Floquet-Theorie IV

Vortrag zum Seminar *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 08.11.2011

Tobias Roidl

Dieser Vortrag befasst sich mit der Hills Gleichung und gibt eine Einführung in die Periodischen Orbits von linearen Systemen.

§1 Hills Gleichung

Ein berühmtes Beispiel, in welchem die Floquet-Theorie eine Anwendung findet, um gute Stabilitätsaussagen zu liefern, ist die Hills Gleichung. Eingeführt wurde sie von *George W. Hill* (1838-1914) bei Forschungen, die sich mit den Bewegungen des Mondes befassten. Dabei kann man sich die Bewegungen des Mondes als einen harmonischen Oszillator in einem periodischen Gravitationsfeld vorstellen. Diese Modellgleichung taucht in vielen Gebieten der angewandten Mathematik auf, in denen man die Stabilität einer periodischen Bewegung untersucht.

— *Einführung* —

(4.1) Definition (Hills Gleichung)

$$\ddot{u} + a(t)u = 0,\ u \in \mathbb{R}$$

heißt Hills Gleichung, wobei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto a(t)$ eine stetige, periodische Abbildung mit Periodendauer T ist. ◇

Mit der Umwandlung in ein System erster Ordnung befasst sich folgende

(4.2) Bemerkung
Wir definieren $x := \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \end{pmatrix}$. Dann ist die Hills Gleichung äquivalent zu dem System

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

erster Ordnung, wobei $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}$ ist (vgl. Skript Kapitel II Satz 3.2). ◇

Wir werden die Theorie der linearen Systeme - speziell die Floquet-Theorie - verwenden, um die Stabilität der Null-Lösung dieses linearen T-periodischen Systems zu analysieren.

Der erste Schritt der Stabilitätsanalyse ist eine Anwendung der Liouvilleschen Formel (Hilfssatz 2.3). Zunächst betrachten wir den allgemeinen Fall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodische Funktionen sind:

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = 0\ , u \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sind u_1 und u_2 linear unabhängige Lösungen von (2), dann bildet nach Vorlesung (vgl. Kapitel II Bemerkung 3.7)

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

die Fundamentalmatrix des zugehörigen zweidimensionalen Systems erster Ordnung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} x =: B(t)x,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Mit der Definition der Wronski-Determinante (vgl. Skript Kapitel II Satz 1.14) der beiden Lösungen

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

folgt

$$W(t) = W(0) \cdot e^{\int_0^t -p(s)ds}$$

als Spezialfall der Liouvilleschen Formel ($\det \psi(t) = \det \psi(0) \cdot e^{\int_0^t \mathrm{Spur} B(s)ds}$).
Bezogen auf Hills Gleichung mit $\Phi(t)$ als Standardfundamentalmatrix bei $t = 0$ ergibt sich also:

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(0) \cdot e^{\int_0^t \mathrm{Spur} A(s)ds} = 1 \cdot e^{\int_0^t 0 ds} = 1.$$

Somit erhalten wir die Identität $\det \Phi(t) \equiv 1$. Da die Determinante einer Matrix das Produkt der Eigenwerte der Matrix ist, erhalten wir einen wichtiges Resultat: Das Produkt der charakteristischen Multiplikatoren der Monodromie-Matrix $\Phi(T)$ ist 1.

— Stabilität der Null-Lösung —

Kommen wir zunächst zu folgendem

(4.3) Satz
Gegeben sei das T-periodische System $\dot{x} = A(t)x \ , x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Die Null-Lösung ist genau dann stabil, wenn alle Lösungen beschränkt sind. $\diamond$

Beweis
"$\Leftarrow$":
Seien alle Lösungen des T-periodischen Systems beschränkt.
Z.z.: Die Null-Lösung ist stabil.
Dazu: Sei $\Phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t))$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems mit Anfangswert $\phi_i(0) = e_i$ für $1 \leq i \leq n \ , \ i \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung sind die $\phi_i(t)$ beschränkt, d.h. es existieren $M_i > 0, \ 1 \leq i \leq n$, sodass

$$||\phi_i(t)|| < M_i \text{ für alle } t \geq 0.$$

Insbesondere existiert ein $M > 0$ mit $M := \max\limits_{1 \leq i \leq n} M_i$, sodass

$$||\phi_i(t)|| < M \text{ für alle } t \geq 0, \ 1 \leq i \leq n.$$

Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung zum Anfangswertproblem $\dot{x} = A(t)x, \ x(0) = y$ ist gegeben durch:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \phi_i(t)$$

$$\Rightarrow ||x(t)||_1 \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot M = M \cdot ||y||_1.$$

Nach Vorlesung (vgl. Kapitel IV Definition 5.1) ist der Nullpunkt genau dann stabil, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, sodass

$$||y|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wählt man nun $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, so erhält man:

$$||x(t)|| \leq M \cdot ||y|| < M \cdot \delta = \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0, ||y|| < \delta.$$

"$\Rightarrow$":
Sei die Null-Lösung stabil.
Z.z.: Alle Lösungen des T-periodischen Systems sind beschränkt.
Dazu: Sei wieder $x(t)$ Lösung zum Anfangswert $x(0) = y$ und sei $\delta > 0$ klein genug, sodass für alle y mit $||y|| < \delta$ ein $M > 0$ existiert mit: $||x(t)|| < M$. So ein δ existiert gemäß der Definition von Stabilität stationärer Punkte (vgl. Skript Kapitel IV Definition 5.1). Wählt man nun einen beliebigen Anfangswert der Gestalt $\widetilde{y} = \lambda \cdot y$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ für ein y mit $||y|| < \delta$, so gilt: $||\widetilde{y}|| = ||\lambda \cdot y|| = |\lambda| \cdot ||y||$. Die Lösung zum Anfangswertproblem $\dot{x} = A(t)x, x(0) = y$ lautet dann $\widetilde{x}(t) = \lambda \cdot x(t)$. Daraus folgt unmittelbar, dass $\widetilde{x}(t)$ durch $|\lambda| \cdot M$ beschränkt ist. □

Als nächstes wollen wir die Stabilität der Null-Lösung von System (1) diskutieren. Dazu dient folgender

(4.4) Satz
Es seien λ_1, λ_2 die charakteristischen Multiplikatoren der Monodromie-Matrix $\Phi(T)$. Dann gelten:

i) Ist Spur $\Phi(T) > 2$, so ist die Null-Lösung instabil.

ii) Ist Spur $\Phi(T) < -2$, so ist die Null-Lösung instabil.

iii) Ist $|\text{Spur } \Phi(T)| < 2$, so ist die Null-Lösung stabil.

iv) Für Spur $\Phi(T) = 2$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Besitzt der Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 1, so ist die Null-Lösung instabil. Besitzt der Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 2, so ist die Null-Lösung stabil.

v) Für Spur $\Phi(T) = -2$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Besitzt der Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 1, so ist die Null-Lösung instabil. Besitzt der Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit 2, so ist die Null-Lösung stabil. ◇

Beweis
Die charakteristischen Multiplikatoren λ_1 und λ_2 sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - (\text{Spur}(\Phi(T))) \cdot \lambda + \det \Phi(T) = 0.$$

Zur einfacheren Notation setzen wir $2\phi = \text{Spur}(\Phi(T))$ und erhalten somit die äquivalente charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\phi \cdot \lambda + 1 = 0,$$

deren Lösungen gegeben sind durch

$$\lambda_{1,2} = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}.$$

i) $\phi > 1$:
Dann sind λ_1 und λ_2 zwei verschiedene positive reelle Zahlen, sodass $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$. So können wir annehmen, dass $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ mit $\lambda_1 = 1/\lambda_2$ und dass eine reelle Zahl $\mu > 0$ (ein charakteristischer Exponent) existiert, sodass $e^{T\cdot\mu} = \lambda_2$ und $e^{-T\cdot\mu} = \lambda_1$. Nach Satz (2.9) und Satz (2.10) ist ein Fundamentalsystem der Lösungen gegeben durch:

$$e^{-\mu\cdot t} \cdot p_1(t),\ e^{\mu\cdot t} \cdot p_2(t),$$

wobei die reellen Funktionen $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ T-periodisch sind. Mit Satz (3.1) folgt in diesem Fall, dass die Null-Lösung instabil ist.

ii) $\phi < -1$:
Dann sind λ_1 und λ_2 zwei verschiedene negative reelle Zahlen. Da wieder $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ ist, nehmen wir an, dass $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$ ist mit $\lambda_1 = 1/\lambda_2$ und dass eine reelle Zahl $\mu > 0$ (ein charakteristischer Exponent) existiert, sodass $e^{2T\cdot\mu} = \lambda_1^2$ und $e^{-2T\cdot\mu} = \lambda_2^2$. Man kann analog mit Satz (2.10) zeigen, dass ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben ist durch:

$$e^{\mu\cdot t} \cdot q_1(t),\ e^{-\mu\cdot t} \cdot q_2(t),$$

wobei die reellen Funktionen q_1 und q_2 2T-periodisch sind. Auch in diesem Fall ist die Null-Lösung nach Satz (3.1) instabil.

iii) $-1 < \phi < 1$:
Dann ist λ_1 das komplex Konjugierte zu λ_2, wobei der Imaginärteil ungleich 0 ist. Da $\lambda_1 \cdot \overline{\lambda_1} = 1$ ist, ist $|\lambda_1| = 1$ und deshalb liegen beide charakteristischen Multiplikatoren im Einheitskreis in der komplexen Ebene. Einer von ihnen, sagen wir λ_1, liegt in der oberen Hälfte der Ebene, weil sowohl λ_1 als auch λ_2 Imaginärteil $\neq 0$ haben. Daher existiert eine relle Zahl θ mit $0 < \theta \cdot T < \pi$ und $e^{i\theta T} = \lambda_1$. Es existiert also eine Lösung der Form $e^{i\theta t}(r(t) + i \cdot s(t))$, wobei r und s beide reelle T-periodische Funktionen sind. Spaltet man die Lösung

nun in Real- und Imaginärteil auf, so ist ein Fundamentalsystem der Lösungen gegeben durch:

$$r(t)cos(\theta t) - s(t)sin(\theta t),\; r(t)sin(\theta t) + s(t)cos(\theta t).$$

Mit Satz (4.3) folgt, dass die Null-Lösung stabil ist, da alle Lösungen beschränkt sind. Die Lösungen sind nur periodisch, wenn es positive ganze Zahlen m und n gibt, sodass $2\pi m/\theta = nT$. Wenn solche ganze Zahlen existieren, haben alle Lösungen die Periode nT. Wenn nicht, sind sie quasi-periodisch. Allerdings ist die Null-Lösung nicht asymptotisch stabil, da die Lösungen, egal wie nah man an der 0 startet, periodisch oder quasi-periodisch sind und daher nicht gegen 0 konvergieren können.

iv) $\phi = 1$:
Dann gilt: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Die Art der Lösungen ist abhängig von der Jordan-Normalform von $\Phi(T)$. Da der Eigenwert $\lambda = 1$ von $\Phi(T)$ algebraische Vielfachheit 2 hat, existieren zwei mögliche Jordan-Normalformen. Beide haben die Gestalt $E + N$ mit einer nilpotenten Matrix N, für die gilt: $N^2 = 0$ mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist $\Phi(T)$ die erste mögliche Jordan-Normalform

$$E + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so gibt es eine nichtsinguläre Matrix C, sodass

$$C \cdot \Phi(T) \cdot C^{-1} = E + N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} = e^N.$$

Daher hat $\Phi(t)$ eine Floquet Normalform $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$, wobei $P(t)$ T-periodisch und invertierbar und $B := C^{-1} \cdot (\frac{1}{T}N) \cdot C$ ist. Weil

$$e^{tB} = e^{tC^{-1}\cdot(\frac{1}{T}N)\cdot C} = C^{-1} \cdot e^{t(\frac{1}{T}N)} \cdot C = C^{-1} \cdot (E + (\frac{t}{T}N)) \cdot C \tag{3}$$

ist, ist die Matrixfunktion $t \mapsto e^{tB}$ unbeschränkt, und deshalb ist die Null-Lösung instabil (Begründung im Vortrag Floquet-Theorie II nochmal ausführlicher gesehen).

Wenn $\Phi(T)$ die zweite mögliche Jordan-Normalform ist, dann ist die Floquet-Normalform gegeben durch: $\Phi(t) = P(t)$, da nach (3) $e^{tB} = E$ für $N = 0$ ist, wobei $P(t)$ T-periodisch und invertierbar ist. Daher beschreibt $\Phi(t)$ ein Fundamentalsystem von periodischen Lösungen und die Null-Lösung ist nach Satz (4.3) stabil, aber mit der Begründung aus iii) nicht asymptotisch stabil.

v) $\phi = -1$:
Dann gilt: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Auch hier hat der Eigenwert $\lambda = -1$ von $\Phi(T)$ algebraische Vielfachheit 2 und somit existieren wieder zwei mögliche Jordan-Normalformen. Analog zum vierten Fall ist die erste mögliche Jordan-Normalform von $\Phi(T)$ die negative Einheitsmatrix $(-E)$. Daraus folgt, dass $\Phi(0) = \Phi(2T) = Q(0) = Q(2T) = E$ und die Floquet-Normalform $\Phi(t) = Q(t)$ ist, wobei Q(t) 2T-periodisch und invertierbar ist. Aufgrund dessen existiert ein Fundamentalsystem von periodischen Lösungen und die Null-Lösung ist nach Satz (4.3) stabil.

Für die zweite mögliche Jordan-Normalform von $\Phi(T)$ gilt:

$$C \cdot \Phi(2T) \cdot C^{-1} = e^N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Rest ist analog zum vierten Fall, wobei lediglich die Periode in $2T$ geändert werden muss. Die Matrixfunktion $t \mapsto e^{tB}$ ist unbeschränkt und die Null-Lösung somit instabil. □

Wie uns die Ergebnisse zeigen hängt die Stabilität von Hills Gleichung vom Betrag des Wertes der Spur von der Standardfundamentalmatrix nach einer Periode ab.

§2 Periodische Orbits linearer Systeme

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Existenz und Stabilität von periodischen Lösungen des Zeit-periodischen inhomogenen Systems

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

wobei $t \mapsto A(t)$ eine T-periodische Matrixfunktion und $t \mapsto b(t)$ eine T-periodische Vektorfunktion ist.

(4.5) Satz
Wenn die Zahl 1 kein charakteristischer Multiplikator des T-periodischen homogenen Systems $\dot{x} = A(t)x$ ist, dann hat (4) mindestens eine T-periodische Lösung.

Beweis
Zuerst zeigen wir, dass wenn $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto x(t)$ eine Lösung des Systems (4) ist und $x(0) = x(T)$ ist, dann ist diese Lösung T-periodisch.
Wir definieren: $y(t) := x(t+T)$. Daraus folgt, dass $t \mapsto y(t)$ eine Lösung von (4) ist und $y(0) = x(T) = x(0)$. Somit gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösungen:

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Satz von Floquet (1.5) wissen wir, dass eine Matrix B existiert, sodass die Monodromie-Matrix gegeben ist durch:

$$\Phi(T) = e^{TB}.$$

Wenn nun $\Phi(t)$ die Standardfundamentalmatrix des homogenen Systems an der Stelle $t = 0$ ist, dann gilt nach Variation der Konstanten (vgl. Skript Kapitel II Satz 1.8):

$$x(T) = \underbrace{\Phi(T)x(0)}_{Anfangswert} + \Phi(T) \cdot \int_0^T (\Phi)^{-1}(s)b(s)ds.$$

Wenn $x(T) = x(0)$ ist, dann gilt:

$$(E - \Phi(T))x(0) = \Phi(T) \int_0^T (\Phi)^{-1}(s)b(s)ds. \tag{5}$$

Da 1 nach Voraussetzung nicht auf der Diagonalen der Jordan-Normalform J von $\Phi(T)$ ist, folgt mit

$$E - C^{-1} \cdot J \cdot C = C^{-1} \cdot (E - J) \cdot C,$$

wobei C eine nichtsinguläre Matrix ist, dass $E - J$ keine 0 auf der Diagonalen hat, und somit $E - J$ invertierbar ist. Demnach hat (5) für $x(0)$ eine Lösung, wenn die Zahl 1 kein Eigenwert von $\Phi(T)$ ist. Somit existiert mindestens eine T-periodische Lösung von (4). $\square$

(4.6) Korollar
Wenn $A(t) = A$ eine konstante Matrix ist, sodass A keine Eigenwerte auf der Imaginärachse hat, dann hat die Differentialgleichung (4) mindestens eine T-periodische Lösung. $\diamond$

Beweis
Da der Realteil der Eigenwerte immer ungleich 0 ist, kann die Matrix A den Wert 0 nicht als Eigenwert haben, woraus folgt, dass $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$ kein Eigenwert der Matrix TA ist, da auch TA keine Eigenwerte mit Realteil 0 hat. Nach Satz (2.5) sind die Eigenwerte von e^{TA} gegeben durch e^{λ}, wobei λ Eigenwert von der Matrix TA ist. Da folgende Äquivalenz gilt:

$$e^{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 2\pi ik,$$

ist 1 kein charakteristischer Multiplikator der Monodromie-Matrix. Mit Satz (4.5) folgt die Behauptung. $\square$

Literatur

1) Carmen Chicone. Ordinary Differential Equations with Applications. Springer, 2nd Edition, USA, 2006.
2) Aloys Krieg, Sebastian Walcher. Gewöhnliche Differentialgleichungen. RWTH Aachen, 2010.