Floquet-Theorie V

Vortrag zum Seminar Gewöhnliche Differentialgleichungen, 15.11.2011

Jaromil Najman

Zur Ergänzung des letzten Vortags werden wir den Abschnitt *Periodische Orbits linearer Systeme* mit einem letzten Satz abschließen und uns dem neuen Abschnitt *Stabilität Periodischer Orbits* widmen.

§1 Periodische Orbits linearer Systeme

Wir betrachten weiterhin das Zeit-periodische System

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

wobei $t \mapsto A(t)$ eine T-periodische Matrixfunktion und $t \mapsto b(t)$ eine T-periodische Vektorfunktion sind.

Ist in (1) $b = 0$, so ist die triviale Lösung eine T-periodische Lösung. Das nächste Ergebnis gibt eine allgemein hinreichende Bedingung für die Existenz einer T-periodischen Lösung.

Zunächst eine Wiederholung des uns bereits bekannten Satzes aus der Vorlesung im Kapitel I,(3.6).

(5.1) Satz (Variation der Konstanten)
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung $\Psi(x)$ auf I, nämlich

$$\Psi(x) = \Phi(x)u(x)$$

mit

$$\Phi(x) := \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)dt) \text{ und } u(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\Phi(t)}dt \text{ für } x \in I. \qquad \diamond$$

(5.2) Satz (Skalarprodukt)
Ein Skalarproduktauf einem reellen Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilniearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, das heißt für $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Bedingungen:

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
2. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
3. $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle$.

Insbesondere ist das Skalarprodukt stetig. ◇

(5.3) Satz
Besitzt das T-periodische System (1) eine beschränkte Lösung, dann hat das System eine T-periodische Lösung. ◇

Beweis
Gegeben sei die Standardfundamentalmatrixlösung $\Phi(t)$ in $t = 0$ des homogenen Systems $\dot{x} = A(t)x$ bzgl. der Differentialgleichung (1). Mit Hilfe von *Variation der Konstanten* erhalten wir die Gleichung:

$$x(T) = \Phi(T)x(0) + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

Nach dem Floquet-Theorem aus der ersten Vorlesung existiert eine konstante Matrix B, so dass $\Phi(T)\Phi^{-1}(0) = e^{TB}$ und da Φ eine Standardfundamentalmatrix Lösung ist, wissen wir, dass $\Phi(0) = E$, also folgt, dass $\Phi^{-1}(0) = E$ und insgesamt erhalten wir $\Phi(T) = e^{TB}$ Damit ist die uns aus dem ersten Vortrag bekannte Poincaré Abbildung gegeben durch:

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \phi(T)\xi + \phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)b(s)ds \\ &= e^{TB}(\xi + \int_0^T \Phi^{-1}(s)b(s)ds), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ist die Lösung mit Anfangswert $x(0) = \xi_0$ beschränkt, so ist auch die Folge $\{P^j(\xi_0)\}_{j=0}^{\infty}$ beschränkt, da P eine Poincaré Abbildung ist, und damit alle Folgenglieder auf der Lösungsbahn $\Phi(t, \xi_0)$ enthalten sind.

Außerdem ist P eine affine Abbildung, d.h. P ist von der Form

$$\begin{gathered} P(\xi) = L\xi + y, \quad y \in \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ L := e^{TB} = \phi(T) \in GL_n(\mathbb{R}) \\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Lx \end{gathered}$$

Wenn jetzt ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $P(x) = x$, dann besitzt das System (1) einen periodischen Orbit(geschlossene Lösungsbahn). Nehmen wir also zunächst an, dass es einen solchen periodischen Orbit nicht gibt, dann hat die Gleichung

$$\begin{aligned} \xi &= P(\xi) \\ \Leftrightarrow \xi &= L\xi + y \\ \Leftrightarrow (I - L)\xi &= y \end{aligned}$$

keine Lösung ξ. Wir sagen auch, y ist nicht im Bild R des Operators $I - L$.
Es existiert also ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, der zu R orthogonal ist und das Skalarprodukt $\langle v, y \rangle$ nicht verschwindet, also ungleich 0 ist.
Außerdem, da v orthogonal zu R ist gilt:

$$\begin{aligned} \xi\langle I - L, v \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle (I - L)\xi, v \rangle &= 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

und deswegen auch mit Skalarproduktrechenregeln:

$$\begin{aligned} \langle I\xi, v \rangle - \langle L\xi, v \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \xi, v \rangle &= \langle L\xi, v \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad \star \end{aligned}$$

Mit der Darstellung $P(\xi) = L\xi + y$ und durch eine vollständige Induktion ist es leicht zu zeigen, dass für $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P^j(\xi_0) = L^j\xi_0 + \textstyle\sum_{k=0}^{j-1} L^k y.$$

<u>Induktionsanfang:</u>

$$j = 1$$

$$P^1(\xi_0) = L\xi_0 + y = L^1\xi_0 + \sum_{k=0}^{1-1} L^k y.$$

<u>Induktionsvorsaussetzung:</u>
Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $j \in \mathbb{N}$.
<u>Induktionsschritt:</u>

$$
\begin{aligned}
& j \mapsto j+1 \\
P^{j+1}(\xi_0 \quad &= \quad P(P^j(\xi_0)) \overset{\text{(IV)}}{=} P(L^j\xi_0 + \sum_{k=0}^{j-1} L^k y) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} L((L^j\xi_0 + \sum_{k=0}^{j-1} L^k y) + y \\
&= \quad L^{j+1}\xi_0 + \sum_{k=1}^{j} L^k y + y \qquad = L^{j+1}\xi_0 + \sum_{k=0}^{j} L^k y
\end{aligned}
$$

Induktion nach j liefert Behauptung.

Bilden wir nun das Skalarprodukt mit v und nutzen $\star$ wiederholt aus, erhalten wir:

$$\langle P^j(\xi_0), v\rangle = \langle \xi_0, v\rangle + (j)\langle y, v\rangle.$$

Wir wissen, dass $\langle y, v\rangle \neq 0$, also folgt sofort mit der Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$\lim_{j\to\infty} \langle P^j(\xi_0), v\rangle = \pm\infty,$$

da $\langle y, v\rangle$ entweder größer oder kleiner 0 ist.
Damit folgt also, dass die Folge $\{P^j(\xi_0)\}_{j=0}^{\infty}$ unbeschränkt ist, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist.
Daraus folgt unsere Behauptung. $\square$

§2 Stabilität von periodischen Orbits

(5.4) Satz (C^1-Abhängigkeit)
Gegeben Sei $\dot{y} = f(y)$, und zusätzlich sei f eine C^1-Funktion, also stetig differenzierbar. Dann existiert die partielle Ableitung $D_2\Phi(x,z)$ und ist stetig; sie ist gleich der Lösung $B(x,z)$ der Matrix-Differentialgleichung

$$Y' = Df(\Phi(x,z))Y, Y(0) = E$$

Insbesondere ist Φ damit eine C^1-Abbildung von U_f nach $\mathbb{R}^n$ $\diamond$

Betrachten wir ein (nicht-lineares) autonomes Systen von Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\dot{y} = f(y)$$

mit einem periodischen Orbit(geschlossener Lösungsbahn) Γ.
Definiere außerdem für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Vektorfunktion

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \phi(t,\xi)$$

als Lösung dieses Systems mit Anfangswert $\phi(0,\xi) = \xi$.
Ist $p \in \Gamma$ und $\Sigma' \subset \mathbb{R}^n$ ein Poincaré-Schnitt zu f(p) in p, dann gibt es ein offenes $\Sigma \subseteq \Sigma'$ und eine Funktion

$$\tau : \Sigma \mapsto \mathbb{R},$$

auch Zeit der ersten Rückkehr zu Σ' genannt, exisitert, so dass für alle $\sigma \in \Sigma$ gilt: $\Phi(\tau(\sigma),\sigma) \in \Sigma'$.
Die Abbildung P, gegeben durch $\sigma \mapsto \Phi(\tau(\sigma),\sigma)$ ist die Poincaré Abbildung, oder wie wir sie kennen, die Rückkehrabbildung bezüglich der Poincaré-Schnittfläche Σ.
Insbesondere, wenn $v \in \mathbb{R}^n$ tangential zu Σ in p ist, ist die Ableitung von P in Richtung v gegeben durch:

$$DP(p)v = (d\tau(p)v)f(p) + D_2\Phi(\tau(p),p)v \tag{2}$$

Die Gleichung entsteht durch Anwendung der Kettenregel und der Tatsache, dass $\dot{\Phi} = f(\Phi)$ und $\Phi(\tau(p), p) = p$ gilt, was hier nochmal ausführlich gezeigt wird:

Gegeben ist: $\Phi : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n,$ wobei die 1 Dimension für die Zeit t hinzukommt

Betrachte innere Funktion: $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{1+n}, \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \tau(\sigma) \\ \sigma \end{pmatrix}$

Die Poincaré Abbildung P ist dann gegeben durch: $P = \Phi(\gamma)$.

Benutze nun die Kettenregel zum Ableiten:

$$\begin{aligned} DP &= D\Phi D\gamma \\ &= \begin{pmatrix} D_1\Phi & D_2\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\tau \\ E \end{pmatrix} \\ &= D_1\Phi D\tau + D_2\Phi \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis gilt also:

$$\begin{aligned} DP(p)v &= D_1\Phi(\tau(p), p) D\tau(p)v + D_2\Phi(\tau(p), p)v \\ &= f(\Phi(\tau(p), p)) \underbrace{D\tau(p)v}_{Skalar} + D_2\Phi(\tau(p), p)v \\ &= (D\tau(p)v) f(p) + D_2\Phi(\tau(p), p)v \end{aligned}$$

Die nächste Proposition stellt einen Zusammenhang zwischen dem Spektrum von $DP(p)$ und den Floquet Multiplikatoren der uns schon aus Vortrag 3 und der Vorlesung im Kapitel III(2.5) bekannten Variationsgleichung:

$$\dot{W} = Df(\Phi(t, p))W.$$

(5.5) Proposition
Wenn Γ ein periodischer Orbit ist und $p \in \Gamma$, dann ist die Vereinigung des Spektrums der Ableitung einer Poincaré Abbildung in $p \in \Gamma$ mit der einelementigen Menge $\{1\}$ gleich der Menge der charakteristischen Multiplikatoren der Variationsgleichung entlang Γ. Insbesondere ist 0 kein Eigenwert. ◇

Beweis
Wir wissen aus der Vorlesung Kapitel III(2.5) bereits, dass $t \mapsto D_2\Phi(t, \xi)$ die Standardfundamentalmatrixlösung in $t = 0$ der Variationsgleichung ist und da

$$\frac{d}{dt} f(\Phi(t,\xi)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} Df(\Phi(t,\xi))D_1\Phi(t,\xi) \overset{\Phi\text{ist Lsg}}{=} Df(\Phi(t,\xi))f(\Phi(t,\xi))$$

gilt, ist die Vektorfunktion $t \mapsto f(\Phi(t,\xi))$ die Lösung der Variationsgleichung mit Anfangswert $W(0) = f(\Phi(0,\xi)) = f(\xi)$. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} t \mapsto D_2\Phi(t,\xi) \text{ löst } \dot{W} &= Df(\Phi(t,p))W, W(0) = E \\ t \mapsto f(\Phi(t,\xi)) \text{ löst } \dot{W} &= Df(\Phi(t,p))W, W(0) = f(\xi) \\ \Rightarrow f(\Phi(t,\xi)) \qquad\qquad &= D_2\Phi(t,\xi)f(\xi), \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung uns schon aus der Vorlesung bekannt ist und da wir zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{W} = Df(\Phi(t,p))W$ zu verschiedenen Anfangswerten haben.
Setze: $\xi := p$ und $t := \tau(p)$ und wir erhalten:

$$D_2\Phi(\tau(p), p)f(p) = f(\Phi(\tau(p), p)) = f(p)$$

Also ist $f(p)$ ein Eigenvektor der linearen Transformation
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto D_2\Phi(\tau(p), p)x$ mit Eigenwert 1.
Da Σ ein Poincaré-Schnitt zu $f(p)$ ist, also $f(p)$ nicht tangential aus Σ rausläuft, existiert eine Basis des $\mathbb{R}^n$ der Form

$$f(p), s_1, \ldots, s_{n-1}$$

mit s_i tangential zu Σ in p für alle $i = 1, \ldots, n-1$, da mindestens eine Komponente von $f(p)$ orthogonal zu Σ ist.
Es folgt, dass die Matrix $D_2\Phi(\tau(p), p)$ mit einem Basiswechsel auf die Blockform gebracht werden kann, die von der gewählten Basis abhängig ist, und gegeben ist durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

wobei die erste Spalte dadurch entsteht, dass $f(p)$ ein Eigenvektor zu 1 ist, a und b die Dimension $1 \times (n-1)$ und $(n-1) \times (n-1)$ besitzen.
Außerdem gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit v ist tangential zu Σ in p, dass es auch Blockform bzgl. der oben genannten Basis hat, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ v_\Sigma \end{pmatrix}$, denn es liegt nur im Erzeugnis $\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle$, da es orthogonal auf $f(p)$ steht und damit von $f(p)$ nicht erzeugt wird.
Als Ergebnis erhalten wir dann die Gleichung:

$$D_2\Phi(\tau(p), p)v = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_\Sigma \\ bv_\Sigma \end{pmatrix} \tag{3}$$

Das Bild von DP ist tangential zu Σ in p, da DP die Ableitung ist. Demnach mit Benutzung von (2), der Blockform von $D_2\Phi(\tau(p), p)$ und der Tatsache, dass wir an die s_i keine weiteren Bedingungen gestellt haben, folgt , dass

$$\begin{aligned} DP(p)v &= (d\tau(p)v)f(p) + D_2(\tau(p), p)v \\ &\overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} dT(p)v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} av_\Sigma \\ bv_\Sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dT(p)v + av_\Sigma \\ bv_\Sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ bv_\Sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wobei hier die 0 dadurch entsteht, dass das Bild DP tangential ist und somit von $f(p)$ nicht erzeugt wird. Anders ausgedrückt, die Ableitung der Poincaré Abbildung kann mit b identifiziert werden und das Differential $d\tau$ der Rückkehrabbildung mit $-a$. Insbesondere Stimmen die Eigenwerte der Ableitung der Poincaré Abbildung mit den Eigenwerten von b überein, denn $D_2\Phi = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ bestitz 1 und das Spektrum von b als Eigenwerte, was die charakteristischen Multiplikatoren der Variationsgleichungs sind, und die Ableitung unsere Poincaré Abbildung mit die selben Eigenwerte wie b hat. Insbesondere ist 0 kein Eigenwert, da sonst die Invertierbarkeit der Standardfundamentalmatrixlösung nicht erfüllt wäre, da sich eine 0 auf der Diagonalen von b wiederfinden ließe. Daraus folgt unsere Behauptung. □