Differential-Ungleichungen II

Vortrag zum Seminar Gewöhnliche Differentialgleichungen, 17.01.2012

Thomas Otten

Ziel dieses Vortrages ist zu überprüfen, inwiefern die Aussagen über Differentialungleichungen in einer Dimension auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden können.

§1 Begriffe und Werkzeuge

Bevor wir über Differentialungleichungen im $\mathbb{R}^n$ reden können, müssen wir natürlich erst einmal eine Ungleichung im $\mathbb{R}^n$ definieren: Seien $y, z \in \mathbb{R}^n$, dann benutzen wir folgende komponentenweise Ordnung:

$y \leq z \iff y_i \leq z_i$ für alle $1 \leq i \leq n$
und
$y < z \iff y_i < z_i$ für alle $1 \leq i \leq n$

— *Wesentlich positive Matrizen* —

Wir beginnen mit einer kurzen Definition:

(2.1) Definition (Positive und wesentlich positive Matrizen)
Eine Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst *positiv*, wenn $c_{ij} \geq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

Eine Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst *wesentlich positiv*, wenn $c_{ij} \geq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ gilt. $\diamond$

Für wesentlich positive Matrizen zeigen wir nun ein Lemma, welches uns später noch behilflich sein wird:

(2.2) Lemma
Sei ein nicht entartetes Intervall I gegeben und eine Abbildung $A : I \to Mat(n \times n, \mathbb{R}), x \mapsto A(x)$. $A(x)$ sei wesentlich positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Lösung $\hat{Y}$ des Anfangswertproblems
$Y' = A(x) \cdot Y =: f(x, y), Y(x_0) = E_n$:
$\hat{Y}$ ist positiv für alle $x \geq x_0$.

Beweis

Wir führen den Beweis für alle Spalten von $\hat{Y}$, indem wir zeigen, dass der positive Orthant invariant für eine beliebige Spalte s ist. Dazu betrachten wir dessen Ränder. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $x_i = 0$ für mindestens ein $1 \leq i \leq n$ und sei $z_i(x)$ die i-te Zeile von $A(x)$. Dann gilt:

$$f_i(x,y) = z_i(x) \cdot s = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ 0 \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y_k}_{\geq 0} \geq 0$$

Wäre die Differentialgleichung autonom würde mit IV (2.9) aus Gewöhnliche Differentialgleichungen jetzt die positive Invarianz des positiven Orthanten und damit auch die Behauptung folgen. In unserem Fall ist die Differentialgleichung zwar nicht autonom, aber der Satz IV (2.9) lässt sich auch auf diesen Fall verallgemeinern:

Gegeben sei $y' = f(x,y)$ auf $U \in \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer
P sei der positive Orthant. Dann ist $P \cap U$ genau dann positiv invariant für $y' = f(x,y)$, wenn gilt:
Für $i = 1, ..., n$ gilt $f_i(x, y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ..., y_n) \geq 0$ für alle $x \geq x_0$ und alle $y_j \geq 0$ mit einem $x_0 \in \mathbb{R}$ und allen $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$

Der Beweis läuft analog zum autonomen Fall ab.
Damit folgt auch bei uns die positive Invarianz und damit die Behauptung. $\square$

— *Quasimonotonie* —

Nun kommen wir zu einem wesentlichen Begriff des Vortrags:

(2.3) Definition (Monotonie und Quasimonotonie)
Es sei eine Funktion $f(x,y) : D \subseteq (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Man nennt f monoton wachsend, wenn aus $y \leq z$ folgt, dass $f(x,y) \leq f(x,z)$.
f heisst quasimonoton wachsend, falls für $i = 1, \cdots, n$
aus $y \leq z$, $y_i = z_i$ und $(x,y), (x,z) \in D$ folgt $f_i(x,y) \leq f_i(x,z)$. ◇

Hierzu ein einfaches Beispiel:

(2.4) Beispiel
Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
Sei $y \geq z, y_1 = z_1$
Dann gilt:
$f_1(y) \geq f_1(z) \iff a \cdot y_1 + b \cdot y_2 \geq a \cdot z_1 + b \cdot z_2$
$\iff b \cdot (y_2 - z_2) \geq 0$
$\iff b \geq 0$

Und analog für $y \geq z, y_2 = z_2$:
$f_2(y) \geq f_2(z)$
$\iff c \cdot y_1 + d \cdot y_2 \geq c \cdot z_1 + d \cdot z_2$
$\iff c \cdot (y_1 - z_1) \geq 0$
$\iff c \geq 0$

Also insgesamt gilt:
f ist quasimonoton $\iff$ $b \geq 0$ und $c \geq 0$

Analog gilt für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y \mapsto A \cdot y$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dass f genau dann quasimonoton ist, wenn alle Einträge von A, die nicht auf der Diagonalen liegen, grösser oder gleich 0 sind.

Den Beweis hiervon sparen wir uns, da wir nun die allgemeinere Aussage zeigen:

(2.5) Lemma
Sei f eine C^1-Funktion auf einem konvexen Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$Df(y)$ ist wesentlich positiv für alle $y \in G \iff f$ ist quasimonoton

Beweis
Seien $y, z \in G, y \leq z$ und $y_i = z_i$ für ein i.
Desweiteren sei $\gamma : [0,1] \to G, \gamma(t) = (1-t) \cdot y + t \cdot z$ die Strecke von y nach z.
Zunächst gilt:

$$f(z) - f(y) = f(\gamma(t))|_0^1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot (z-y)\,\mathrm{d}t$$

Es folgt, dass $f(z) - f(y) \geq 0$ genau dann gilt, wenn $\int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot (z-y)\,\mathrm{d}t \geq 0$
$'' \Rightarrow''$: Sei $Df(y) =: (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ wesentlich positiv für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$f_i(z) - f_i(y) = \int_0^1 Df(\gamma(t))_i \cdot (z-y)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(z_j - y_j)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Da i, y und z beliebig waren, folgt die Quasimonotonie
$'' \Leftarrow''$: Sei nun f quasimonoton. Dann gilt:

$$f_i(z) - f_i(y) = \int_0^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} \cdot (z_j - y_j)\,\mathrm{d}t \geq 0 \text{ für alle } i \text{ und } y, z \in G.$$

Angenommen es gäbe k, l und y_0 mit $k \neq l$, so dass $a_{k,l}(y_0) < 0$.
Aus Stetigkeitsgründen ist $a_{k,l}(x) < 0$ in einer Umgebung von y_0.
Dann kann man aber y und z in dieser Umgebung finden, so dass auch die Strecke γ von y nach z in der Umgebung liegt und $y_m = z_m$ für alle $m \neq l$ sowie $y_l < z_l$ gilt.
Es folgt:

$$f_k(z) - f_k(y) = \int_0^1 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j} \cdot (z_j - y_j)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{a_{k,l}}_{<0} \cdot \underbrace{(z_l - y_l)}_{>0}\,\mathrm{d}t < 0$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also folgt $a_{k,l} \geq 0$ für alle k, l mit $k \neq l$ und damit dass $Df(y)$ wesentlich positiv ist.

□

§2 Konsequenzen für Lösungsbahnen

Gegeben sei nun eine Differentialgleichung $y' = f(y)$ im $\mathbb{R}^n$ sowie $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u < v$.
Falls $n = 1$ ist, wissen wir vom Vortrag Differential-Ungleichungen I, dass gilt:
$\Phi(x, u) < \Phi(x, v)$ für alle $x > 0$
Aber stimmt die Aussage auch für $n > 1$?

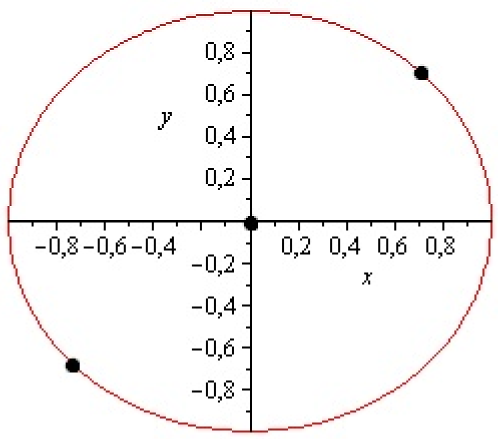
Im Allgemeinen tut sie das nicht:

(2.6) Beispiel
Ein Gegenbeispiel ist unter anderem:
$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$

Es gilt nämlich: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, aber:

$\Phi\left(x, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi\left(x, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin(x+\frac{\pi}{4}) \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$ und damit:

$\Phi\left(\pi, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\pi+\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\pi+\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \Phi\left(\pi, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)$ ◇



Mit Quasimonotonie von f als zusätzliche Voraussetzung reicht es dann aber doch:

(2.7) Satz
Gegeben sei eine Differentialgleichung $y' = f(y)$ im $\mathbb{R}^n$ sowie $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u < v$ und $Df(y)$ wesentlich positiv. Dann gilt:
$\Phi(x,u) < \Phi(x,v)$ für alle $x \geq 0$ ◇

Beweis
Zunächst basteln wir uns eine Strecke von u nach v:
$z : [0,1] \to \mathbb{R}^n, s \mapsto (1-s) \cdot u + s \cdot v$
Dann gilt:

$$\Phi(x,v) - \Phi(x,u) = \Phi(x,z(s))\big|_{s=0}^{s=1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi(x,z(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^1 D_2\Phi(x,z(s)) \cdot z'(s)\,\mathrm{d}s$$

$= \int_0^1 D_2\Phi(x, z(s)) \cdot (v - u)\, \mathrm{d}s$
Da Φ aber die Differentialgleichung löst, muss gelten:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y) = f(\Phi(x, y))$
Mit Gewöhnliche Differentialgleichungen III (2.5) folgt nun:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_2\Phi(x, y) = Df(\Phi(x, y)) \cdot D_2\Phi(x, y)$
$Df(\Phi(x, y))$ ist nun aber wesentlich positiv nach Voraussetzung. Mit Lemma (2.2) folgt, dass $D_2\Phi(x, y)$ positiv ist.
Somit gilt:

$$\Phi(x, v) - \Phi(x, u) = \int_0^1 \underbrace{D_2\Phi(x, z(s))}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{(v - u)}_{>0}\, \mathrm{d}s > 0 \qquad \square$$

Zuletzt verallgemeinern wir diese Aussage noch auf den Vergleich von Lösungen zweier verschiedener Differentialgleichungen:

(2.8) Satz
Gegeben seien die Differentialgleichungen $y' = f(y)$ und $y' = g(y)$. Desweiteren sei f oder g quasimonoton sowie $f(y) < g(y)$ für alle y. Gilt dann noch $u < v$ so folgt:
$\Phi_f(x, u) < \Phi_g(x, v)$ für alle $x > 0$ ◇

Beweis
Wir betrachten den Fall, dass f quasimonoton. Falls g stattdessen quasimonoton ist, lässt sich der Beweis analog führen. Wir führen den Beweis als Widerspruchsbeweis und beginnen zunächst mit einer allgemeinen Überlegung:
Es gilt $\Phi_f(0, u) = u < v = \Phi_g(0, v)$. Da $\Phi(x, \cdot)$ stetig in x ist, muss auch ein $x^*> 0$ existieren, so dass $\Phi_f(x, u) < \Phi_g(x, v)$ für alle $x \in [0, x^*)$
Nehmen wir nun an, dass ein $\hat{x} > 0$ existiert, so dass $\Phi_f(\hat{x}, u) < \Phi_g(\hat{x}, v)$ nicht gilt.
Dann existiert wiederum das Supremum:
$\sup\{x^*\colon \Phi_f(x, u) < \Phi_g(x, v) \text{ für alle } x \in [0, x^*)\} =: \tau$
Dann existiert aber ein i, so dass
$\Phi_{f,i}(\tau, u) = \Phi_{g,i}(\tau, v)$, aber $\Phi_{f,i}(x, u) < \Phi_{g,i}(x, v)$ für alle i und alle $0 \leq x < \tau$.
Es gilt somit, da f quasimonoton ist:
$f(\Phi_f(\tau, u))_i \leq f(\Phi_g(\tau, v))_i < g(\Phi_g(\tau, v))_i$
Und damit:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Phi_f(x, u)\right)_i\Big|_{x=\tau} < \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Phi_g(x, v)\right)_i\Big|_{x=\tau}$
Da $\Phi_{f,i}(\tau, u) = \Phi_{g,i}(\tau, v)$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit
$\Phi_{g,i}(\tau - \epsilon, v) < \Phi_{f,i}(\tau - \epsilon, u)$
Was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Damit folgt die Behauptung. $\square$