# Floquet Theorie (III)

Vortrag zum Seminar zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, 25.10.2011

Andreas Schmitz

Nachdem Gabriela Ansteeg uns in die Theorie eingeführt hat und Sebastian Monschang weitere Vorarbeit geleistet hat, folgen nun weitere Einblicke in die Floquet-Theorie.

## § 1 Verhalten von Lösungen und Der Ljapunov-Exponent

Wir werden in diesem Abschnitt die Periodizität eines periodischen Systems wie in (1) untersuchen. Außerdem werden wir ein schönes Resultat kennenlernen, mit dem man das Langzeitverhalten der Lösungen eines Systems der Form (1) untersuchen kann.

— *Stabilität periodischer Orbits* —

Wir betrachten wieder das System

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A : \mathbb{R} \to Mat(n \times n; \mathbb{R})$ eine periodische, stetige Abbildung mit Periode $T$.
Dieses hat bekannterweise eine Floquet-Normalform

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \to Q(t)e^{tR}, \tag{2}$$

wobei $Q$ eine reellwertige 2T-periodische Funktion und $R$ eine reele Matrix ist.

Das System (1) hat nach Korollar (2.11) reelle Lösungen der Form:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \to q(t)r(t)e^{\alpha t}\sin \beta t$$

und

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \to q(t)r(t)e^{\alpha t}\cos \beta t,$$

wobei $q$ $2T$-periodisch, $r$ ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ und $\alpha + i\beta$ ein Eigenwert von $R$ ist.

Nun leiten wir über zu unserem ersten

**(3.1) Satz**
Sei eine FLOQUET-Normalform (2) gegeben. Dann liegt genau einer der folgenden Fälle vor:

- Die Lösungen sind (quasi-)periodisch
- Die Lösungen sind unbeschränkt für $t \to \infty$ und konvergieren gegen 0 für $t \to -\infty$
- Die Lösungen konvergieren gegen 0 für $t \to \infty$ und sind unbeschränkt für $t \to -\infty$

**Beweis**
Sei $\lambda$ ein charakteristisches Vielfaches des Systems (1).

1. $\lambda > 0$: Sei $\mu$ der zugehörige reelle charakteristische Exponent. Dieser ist eindeutig, da die Multiplikation mit $e^{2\pi ik}$ den Realteil nicht ändert, da $\cos(2\pi k) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$. Es existiert nach (2.9) eine Lösung der Form $x(t) = e^{\mu t}p(t)$, wobei $p$ wieder eine $T$-periodische Funktion ist. Falls $p$ komplex ist, so seien
$r, s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T$-periodische Funktionen mit $p = r + is$. Da das System (1) reell ist, betrachten wir reelle Lösungen. Diese sind durch Real- und Imaginärteile der komplexen Lösungen gegeben.
Es existieren also nichttriviale Lösungen der Form
$$x_1(t) = e^{\mu t}r(t), \qquad x_2(t) = e^{\mu t}s(t).$$
Es gilt:
   a) Falls $\lambda = 1$ bzw. $\mu = 0$: Die Lösungen sind $T$-periodisch, da $e^{\mu t} = 1$, also $x_1(t) = r(t)$ bzw. $x_2(t) = s(t)$
   b) Falls $\lambda < 1$ bzw. $\mu < 0$: Die Lösungen kovergieren gegen 0 für $t \to \infty$ und sind unbeschränkt für $t \to -\infty$, da $e^{\mu t}r(t) \to 0$ für $t \to \infty$ , da $e^{\mu t} \to 0$ für $t \to \infty$ und $r(t)$ beschränkt, da periodisch und $e^{\mu t}r(t) \to \infty$ für $t \to -\infty$ , da $e^{\mu t} \to \infty$ für $t \to -\infty$ und $r(t)$ beschränkt. Analog für $x_2(t)$.
   c) Falls $\lambda > 1$ bzw. $\mu > 0$: Die Lösungen sind unbeschränkt für $t \to \infty$ und konvergieren gegen 0 für $t \to -\infty$, da $e^{\mu t}r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ , da $e^{\mu t} \to \infty$ für $t \to \infty$ und $r(t)$ beschränkt und $e^{\mu t}r(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ , da $e^{\mu t} \to 0$ für $t \to -\infty$ und $r(t)$ beschränkt. Analog für $x_2(t)$.

2. $\lambda < 0$: Hier kann $\mu$ gewählt werden als $\nu + \pi i/T$, wobei $\nu$ reel ist und $e^{T\mu} = \lambda$. Setzen wir wieder wie oben $p = r + is$, dann erhalten wir als Lösung:

$$\begin{aligned} e^{\mu t}p(t) &= e^{\nu t}e^{\pi i t/T}(r(t) + is(t)) = e^{\nu t}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + i\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)(r(t) + is(t)) \\ &= e^{\nu t}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)r(t) - \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)s(t)\right) + ie^{\nu t}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)s(t) + \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)r(t)\right) \end{aligned}$$

Falls der Realteil der Lösung verschieden von Null ist, dann hat der Realteil der komplexen Lösung die Form:
$x(t) = e^{\nu t}(r(t)\cos(\pi t/T) - s(t)\sin(\pi t/T))$. Weiter gilt:

   a) Falls $\lambda = -1$ bzw. $\nu = 0$: Die Lösung ist $2T$-periodisch, denn $e^{\pi i} = -1$ und $e^{2\pi i} = 1$.

   b) Falls $\nu < 0$: Die Lösung konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$ und sind unbeschränkt für $t \to -\infty$.

   c) Falls $\nu > 0$: Die Lösung ist unbeschränkt für $t \to \infty$ und konvergieren gegen 0 für $t \to -\infty$.

   (a)-(c) folgen analog wie unter 1.

3. $\lambda$ ist komplex: Dann gilt $\mu = \alpha + i\beta$ und die Lösungen sind gegeben durch:

$$x(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(r(t) + is(t)).$$

   Also haben wir reelle Lösungen:

$$x_1(t) = e^{\alpha t}(r(t)\cos(\beta t) - s(t)\sin(\beta t)), \quad x_2(t) = e^{\alpha t}(r(t)\sin(\beta t) + s(t)\cos(\beta t))$$

   Falls $\alpha < 0$, dann konvergieren die Lösungen gegen 0 für $t \to \infty$. Falls $\alpha > 0$, so sind beide Lösungen unbeschränkt für $t \to \infty$. Falls $\alpha = 0$ und es positive ganze Zahlen $m$ und $n$ gibt, sodass $2\pi m/\beta = nT$, dann sind die Lösungen $nT$-periodisch. Falls keine solche ganzen Zahlen existieren, so nennt man die Lösungen *quasi-periodisch*. $\square$

Bei unserem ersten Vortrag von Gabriela Ansteeg haben wir bereits eine Poincaré-Abbildung in mehrdimendisionalen Räumen kennengelernt.

Wir wiederholen nun ein Beispiel aus dem ersten Vortrag, an dem die POINCARÉ-Abbildung einfach zu konstruieren ist:

Wir betrachten folgende nichtautonome Differentialgleichung:

$$\dot{u} = f(u,t), \qquad u \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Setze die Periode $T > 0$ voraus. Man kann das System jedoch künstlich autonom machen, indem man eine Gleichung hinzuaddiert:

$$\dot{u} = f(u,\psi), \qquad \dot{\psi} = 1, \tag{4}$$

wobei $\psi$ als Winkel-Variable modulo $T$ gesehen werden kann. Also gilt für $n \in \mathbb{Z}$: $\psi + nT = \psi$.
Also betrachten wir das System auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$, wobei $\mathbb{T} = [0,T]$ als $\mathbb{R}$ modulo T gesehen wird.
Nun haben wir die richtigen Voraussetzungen für eine POINCARÉ-Abbildung:
Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, sei $\Phi(t,\xi)$ die Lösung der Differentialgleichung (3), sodass $\Phi(0,\xi) = \xi$, wobei dann $\Phi^*(t) = \begin{pmatrix} \Phi(t,\xi) \\ t \mod T \end{pmatrix}$ die Lösung von (4) ist.
Dann ist $\Sigma := \{(\xi,\psi) : \psi = 0\} \cong \mathbb{R}^n \times \{0\}$ ein POINCARÉ-Schnitt und $\xi \to \Phi(T,\xi)$ die zugehörige POINCARÉ-Abbildung.

Gibt es ein $p \in \mathbb{R}^n$ mit $f(p,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann sind die Funktionen $\Phi(t,p)$ bzw. $\Phi^*(t) = \begin{pmatrix} \Phi(t,p) \\ t \end{pmatrix}$ periodische Lösungen mit Periode $T$. Halten wir fest, dass $\Phi(T,p) = p$. Dies zeigt, dass die Lösung zu einem fixen Punkt der POINCARÉ-Abbildung gehört.

Unser Ziel ist nun, die Stabilität des periodischen Orbits, also der Fixpunkte der POINCARÉ-Abbildung, über die charakteristischen Multiplikatoren zu bestimmen. Für den nächsten Satz benötigen wir den folgenden Hilfssatz, der hier jedoch ohne Beweis bleibt:

**(3.2) Hilfssatz**
Das System der Gestalt (1) habe die POINCARÉ-Abbildung

$$P : \Sigma \to \Sigma, x(t) \mapsto x(t+T)$$

für $t \in \mathbb{Z}$ (also $T = \{..., -T, 0, T, 2T, ...\}$).
Sei $z \in \Sigma$ mit $P(z) = z$ ein Fixpunkt von $P$. Dann gilt:
Haben alle Eigenwerte von $DP(z)$ Betrag<1, so ist $z$ asymptotisch stabil.
Hat ein Eigenwert von $DP(z)$ Betrag>1, so ist $z$ instabil. ◇

Sei $\Phi(t,p) = P(t)e^{tB}$ eine Darstellung in FLOQUET-Normalform. Die Ableitung der POINCARÉ Abbildung im Fixpunkt $p$ ist gegeben durch:

$$D\Phi(T,p) = e^{TB},$$

denn $\Phi(0,p) = P(0)e^0$, also $P(0) = I$.
Also sind die Eigenwerte der Ableitung gerade die charakteristischen Multiplikatoren.
Wenn wir nun diese Erkenntnis nutzen und die Ableitung in folgende Variationsgleichung (vgl. Kap III Satz (2.5)) einsetzen:

$$\dot{W} = f_\Phi(\Phi(t,p),t)W,$$

mit Anfangswert $W(0) = I$, dann können wir den Hilfssatz nutzen und stellen Folgendes fest:

**(3.3) Satz**
Unter obigen Voraussetzungen gilt:

- Haben alle charakteristischen Multiplikatoren Betrag kleiner eins, so ist der zugehörige Fixpunkt der POINCARÉ-Abbildung stabil.
- Hat ein charakteristischer Multiplikator Betrag größer eins, so ist der Fixpunkt instabil.

**Beweis**
Die Aussagen folgen sofort aus obiger Vorabeit und dem Hilfssatz. □

Betrachten wir als Anwendung das folgende

**(3.4) Beispiel (Mathieu-Gleichung)**
Seien $a, \omega \in \mathbb{R}$. Betrachten wir das Pendel mit oszilierendem Ausgangspunkt:

$$\ddot{\theta} + (1 + a\cos(\omega t))\sin(\theta) = 0$$

Die Nulllösung ist gegeben durch $\theta(t) = 0$ Dieses System lässt sich nach dem Reduktionssatz in Kap I Satz (2.6) auch als zweidimensionales System erster Ordnung schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1 + a\cos(\omega t))\sin y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

wobei $x = \dot{\theta}$ und $y = \theta$. Sei

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) = \begin{pmatrix} -(1 + a\cos(\omega t))\sin y \\ x \end{pmatrix}$$

Wie im obigen Beispiel betrachten wir das System:

$$\dot{W} = f_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) W$$

Jetzt wird die Fundamentalmatrix gebildet:

$$\dot{W} = \begin{pmatrix} 0 & -(1 + a\cos(\omega t))\cos y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W$$

Jetzt wird die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eingesetzt und ergibt

$$\dot{W} = \begin{pmatrix} 0 & -(1 + a\cos(\omega t)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(1 + a\cos(\omega t))y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

was äquivalent zu

$$\ddot{x} = -(1 + a\cos(\omega t))x$$

ist. Diese Gleichung wird auch MATHIEU-Gleichung genannt. Dieses Thema soll jedoch hier nicht weitergeführt werden. ◇

— LJAPUNOV-*Exponenten* —

In diesem Abschnitt führen wir einen neuen Begriff, den LJAPUNOV-Exponent ein, welcher Thema des nächsten Vortrags sein wird.

Ab nun betrachten wir die (nichtlineare) Differentialgleichung

$$\dot{u} = f(u), \qquad u \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

Es sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der lokale Fluss.
Sei $\epsilon \in \mathbb{R}, \xi, \nu \in \mathbb{R}^n$ und $\eta := \xi + \epsilon v$, dann starten die Lösungen $\Phi(t,\xi)$ und $\Phi(t,\eta)$ in einer $\epsilon$-Umgebung.
Betrachten wir die Taylorentwicklung von $\Phi(t,\eta)$ bei $\epsilon = 0$ von $\Phi$:

$$\Phi(t,\eta) = \Phi(t,\xi) + \epsilon D\Phi(t,\xi)\nu + ...(\epsilon - 0)^2 + ...$$

Umstellen ergibt:

$$\Phi(t,\eta) - \Phi(t,\xi) = \epsilon D\Phi(t,\xi)\nu + O(\epsilon^2) \tag{6}$$

**(3.5) Bemerkung**
Betrachten wir folgende Gleichung: $\dot{\varphi}(u) = f(\varphi(u))$, dh. $\varphi$ ist Lösung von (5) und differenzieren beide Seiten der Differentialgleichung (5) nach $u$ an der Stelle $u = \xi$. Wir definieren den linearen Operator $L$ durch:

$$||L|| = \sup \frac{|D\Phi(t,\xi)av|}{|av|} = \frac{|D\Phi(t,\xi)v|}{|v|}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$.
Indem wir unsere Lösungen in Integralform ausdrücken erhalten wir:

$$\Phi(t,\xi) = \xi + \int_0^t f(\Phi(s,\xi))\mathrm{d}s, \qquad \Phi(t,\eta) = \xi + \int_0^t f(\Phi(s,\eta))\mathrm{d}s$$

Wenn wir nun ein beschränktes Zeitintervall bzw. eine Lösung wählen, die in einem Kompaktum des $\mathbb{R}^n$ enthalten ist, so existiert eine Lipschitz -Konstante $Lip(f)$ von f. Wenn wir nun die zweite Gleichung von der ersten subtrahieren, erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$|\Phi(t,\eta) - \Phi(t,\xi)| \leq \epsilon|v| + Lip(f) \int_0^t |\Phi(s,\eta) - \Phi(s,\xi)|\mathrm{d}s$$

Mit der Gronwall-Ungleichung aus Kap III Lemma (1.7), wobei hier die Konstanten im Satz hier folgende Werte haben $a = 0$, $b = \infty$, $\alpha = \epsilon|v|$, $\beta = Lip(f)$ und die Funktion $\varphi = |\Phi(t,\eta) - \Phi(t,\xi)|$ gilt, die nach Voraussetzung stetig ist. Nun sind alle Voraussetzungen erfüllt und es folgt:

$$|\Phi(t,\xi+\epsilon v) - \Phi(t,\xi)| \leq \epsilon|v|e^{t\,\mathrm{Lip}(f)}$$

◇

**(3.6) Definition (Ljapunov-Exponent)**
Angenommen, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und die Lösung $\Phi(t,\xi)$ von (5) existiert $\forall t \geq 0$.
Sei $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$. Der Ljapunov-Exponent von $\xi$ in Richtung $v$ des lokalen Flusses $\Phi$ ist definiert durch:

$$\chi(\xi, v) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{|D_2\Phi(t,\xi)v|}{|v|}\right)$$

◇

**(3.7) Beispiel**
Sei das System

$$\dot{x} = -ax, \qquad \dot{y} = by$$

gegeben, wobei $a, b > 0$.
Der Fluss ist gegeben durch:

$$\Phi(t,(x,y)) = (e^{-at}x, e^{bt}y)$$

Wir berechnen erst die Fundamentalmatrix von $\Phi$:

$$D_2\Phi(t,\xi) = \begin{pmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$$

Sei nun $v = (w,z)$ und $w \neq 0$, dann ist $\chi(\xi, v) = b$. Mit den Limesregeln und der Stetigkeit des Logartihmus folgt:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\begin{pmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix}|v|}{|v|}\right) &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{(e^{-at}w + e^{bt}z)}{\sqrt{w^2+z^2}}\right) \\
&= \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\ln(e^{-at}w + e^{bt}z) - \underbrace{\frac{1}{t}\ln(\sqrt{w^2+z^2})}_{\to 0}\right) \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\ln(\limsup_{t\to\infty}(\underbrace{e^{-at}w}_{\to 0} + e^{bt}z))\right) \\
&= \limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\ln(e^{bt}) + \underbrace{\frac{1}{t}\ln(z)}_{\to 0}\right) = b
\end{aligned}$$

Im Falle $w = 0$ kann man analag zum 2. Fall bei $z = 0$ vorgehen. Betrachte also $w \neq 0$. Falls nun $z = 0$ und $w \neq 0$, dann ist $\chi(\xi, v) = -a$, denn Also berechnen wir mithilfe von L'Hospital

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\begin{pmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} |v|}{|v|} \right) &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{e^{-at} w}{\sqrt{w^2}} \right) \\ &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left( e^{-at} \right) \\ &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} e^{-at} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} e^{-at} = -a\end{aligned}$$

Es gibt hier genau zwei Exponenten, die in diesem Fall die Eigenwerte der Jacobimatrix sind. ◇

Es folgt eine

**(3.8) Bemerkung**
Unsere Definition ist nur für autonome Systeme sinnvoll und hängt nur von der Fundamentalmatrix der zugehörigen abweichenden Lösungen entlang der Lösungsbahn des Systems ab.
Alternativ können wir Ljapunov-Exponenten auch für Lösungen von abstrakten, linearen Systemen definieren. Betrachte das System (1).
Sei $\Phi(t)$Fundamentalmatrix bei $t = 0$. Dann ist der Ljapunov-Exponent definiert durch:

$$\chi(v) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\Phi(t)v|}{|v|} \right)$$

mit $v \in \mathbb{R}^n$. ◇

Kommen wir nun zu einem interessanten Ergebnis:

**(3.9) Lemma**
Falls $\mu$ ein FLOQUET-Exponent des Systems (5) ist, dann ist der Realteil von $\mu$ ein LJAPUNOV-Exponent. ◇

**Beweis**
Angenommen, die Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ ist in FLOQUET-Normalform gegeben durch:

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB},$$

wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine $T$-periodische Funktion und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist. Falls $\mu = a + ib$ ein FLOQUET-Exponent ist, dann gibt es nach Definition einen zugehörigen Vektor $v$, sodass $e^{\mu T}v = \lambda v = e^{TB}v$ mit $\lambda$ ein Eigenwert von $e^{TB}$. Es ist $\Phi(T) = P(T)e^{TB}$ und $\Phi(0) = P(0)e^0 = I$ nach Voraussetzung. Daraus folgt $P(0) = I$, also $P(T) = P(0) = I$, also $\Phi(T) = e^{TB}$ und damit

$$\Phi(T)v = e^{\mu T}v$$

Falls $t \geq 0$, dann gibt es eine nichtnegative ganze Zahl $n$ und eine Zahl $r$, sodass $0 \leq r < T$ mit $t = nT + r$. Betrachte

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{|\Phi(t)v|}{|v|}\right)$$

Erweitern des Bruchs und $t = nT + r$ einsetzen ergibt:

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{|\Phi(t)v|}{|v|}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{nT}{nT+r}\right)\frac{1}{n}\ln\left(\frac{|\Phi(t)v|}{|v|}\right)$$

Indem man nun $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ und $e^{TB} = e^{\mu T}$ ausnutzt, erhält man

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{|\Phi(t)v|}{|v|}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{nT}{nT+r}\right)\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{|P(nT+r)e^{rB}e^{n\mu T}v|}{|v|}\right)\right)$$

Da $P(t)$ $T$-periodisch ist, $\mu = a + ib$ und den Logarithmus-Regeln folgt:

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{|\Phi(t)v|}{|v|}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{nT}{nT+r}\right)\left(\frac{1}{n}\ln(|e^{nTa}|) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{|P(r)e^{rB}v|}{|v|}\right)\right)$$

Offensichtlich gilt $n \to \infty$, falls $t \to \infty$. Also folgt:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\left(\underbrace{\frac{nT}{nT+r}}_{\to 1}\right)\left(\underbrace{\frac{1}{n}\underbrace{\ln(|e^{nTa}|)}_{=nTa}}_{Ta} + \underbrace{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{|P(r)e^{rB}v|}{|v|}\right)}_{\to 0}\right) = a.$$

□