

---

# Algebraische invariante Mengen ebener polynomialer Gleichungen I

Vortrag zum Seminar *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 24.01.2012

Christian Wolff

---

Wir werden im Folgenden mit komplexen, zweidimensionalen Differentialgleichungssystemen arbeiten. Für ein zweidimensionales Vektorfeld bestimmt die Existenz eines ersten Integrals sein Phasenportrait. Die einfachsten ebenen Vektorfelder sind die hamilton'schen Vektorfelder. Die integrierbaren ebenen Vektorfelder, welche keine hamilton'schen Vektorfelder sind, sind in der Regel schwierig zu finden.

Wir werden die Existenz erster Integrale für ebene polynomiale Vektorfelder mit Hilfe der Darboux Theorie der Integrierbarkeit untersuchen. Diese Art der Integrierbarkeit liefert einen Zusammenhang zwischen der Integrierbarkeit von polynomialen Vektorfeldern und der Zahl der invarianten Mengen die sie haben.

## §1 Einleitung

Per Definition ist ein zweidimensionales, komplexes, ebenes polynomiales Differentialgleichungssystem ein System der Form

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y) \quad (1)$$

$P$  und  $Q$  sind Polynome mit den Variablen  $x$  und  $y$  und komplexen Koeffizienten. In diesem Vortrag bezeichnet  $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$  den Grad des Systems von Polynomen und wir nehmen immer an, dass die Polynome  $P$  und  $Q$  im Ring der komplexen Polynome mit den Variablen  $x$  und  $y$  teilerfremd sind.

## §2 Erste Integrale und Invarianten

Wir bezeichnen mit  $\mathbb{F}$  entweder den reellen Körper  $\mathbb{R}$  oder den komplexen Körper  $\mathbb{C}$  und mit  $\mathbb{F}$ -Polynomsystem meinen wir ein System der Form (1) mit den Variablen  $x, y$  und den Koeffizienten der Polynome  $P$  und  $Q$  in  $\mathbb{F}$ .  $\mathbb{F}[x, y]$  bezeichnet den Polynomring mit den Variablen  $x$  und  $y$  und Koeffizienten in  $\mathbb{F}$ .

Das zum System (1) gehörige Vektorfeld  $X$  ist definiert durch:

$$X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

System (1) ist integrierbar auf der offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{F}^2$  wenn es eine nichtkonstante analytische Funktion  $H: U \rightarrow \mathbb{F}$ , ein sogenanntes erste Integral des Systems auf  $U$ , gibt, welche für alle Lösungsbahnen  $(x(t), y(t))$  des Systems (1) aus  $U$  konstant ist.

Das heißt  $H(x(t), y(t)) = \textit{konstant}$  für alle Werte von  $t$  für welche die Lösung  $(x(t), y(t))$  definiert und in  $U$  enthalten ist.

Offensichtlich ist  $H$  genau dann ein erstes Integral des Systems (1) auf  $U$ , wenn

$$X(H) = P \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$$

auf  $U$  ist.

In einem hamiltonschen Vektorfeld mit erstem Integral gilt:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

wobei das Kriterium für die Integrierbarkeit lautet:

$$\text{div}(X) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

### §3 Invariante algebraische Mengen

Definition: Sei  $\varphi \in \mathbb{C}[x, y]$  und  $\varphi$  nicht identisch null. Dann ist die algebraische Menge  $Y = \{(x, y); \varphi(x, y) = 0\}$  eine invariante algebraische Menge von System (1), wenn für ein Polynom  $K \in \mathbb{C}[x, y]$

$$X(\varphi) = P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} = K \cdot \varphi \quad (3)$$

gilt.

Das Polynom  $K$  nennt man Kofaktor der invarianten Menge  $Y = \{(x, y); \varphi(x, y) = 0\}$ .

Die Tatsache, dass die Nullstellenmenge von  $\varphi$  tatsächlich invariant ist, folgt aus Satz (2.4) des Skriptes "Gewöhnliche Differentialgleichungen"<sup>1</sup>:

#### Kapitel IV (2.4) Satz.

Gegeben sei  $\dot{x} = f(x)$  auf  $U$ , weiter seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_r: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, und  $Y = \{x \in U; \varphi_1(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0\}$ . Falls es stetige Funktionen  $K_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$X(\varphi) = \sum_{j=1}^r K_{ij} \cdot \varphi_j \quad (1 \leq i \leq r),$$

---

<sup>1</sup> Krieg, A./Walcher, S. (2007): Gewöhnliche Differentialgleichungen. RWTH Aachen.

dann ist  $Y$  invariant. Ist insbesondere  $\varphi$  eine Semiinvariante von  $f$  auf  $U$ , so ist die Nullstellenmenge von  $\varphi$  invariant.

Da das Polynomsystem Grad  $m$  hat, können die Kofaktoren höchstens Grad  $m - 1$  haben. Auf den Punkten der algebraischen Menge  $\varphi = 0$  ist der Gradient  $(\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y)$  von  $\varphi$  senkrecht zum Vektorfeld  $X(\varphi)$  (siehe ()). Demnach ist das Vektorfeld  $X(\varphi)$  an jedem Punkt von  $\varphi = 0$  eine Tangente von  $\varphi = 0$ . Also wird  $\varphi = 0$  geformt durch die Bahnen des Vektorfeldes  $X$ . Dies rechtfertigt den Namen „invariante algebraische Menge“, da sie unter dem durch  $X(\varphi)$  definierten Fluss invariant ist.

### Beispiel

Für:

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

ist  $Y = \{(x, y); \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$  invariante algebraische Menge. Es ist:

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ x^3 + y^2x - x + yx \end{pmatrix}$$

und

$$X(\varphi) = (2x, 2y) \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

$$= 2x(x^2 - 1) + 2y(x^3 + y^2x + yx - x)$$

$$= 2x(x^2 - 1) + 2yx(x^2 + y^2 + y - 1)$$

$$= 2x(x^2 - 1) + 2yx(x^2 + y^2 - 1) + 2xy^2$$

$$= 2x(x^2 + y^2 - 1) + 2yx(x^2 + y^2 - 1)$$

$$= (2x + 2xy)(x^2 + y^2 - 1) = K \cdot \varphi(x, y)$$

mit Kofaktor  $K = 2x + 2xy$ .

## §4 Integrierende Faktoren

Das Kriterium für die Integrierbarkeit (2) ist natürlich nicht immer erfüllt. Durch Multiplikation einer geeigneten nullstellenfreien, stetig differenzierbaren Funktion  $R(x, y) \neq 0$  kann man die Differentialgleichung jedoch unter Umständen erweitern und dann durch weitere Rechenschritte ein erstes Integral erhalten.

Eine solche Funktion  $R(x, y)$  wird dann integrierenden Faktor genannt.

Definition: Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{F}^2$  und sei  $R: U \rightarrow \mathbb{F}$  eine analytische Funktion, die auf  $U$  nicht identisch null ist. Die Funktion  $R$  ist ein integrierender Faktor des  $\mathbb{F}$  – Polynomsystems (1) auf  $U$ , wenn eine der zwei folgenden, äquivalenten Bedingungen auf  $U$  erfüllt ist:

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}, \quad \text{div}(RP, RQ) = 0.$$

Eine weitere, zu den beiden vorhergehenden äquivalente Bedingung ist:

$$X(R) = -R \text{div}(P, Q). \quad (4)$$

Wir wollen uns darauf beschränken, zu zeigen, dass diese letzte Bedingung mit den anderen beiden übereinstimmt:

$$X(R) = \frac{\partial R}{\partial x} P + \frac{\partial R}{\partial y} Q = -R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial x} P + R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} Q + R \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(RP)}{\partial x} + \frac{\partial(RQ)}{\partial y} = 0.$$

In einem hamiltonschen Vektorfeld mit erstem Integral und integrierendem Faktor gilt:

$$\dot{x} = RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = RQ = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (5)$$

Ein zum integrierenden Faktor  $R$  gehöriges erstes Integral  $H$  ist demnach gegeben durch

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x), \quad (6)$$

wobei  $h(x)$  so gewählt wird, dass  $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$  ebenfalls erfüllt ist.

In (6) nehmen wir an, dass der Definitionsbereich der Integration  $U$  dem jeweiligen Ausdruck angepasst ist.

Umgekehrt können wir bei einem gegebenen ersten Integral  $H$  immer einen integrierenden Faktor  $R$  finden, der (5) erfüllt.

Beispiel:

$$P(x, y) = x(1 - y) \quad Q(x, y) = y(2 + x)$$

Man erkennt sofort, dass die Differentialgleichung:

$$x(1 - y) + y(2 + x) \frac{dx}{dy} = 0$$

nicht exakt ist. Man findet jedoch mit

$$R(x, y) = \frac{1}{xy}$$

einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung. Es gilt trivialerweise:

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y} = 0$$

Wir erhalten also durch Multiplikation mit  $R(x, y)$ :

$$\frac{1 - y}{y} + \frac{2 + x}{x} \frac{dx}{dy} = 0$$

Nun können wir mit Hilfe von Gleichung (5) ein erstes Integral des Systems ausrechnen:

$$H(x, y) = \int \frac{1 - y}{y} dy + h(x)$$

$$\Leftrightarrow H(x, y) = \ln(y) - y + h(x)$$

Zur Bestimmung von  $h(x)$  rechnen wir nun:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 + h'(x) = -\frac{2 + x}{x}$$

Integration liefert:

$$h(x) = -2 \cdot \ln(x) - x$$

und als Lösung

$$H(x, y) = \ln(y) - y - 2 \cdot \ln(x) - x$$

### (1.1) Proposition

Wenn System (1) zwei integrierende Faktoren  $R_1$  und  $R_2$  in einer offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{F}^2$  hat, dann ist die Funktion  $R_1/R_2$  in der offenen Menge  $U \setminus \{R_2 = 0\}$  ein erstes Integral, sofern  $R_1/R_2$  nicht konstant ist.

Beweis:

Da  $R_i$  ein integrierender Faktor ist, erfüllt es  $X(R_i) = -R_i \operatorname{div}(P, Q)$  für  $i = 1, 2$ . Proposition (1.1) folgt dann unter Anwendung der Rechenregeln aus:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{R_1}{R_2}\right) &= \frac{\left((X(R_1))R_2 - R_1(X(R_2))\right)}{R_2^2} \\ &= \frac{-R_1 \cdot \operatorname{div}(P, Q) \cdot R_2 - (-R_2 \cdot \operatorname{div}(P, Q) \cdot R_1)}{R_2^2} = 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

## §4 Sätze über invariante algebraische Mengen

### (1.2) Lemma

Seien  $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ . Wir nehmen an, dass  $f$  und  $g$  im Ring  $\mathbb{C}[x, y]$  teilerfremd sind. Dann ist für ein System der Form (1)  $Y = \{(x, y); f \cdot g = 0\}$  eine invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{fg}$  genau dann wenn  $M = \{(x, y); f = 0\}$  und  $N = \{(x, y); g = 0\}$  invariante algebraische Mengen mit Kofaktoren  $K_f$  und  $K_g$  sind. Außerdem gilt  $K_{fg} = K_f + K_g$ .

Beweis:

Wir setzen voraus, dass  $Y = \{(x, y); f \cdot g = 0\}$  eine invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{fg}$  ist. Nach (\*) gilt dann:

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g) = K_{fg} \cdot fg$$

Da  $f$  und  $g$  teilerfremd sind, gilt:

$f$  teilt  $X(f)$  und  $g$  teilt  $X(g)$ . Setzt man nun  $\frac{X(f)}{f} = K_f$  und  $\frac{X(g)}{g} = K_g$  ein, so sind  $f=0$  und  $g=0$  invariante algebraische Mengen von  $f$  mit Kofaktoren  $K_f$  und  $K_g$ .

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 X(f \cdot g) &= K_f \cdot fg + K_g \cdot fg \\
 &= fg(K_f + K_g) \\
 &= fg \cdot K_{fg}
 \end{aligned}$$

q.e.d.

### (1.3) Proposition

Angenommen  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  und es  $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$  die Aufteilung von  $f$  in irreduzible Faktoren über  $\mathbb{C}[x, y]$ . Für ein System von Polynomen wie (1) ist dann  $Y = \{(x, y); f = 0\}$  eine invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_f$  genau dann wenn  $f_i = 0$  für jedes  $i = 1, \dots, r$  eine invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{f_i}$  ist.

Außerdem gilt  $K_f = n_1 K_{f_1} + \dots + n_r K_{f_r}$ .

#### Beweis:

Aus Lemma (1.2) wissen wir, dass  $Y = \{(x, y); f = 0\}$  genau dann eine invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_f$  ist, wenn  $M = \{(x, y); f_i^{n_i} = 0\}$  für jedes  $i = 1, \dots, r$  mit Kofaktor  $K_{f_i^{n_i}}$  ist.

Es gilt außerdem:

$$K_f = K_{f_1^{n_1}} + \dots + K_{f_r^{n_r}}$$

Um den Satz zu beweisen, reicht es aus zu zeigen, dass  $M = \{(x, y); f_i^{n_i} = 0\}$  für jedes  $i = 1, \dots, r$  invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{f_i^{n_i}}$  ist, genau dann wenn  $N = \{(x, y); f_i = 0\}$  invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{f_i}$  ist.

Annahme: Sei  $M = \{(x, y); f_i^{n_i} = 0\}$  ist invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{f_i^{n_i}}$ .

Dann gilt:

$$K_{f_i^{n_i}} \cdot f_i^{n_i} = X(f_i^{n_i}) = n_i \cdot f_i^{n_i-1} \cdot X(f_i)$$

$$\Leftrightarrow X(f_i) = \frac{1}{n_i} \cdot K_{f_i^{n_i}} \cdot f_i$$

Definieren wir  $K_{f_i^{n_i}}/n_i = K_{f_i}$ , so erhalten wir, dass  $N = \{(x, y); f_i = 0\}$  invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_{f_i}$  ist, so dass  $K_{f_i^{n_i}} = n_i K_{f_i}$ .

## §5 Exponentielle Faktoren

Definition: Seien  $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$  und angenommen dass  $h$  und  $g$  entweder teilerfremd im Ring  $\mathbb{C}[x, y]$  sind oder dass  $h \equiv 1$  ist. Dann nennt man die Funktion  $\exp(g/h)$  einen exponentiellen Faktor des Systems (1), wenn sie für ein Polynom  $K \in \mathbb{C}[x, y]$  von höchstens Grad  $m - 1$  die Gleichung

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) = K \exp\left(\frac{g}{h}\right). \quad (7)$$

erfüllt. Auch hier ist  $K$  der Kofaktor des exponentiellen Faktors  $\exp(g/h)$ .

Funktion (7) erfüllt demnach dieselbe Gleichung, wie die invarianten algebraischen Mengen, mit einem Kofaktor von höchstens Grad  $m - 1$ .

Hinsichtlich der Integrierbarkeit von System (1) sind die exponentiellen Faktoren zweifach wichtig. Einerseits erfüllen sie Gleichung (7) und andererseits sind ihre Kofaktoren Polynome von höchstens Grad  $m - 1$ . Dies bedeutet, dass die exponentiellen Faktoren im Bezug auf die Integrierbarkeit von (1) dieselbe Rolle spielen wie die invarianten algebraischen Mengen.

Wir halten fest, dass die exponentiellen Faktoren keine invarianten Mengen für den Fluss des Systems (1) definieren, da sie nie null sind.

### (1.4) Proposition

Wenn  $F = \exp(g/h)$  ein exponentieller Faktor von System (1) ist, dann ist  $Y = \{(x, y); h = 0\}$  eine invariante algebraische Menge und  $g$  genügt der Gleichung

$$X(g) = gK_h + hK_F,$$

wobei  $K_h$  und  $K_F$  die Kofaktoren von  $h$  und  $F$  sind.

### Beweis:

Da  $F$  exponentieller Faktor mit Kofaktor  $K_F$  ist, gilt:

$$\begin{aligned} K_F \exp\left(\frac{g}{h}\right) &= X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{g}{h}\right) \cdot X\left(\frac{g}{h}\right) = \exp\left(\frac{g}{h}\right) \cdot \frac{X(g) \cdot h - g \cdot X(h)}{h^2} \\ &\Leftrightarrow h^2 \cdot K_F = X(g) \cdot h - X(h) \cdot g \end{aligned}$$

Da  $h$  und  $g$  teilerfremd sind, gilt:  $h$  teilt  $X(h)$ . Also ist  $Y = \{(x, y); h = 0\}$  invariante algebraische Menge mit Kofaktor  $K_h = \frac{X(h)}{h}$ .

Also gilt mit  $K_h = \frac{X(h)}{h}$ :

$$X(g) \cdot h = X(h) \cdot g + h^2 \cdot K_F$$

$$\Leftrightarrow X(g) = g \cdot K_h + h \cdot K_F \quad \text{q.e.d.}$$

## Rechenregeln

Es gilt:  $X(H_1 \cdot H_2) = X(H_1) \cdot H_2 + X(H_2) \cdot H_1$

Beweis:

$$\begin{aligned} X(H_1 \cdot H_2) &= D(H_1 \cdot H_2) \cdot f(x, y) \\ &= \left( H_1 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x} + H_2 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x}, H_1 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial y} + H_2 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \cdot f(x, y) \\ &= H_1 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x} \cdot P + H_2 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} \cdot P + H_1 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial y} \cdot Q + H_2 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} \cdot Q \\ &= H_2 \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} \cdot P + \frac{\partial H_1}{\partial y} \cdot Q \right) + H_1 \left( \frac{\partial H_2}{\partial x} \cdot P + \frac{\partial H_2}{\partial y} \cdot Q \right) \end{aligned}$$

Mit:

$$X(H_i) = P \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial H_i}{\partial y} \quad i = 1, 2$$

folgt:

$$X(H_1 \cdot H_2) = X(H_1) \cdot H_2 + X(H_2) \cdot H_1$$

## Quotientenregel

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{H_1}{H_2}\right) &= \frac{H_2 \cdot X(H_1) - H_1 \cdot X(H_2)}{H_2^2} \\ X(H_1 \cdot H_2^{-1}) &= X(H_1) \cdot \frac{1}{H_2} + X(H_2^{-1}) \cdot H_1 \\ &= X(H_1) \cdot \frac{1}{H_2} + X(H_2) \cdot \left(-\frac{1}{H_2^2}\right) \cdot H_1 \\ &= \frac{H_2 \cdot X(H_1) - H_1 \cdot X(H_2)}{H_2^2} \end{aligned}$$