$$

◇

(2.4) Beispiel
Sei $A : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}), t \to A(t)$ eine stetige und T-periodische Abbildung. Die Floquet Normalform der Fundamentalmatrixlösung des Systems $\dot{x} = A(t)x$ hat die Form $\Phi(t) = P(t)e^{t \cdot B}$. Durch einsetzen in die Liouvillesche Formel (2.3) erhält man:

$$\underbrace{det(P(T)e^{T\cdot B})}_{=det(P(T))\cdot \underbrace{det(e^{T\cdot B})}_{=e^{T\cdot \mathrm{Spur}(B)}}} = det(P(0)) \cdot e^{\int_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds}$$

Da P T-periodisch ist, gilt $P(T) = P(0)$ und somit:

$$\begin{aligned} & det(P(0)) \cdot e^{T\cdot \mathrm{Spur}(B)} && = det(P(0)) \cdot e^{\int_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds} \\ \Leftrightarrow\ & e^{T\cdot \mathrm{Spur}(B)} && = e^{\int_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds} \\ \Leftrightarrow\ & T \cdot \mathrm{Spur}(B) && = \int\limits_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{Spur}(B) && = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds \end{aligned}$$

Zuletzt wollen wir nocheinmal die Gleichung $e^{T\cdot \mathrm{Spur}(B)} = e^{\int_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds}$ betrachten, aus welcher folgt, dass das Produkt der charakteristischen Multiplikatoren gegeben ist durch

$$e^{\int_0^T \mathrm{Spur}(A(s))ds} = e^{T\cdot \mathrm{Spur}(B)} = e^{\mathrm{Spur}(T\cdot B)} = \det(e^{T\cdot B}),$$

da die Determinante das Produkt der Eigenwerte der Matrix ist. Seien nun die charakteristischen Multiplikatoren gegeben durch $\lambda_i \in \mathbb{C}$, dann gilt: $\lambda_i = e^{T\cdot \mu_i}$ ($\mu_i \in \mathbb{C}$

sind charakteristische Exponenten).

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{Spur}(T\cdot B)} &= \prod_{i=1}^{n} e^{T\cdot \mu_i} \\ \Leftrightarrow T\cdot \mathrm{Spur}(B) &= T\cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i \\ \Leftrightarrow \mathrm{Spur}(B) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \end{aligned}$$

Letztendlich können wir hierdurch folgern, dass die Summe der charakteristischen Exponenten gegeben ist durch Spur(B). ◇

— Anwendungen der Floquet Normalform —

Das System (1) hat stets die triviale Lösung (stationäre Lösung). Für homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten haben wir in der Vorlesung bereits die Stabilität von stationären Lösungen untersucht. In diesem Abschnitt werden wir herausfinden, dass wir diese Stabilitätsbetrachtungen auf unser System (1) ausweiten können. Zunächst benötigen wir jedoch folgenden Satz:

(2.5) Satz
Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ seien die Eigenwerte von A, einschließlich algebraischer Vielfachheiten. Dann gilt:

$\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$ sind die Eigenwerte von A^k und $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$ sind die Eigenwerte von e^A. ◇

Der Beweis wird an dieser Stelle nicht geführt, da er auf einer einfachen Induktion beruht (Lineare Algebra 1).

Das nächste Resultat benutzt die Floquet Theorie um zu zeigen, dass das System (1) äquivalent zu einem homogenen linearen System mit konstanten Koeffizienten ist. Dieses Resultat demonstriert, dass die Stabilität der Nulllösung oft durch die charakteristischen Multiplikatoren bestimmt werden kann.

(2.6) Satz
Die Standardfundamentalmatrix Lösung der T-periodischen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t) \cdot x$ (System (1)) bei $t = 0$ sei gegeben durch $Q(t) \cdot e^{t\cdot R}$, mit $Q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ 2T-periodisch und $R \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$, dann transformiert die Zeit-abhängige Koordinatentransformation $x = Q(t) \cdot y$ dieses System in ein (reelles) lineares System $\dot{y} = R \cdot y$ mit konstanten Koeffizienten.

Das heißt, es existiert eine Zeit-abhängige (2T-periodische) Koordinatentransformation, die das T-periodische System in ein (reelles) lineares System mit konstanten Koeffizienten transformiert.

1) Wenn die charakteristischen Multiplikatoren des periodischen Systems (1) alle betraglich kleiner 1 sind oder äquivalent dazu alle charakteristischen Exponenten negativen Realteil besitzen, dann ist die Nulllösung asymptotisch stabil.

2) Wenn die charakteristischen Multiplikatoren des periodischen Systems (1) alle betraglich kleiner gleich 1 sind oder äquivalent dazu alle charakteristischen Exponenten nicht-positiven Realteil besitzen und wenn die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit jedes charakteristischen Multiplikators ist mit Betrag gleich 1 oder äquivalent dazu wenn die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit jedes charakteristischen Exponentens mit Realteil 0 ist, dann ist die Nulllösung (Lyapunov-)stabil.

3) Wenn mindestens ein charakteristischer Multiplikator des periodischen Systems (1) betraglich größer 1 oder äquivalent dazu ein charakteristischer Exponent positiven Realteil hat, dann ist die Nulllösung instabil. ◇

Beweis

1) Laut dem “Satz von Floquet“ (1.5) existiert eine reelle $n \times n$-Matrix R und eine reelle 2T-periodische Abbildung $Q(t)$, sodass die Standardfundamentalmatrixlösung $\Phi(t)$ bei $t = 0$ des Systems darstellbar ist als $\Phi(t) = Q(t) \cdot e^{t \cdot R}$. Zudem existiert eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ und eine T-periodische Abbildung $P(t)$, sodass $\Phi(t) = P(t) \cdot e^{t \cdot B}$. Die charakteristischen Multiplikatoren sind, wie wir wissen, die Eigenwerte von $e^{T \cdot B}$. Da $\Phi(0)$ die Einheitsmatrix, P T-periodisch und Q 2T-periodisch ist, gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(2 \cdot T) &= Q(2 \cdot T) \cdot e^{2 \cdot T \cdot R} = P(2 \cdot T) \cdot e^{2 \cdot T \cdot B} \\ \Rightarrow e^{2 \cdot T \cdot R} &= e^{2 \cdot T \cdot B} \end{aligned}$$

und insbesondere auch:

$$(e^{T \cdot B})^2 = e^{2 \cdot T \cdot R} \tag{2}$$

Laut Satz (2.5) sind die Eigenwerte von $e^{2 \cdot T \cdot R}$ (im Folgenden auch bezeichnet als $EW(e^{2 \cdot T \cdot R})$) das Quadrat der charakteristischen Multiplikatoren, welche alle laut Voraussetzung betraglich kleiner 1 sind. Daraus folgt:

$$|EW(e^{T \cdot B})| < 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} |EW(e^{2 \cdot T \cdot R})| < 1 \Rightarrow |EW(e^{T \cdot R})| < 1$$

Sei $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $T \cdot R$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass $z = \lambda + i \cdot \mu$. Mit Satz (2.5) folgt:

$$|EW(e^{T \cdot R})| = |e^z| = |e^{\lambda + i \cdot \mu}| = \underbrace{|e^{i \cdot \mu}|}_{=1} \cdot \underbrace{|e^{\lambda}|}_{\overset{!}{<}1}$$

$$\Rightarrow \lambda < 0$$

Also haben laut Satz (2.5) alle Eigenwerte der reellen Matrix R negativen Realteil. Nun betrachten wir die Variablen-Transformation $x = Q(t) \cdot y$.
Laut Voraussetzung gilt für $t = 0$:

$$\Phi(t) = Q(t) \cdot e^{t \cdot R} = E$$

Folglich gilt $x(t) = Q(t) \cdot e^{t \cdot R} \cdot x(0)$ und da $Q(t)$ invertierbar ist, folgt $y(t) = e^{t \cdot R} \cdot x(0)$ und daraus durch differenzieren wiederum $\dot{y} = R \cdot y$. Mit den Resultaten aus der Vorlesung über die Linearisierung ist die Nulllösung für $\dot{y} = R \cdot y$ asymptotisch stabil, daher existieren nach Skript (Kapitel 2,(2.10)) reelle $\lambda > 0, C > 0$, sodass

$$|y(t)| \leq C \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot |y(0)| \quad \forall t \geq 0 \; \forall y(0) \in \mathbb{R}^n$$

Weil Q periodisch ist, ist Q beschränkt. Also erhält man eine ähnliche Abschätzung für $x(t)$ mit $|Q(t)| \leq D,\ D > 0$ reell wie folgt:

$$|x(t)| = |Q(t) \cdot y(t)| \leq D \cdot C \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot |y(0)|$$

Da $x(t)$ somit ebenfalls beschränkt ist, gilt (Kapitel 2,(2.10)) ebenfalls für das Ausgangssystem, deshalb ist die Nulllösung für $\dot{x} = A(t) \cdot x$, mit $x = Q(t) \cdot y$, auch asymptotisch stabil.

2) Beweis wird nicht geführt.

3) Anfang analog zum Beweis von Teil 1) bis (2). Laut Satz (2.5) sind die Eigenwerte von $e^{2 \cdot T \cdot R}$ das Quadrat der charakteristischen Multiplikatoren, von welchen mindestens einer laut Voraussetzung betraglich größer 1 ist. Daraus folgt:

$$|EW(e^{T \cdot R})| > 1$$

Sei $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $T \cdot R$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass $z = \lambda + i \cdot \mu$. Mit Satz (2.5) folgt:

$$|EW(e^{T \cdot R})| = |e^{\lambda + i \cdot \mu}| = \underbrace{|e^{i \cdot \mu}|}_{=1} \cdot \underbrace{|e^{\lambda}|}_{\overset{!}{>}1}$$

$$\Rightarrow \lambda > 0$$

Also hat laut Satz (2.5) mindestens ein Eigenwert der reellen Matrix $T \cdot R$ positiven Realteil. Nun betrachten wir die Variablen-Transformation $x = Q(t) \cdot y$.
Da $x(t) = Q(t) \cdot e^{t \cdot R} \cdot x(0)$ (siehe Beweis zu 1)) und $Q(t)$ invertierbar ist, folgt wiederum $y(t) = e^{t \cdot R} \cdot x(0)$ und $\dot{y} = R \cdot y$.
Nach Vorlesung (Kapitel 2,(2.10)(b)) existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $c \in \mathbb{C}^n$ mit $\|c\| < \epsilon$, aber die Lösung $e^{t \cdot R} \cdot c$ ist auf $[0, \infty]$ unbeschränkt. Daraus folgt, dass die Nulllösung für $\dot{y} = R \cdot y$ instabil ist. Da Q T-periodisch, somit auch beschränkt, und invertierbar ist, ist Q^{-1} auch beschränkt und T-periodisch. Es folgt:

$$\begin{aligned} x &= Q \cdot y \\ \Leftrightarrow \underbrace{y}_{\text{unbeschränkt}} &= \underbrace{Q^{-1}}_{\text{beschränkt}} \cdot x \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(t)$ ist unbeschränkt und somit ist die Nulllösung instabil. □

Obwohl dieses Stabilitätstheorem sehr elegant aussieht, ist es in der Praxis bei realen Problemen meistens unmöglich, die Eigenwerte von $e^{T \cdot B}$ zu bestimmen, d.h. es ist nicht einsichtig, dass die Eigenwerte gefunden werden, ohne das gesamte System vorher lösen zu müssen (da $Q(t) \cdot e^{T \cdot B} = \Phi(t)$ ist). Wir müssen jedoch lediglich endlich viele Zahlen (die charakteristischen Multiplikatoren) approximieren, um eine Aussage über die Stabilität des Systems treffen zu können. Diese Tatsache ist wichtig, beispielsweise kann die Stabilität oft durch Anwendung einer numerischen Methode, um die charakteristischen Multiplikatoren zu approximieren, überprüft werden. Dies wollen wir jedoch nicht vertiefen.

Existiert eine Methode, die charakteristischen Exponenten explizit zu bestimmen, ohne die Lösung der Differentialgleichung explizit zu finden? Das Folgende Beispiel zeigt, dass keine solche Methode in irgendeiner Art und Weise aus den Eigenwerten von $A(t)$ konstruiert werden kann.

(2.7) Beispiel (Von Lawrence Marcus und Hidehiko Yamabe)
Betrachte das π-periodische System $\dot{x} = A(t) \cdot x$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cdot \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \cdot \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenwerte durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$
\begin{aligned}
&\left|(x \cdot E) - \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cdot \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \cdot \sin^2(t) \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} x + 1 - \frac{3}{2} \cdot \cos^2(t) & -1 + \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \\ 1 + \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) & x + 1 - \frac{3}{2} \cdot \sin^2(t) \end{pmatrix}\right| \\
&= (x + 1 - \frac{3}{2} \cdot \cos^2(t)) \cdot (x + 1 - \frac{3}{2} \cdot \sin^2(t)) - (-1 + \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)) \\
&\quad \cdot (1 + \frac{3}{2} \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)) \\
&= x^2 + x - \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sin^2(t) + x + 1 - \frac{3}{2} \cdot \sin^2(t) - \frac{3}{2} \cdot x \cdot \cos^2(t) - \frac{3}{2} \cdot \cos^2(t) \\
&\quad + \frac{9}{4} \cdot \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) + 1 - \frac{9}{4} \cdot \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) \\
&= x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow x_{1,2} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \cdot i \cdot \sqrt{7}
\end{aligned}
$$

$A(t)$ hat die (von der Zeit unabhängigen) Eigenwerte $\frac{1}{4} \cdot (-1 \pm \sqrt{7} \cdot i)$. Insbesondere ist der Realteil jedes Eigenwertes negativ.
Betrachtet man aber nun die Lösung

$$x(t) = e^{\frac{t}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

des Systems,stellt man allerdings folgendes fest:

Für eine beliebig kleine Konstante $c > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x^*(t) &= e^{\frac{t}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot c \\
\Rightarrow x^*(0) &= \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt:

$$\lim_{t \to \infty} e^{\frac{t}{2}} = \infty$$

Da $x^*(t) = x(t) \cdot c$ ist $x^*(t)$ auch eine Lösung des Systems. Durch geeignete Wahl von c erhalten wir also eine Lösung, welche beliebig nahe bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ startet, jedoch für große t nicht beschränkt ist. Daraus folgt die Instabilität der Nulllösung für (3). $\diamond$

Im vierten Vortrag wird jedoch gezeigt, dass in manchen Fällen die Stabilität der Nulllösung der Differentialgleichung (1) bestimmt werden kann, ohne das System explizit zu lösen bzw. ohne die Floquet Normalform explizit zu bestimmen (Hill's Gleichung).

Die Floquet Normalform kann benutzt werden, um detailierte Informationen über die Lösung der Differentialgleichung zu erhalten. Beispielsweise zerlegt die Floquet Normalform eine Fundamentalmatrix in einen periodischen Teil und einen exponentiellen Teil. Folglich sollte klar sein, dass für einige Systeme periodische Lösungen und für andere keine nicht-trivialen periodischen Lösungen existieren. Diese Aussage wird im folgenden Lemma bewiesen.

(2.8) Lemma
Sei $\mu \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent für die homogene lineare T-periodische Differentialgleichung (1) und $\Phi(t)$ die Standardfundamentalmatrix Lösung bei $t = 0$, dann hat $\Phi(t)$ eine Floquet Normalform $P(t) \cdot e^{t \cdot B}$, sodass μ Eigenwert von B ist. $\diamond$

Beweis
Sei $\widetilde{P}(t) \cdot e^{t \cdot \widetilde{B}}$ eine Floquet Normalform von $\Phi(t)$. Laut Definition der charakteristischen Exponenten existiert ein charakteristischer Multiplikator $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $\lambda = e^{\mu \cdot T}$ und nach Satz (2.5) existiert ein Eigenwert $\nu \in \mathbb{C}$ von $\widetilde{B}$, sodass $e^{\nu \cdot T} = \lambda$. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, sodass $\nu = \mu + \frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot k}{T}$. Definiere $B := \widetilde{B} - \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{T} \cdot E$ und $P(t) := \widetilde{P}(t) \cdot e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot k \cdot t}{T} \cdot E}$. Sei $a \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zu $\widetilde{B}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} B \cdot a &= (\widetilde{B} - \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{T} \cdot E) \cdot a \\ &= \widetilde{B} \cdot a - \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{T} \cdot a \\ &= \nu \cdot a - \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{T} \cdot a \\ &= (\nu - \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{T}) \cdot a \\ &= \mu \cdot a \end{aligned}$$

Somit ist μ Eigenwert von B. Da $P(t)$ T-periodisch ist und $P(t) \cdot e^{t \cdot B} = \widetilde{P}(t) \cdot e^{t \cdot \widetilde{B}}$, folgt, dass $\Phi(t) = P(t) \cdot e^{t \cdot B}$ eine Repräsentation in Floquet Normalform ist, mit μ Eigenwert von B. $\square$

Ein grundlegendes Resultat, dass benutzt wird um mögliche Typen von Lösungen, die auftreten können, zu klassifizieren, ist Inhalt des nächsten Satzes.

(2.9) Satz

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Multiplikator der homogenen linearen T-periodischen Differentialgleichung (1) und $e^{T\cdot\mu} = \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, dann existiert eine (möglicherweise komplexe) nicht-triviale Lösung der Form

$$x(t) = e^{\mu\cdot t} \cdot \rho(t)$$

mit $\rho(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ T-periodische Funktion. Außerdem gilt für diese Lösung

$$x(t+T) = \lambda \cdot x(t) \qquad \diamond$$

Beweis

Sei $\Phi(t)$ die Standardfundamentalmatrix Lösung bei $t = 0$. Laut Lemma (2.8) existiert eine Floquet Normalform-Darstellung $\Phi(t) = P(t) \cdot e^{t\cdot B}$, sodass μ Eigenwert von B ist. Demzufolge existiert ein Vektor $v \neq 0$, sodass $B \cdot v = \mu \cdot v$.

Mit

$$\begin{aligned} B \cdot v &= \mu \cdot v \\ B^2 \cdot v &= \mu \cdot B \cdot v = \mu^2 \cdot v \\ &\vdots \\ B^n \cdot v &= \mu^n \cdot v \quad , n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} & e^{\mu\cdot t} \cdot v \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot t^k \cdot \mu^k \cdot v \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot t^k \cdot B^k \cdot v \\ &= e^{t\cdot B} \cdot v \end{aligned}$$

Also gilt $e^{t\cdot B} \cdot v = e^{\mu\cdot t} \cdot v$, somit wird die Lösung $x(t) = \Phi(t) \cdot v$ repräsentiert in der Form $x(t) = P(t) \cdot e^{t\cdot B} \cdot v = e^{\mu\cdot t} \cdot P(t) \cdot v$. Die Lösung, welche von der ersten Aussage des Satzes gefordert wird, erhalten wir durch (Definition) $\rho(t) = P(t) \cdot v$. Die zweite Aussage wird wie folgt bewiesen:

$$\begin{aligned} & x(t+T) = e^{\mu\cdot(t+T)} \cdot \rho(t+T) \\ & = e^{\mu\cdot t} \cdot e^{\mu\cdot T} \cdot P(t+T) \cdot v = e^{\mu\cdot t} \cdot e^{\mu\cdot T} \cdot P(t) \cdot v \\ & = e^{\mu\cdot t} \cdot e^{\mu\cdot T} \cdot \rho(t) = \lambda \cdot x(t) \end{aligned} \qquad \square$$

(2.10) Satz
Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ charakteristische Multiplikatoren der homogenen linearen T-periodischen Differentialgleichung (1) und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ seien die charakteristischen Exponenten, sodass $e^{T\cdot\mu_1} = \lambda_1,\ e^{T\cdot\mu_2} = \lambda_2$. Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, dann existieren T-periodische Funktionen $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, sodass $x_1(t) = e^{\mu_1\cdot t}\cdot\rho_1(t)$ und $x_2(t) = e^{\mu_2\cdot t}\cdot\rho_2(t)$ linear unabhängige Lösungen sind. $\diamond$

Beweis
Sei $\Phi(t) = P(t)\cdot e^{t\cdot B}$ (wie in Lemma (2.8), insbesondere also $P(0) = E$), sodass μ_1 Eigenwert von B ist. Außerdem sei $v_1 \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert μ_1. Da λ_2 Eigenwert der Monodromy-Matrix $\Phi(\tau + T)\cdot\Phi(\tau)^{-1}$ ist, existiert laut Satz (2.5) ein Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$ von B, sodass

$$e^{T\cdot\mu} = \lambda_2 = e^{T\cdot\mu_2}$$

Daraus folgt, dass ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $\mu_2 = \mu + \frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k}{T}$.
Außerdem gilt $\mu \neq \mu_1$, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Demzufolge, wenn $v_2 \neq 0$ Eigenvektor von B zum Eigenwert μ ist, sind die Eigenvektoren v_1 und v_2 linear unabhängig. Wie im Beweis zu Satz(2.9) existieren Lösungen der Form

$$x_1(t) = e^{\mu_1\cdot t}\cdot P(t)\cdot v_1$$
$$x_2(t) = e^{\mu\cdot t}\cdot P(t)\cdot v_2$$

Außerdem sind die Lösungen linear unabhängig, da $x_1(0) = v_1$ und $x_2(0) = v_2$. Als letztes halten wir fest, dass x_2 in der erforderlichen Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (e^{\mu\cdot t}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}{T}})\cdot(e^{\frac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}{T}}\cdot P(t)\cdot v_2) \\ &= e^{t\cdot(\mu+\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}{T})}\cdot(e^{\frac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}{T}}\cdot P(t)\cdot v_2) \\ &= e^{\mu_2\cdot t}\cdot\underbrace{(e^{\frac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}{T}}\cdot P(t)\cdot v_2)}_{\text{T-periodisch}\to\rho_2(t)} \end{aligned}$$

$\square$

Mit diesen Ergebnissen erhält man folgendes

(2.11) Korollar
Das T-periodische System (1) hat die Floquet Normalform

$$t \mapsto Q(t)\cdot e^{t\cdot R}$$

mit der reellen 2T-periodischen Funktion $Q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ und der reellen Matrix $R \in \mathrm{Mat}(n\times n;\mathbb{R})$. Laut Satz (2.9) werden alle Lösungen des Systems repräsentiert als endliche Summe von reellen Lösungen der Formen:

1) $q(t) \cdot r(t) \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$

2) $q(t) \cdot r(t) \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t)$,

$q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ ist 2T-periodische Funktion, $r : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (vgl. Skript (Kapitel 2,(2.7))) Polynom vom Grad $\leq n-1$ und $\alpha + i \cdot \beta$ Eigenwert von R. Somit lassen sich alle Lösungen unseres Systems (1) als Linearkombinationen von Lösungen der Gestalt 1) und 2) darstellen. $\diamond$

Literatur

[1] Carmen Chicone. Ordinary Differential Equations with Applications. Springer, 2nd Edition, USA, 2006.

[2] Aloys Krieg, Sebastian Walcher. Gewöhnliche Differentialgleichungen. RWTH Aachen, 2010.