Reihenentwicklung III

Vortrag zum Seminar Gewöhnliche Differentialgleichungen, 06.12.2011

Stella Ziegler

Viele Differentialgleichungen, besonders solche die Anwendung in der Physik finden, können den Satz 1.7 aus dem ersten Vortrag nicht erfüllen. Für diese Differentialgleichungen kann jedoch die Methode der Potenzreihenentwicklung abgeändert werden. Ziel dieses Vortrags ist es, diese Modifizierung kennenzulernen und an Beispielen anzuwenden.

§1 Singuläre Punkte linearer Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt lernen wir den *singulären Punkt* und seine Bedeutung für das Lösen von Differentialgleichungen kennen. Der Begriff wird zunächst über die Eulersche Differentialgleichung eingeführt.

— *Der singuläre Punkt* —

Wir betrachten zunächst die Eulersche Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(t-t_0)^2y'' + (t-t_0)a_1y' + a_2y = 0, \quad y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$t_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$.

Die Eulersche Differentialgleichung ist ein erster nützlicher Prototyp für die allgemeine Situation. Gleichung (1) hat mindestens eine Lösung der Form $|t-t_0|^{z_1}$ und eine zweite linear unabhängige Lösung der Form $|t-t_0|^{z_2}$, $z_1 \neq z_2$ oder $|t-t_0|^{z_1}\log|t-t_0|$. (Dies kann man nachrechnen.)

Dies lässt sich aus der Gleichung

$$z^2 + (a_1-1)z + a_2 = 0 \tag{2}$$

herleiten, die entweder zwei verschiedene Nullstellen z_1, z_2 oder eine doppelte Nullstelle $z_1$besitzt. Gleichung (2) heißt Indexpolynom. Wo dieses herkommt sehen wir später.

Wir erkennen, dass das Satz 1.7 hier nicht angewendet werden kann, da $p(t) = \frac{a_1}{t-t_0}$, $q(t) = \frac{a_2}{(t-t_0)^2}$ nicht analytisch sind für $t = t_0$.

Weiter gilt jedoch, dass in einer Umgebung eines Punktes $t_1 \neq t_0$ der Satz 1.7 trotzdem erfüllt ist. Jede Lösung ist analytisch für $t_1 \neq t_0$ aber nicht in jedem Fall für t_0. Der Punkt $t = t_0$ spielt daher eine besondere Rolle.

(3.1) Definition (singulärer Punkt)
Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $a_0,\ a_1,\ a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in t_0 analytische Funktionen, wobei $a_0(t_0) = 0$ und $a_i(t_0) \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1,2\}$. Dann heißt t_0 *singulärer Punkt* der Gleichung

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0. \tag{3}$$

(Für den Fall, dass $a_0(t_0) = a_1(t_0) = a_2(t_0) = 0$, teilen wir Gleichung (3) durch ein geeignetes Vielfaches von $(t - t_0)$ bis mindestens ein Koeffizient von null verschieden ist.)

Verallgemeinert ist t_0 ein singulärer Punkt der Gleichung

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0,$$

für in t_0 analytische Funktionen $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n-1$, $a_0(t_0) = 0$ und $a_i(t) \neq 0$ für mindestens ein i, $1 \leq i \leq n-1$.

Punkte mit analytischen Koeffizienten $a_i(t), 0 \leq i \leq n-1$, die diese Bedingung nicht erfüllen, nennen wir *reguläre Punkte*. $\diamond$

Wir werden sehen, dass das Verhalten der Lösungen von Gleichung (3) nahe dem singulären Punkt t_0 stark davon abhängt, wie schnell sich $a_0(t)$ null annähert für $t \to t_0$.

Aus diesem Grund charakterisieren wir zwei verschiedene Typen von singulären Punkten.

(3.2) Definition (regulärer singulärer Punkt)
Der Punkt t_0 heißt *regulärer singulärer Punkt* der Gleichung (3), wenn er ein singulärer Punkt ist und es gilt

$$p(t) = \tfrac{a_1(t)}{a_0(t)}, \quad q(t) = \tfrac{a_2(t)}{a_0(t)},$$

so dass $(t - t_0)p(t)$ und $(t - t_0)^2 q(t)$ analytisch in $t = t_0$ sind.

Für den verallgemeinerten Fall wird gefordert

$$p_1(t) = \tfrac{a_1(t)}{a_0(t)},\ p_2(t) = \tfrac{a_2(t)}{a_0(t)},\ \ldots\ ,\ p_n(t) = \tfrac{a_n(t)}{a_0(t)},$$

so dass $(t-t_0)p_1(t),\ (t-t_0)^2p_2(t),\ \ldots\ (t-t_0)^n p_n(t)$ analytisch in $t = t_0$ sind.

Einen regulären singulären Punkt, der diese Bedingung nicht erfüllt, nennen wir *irregulären singulären Punkt*. $\diamond$

Satz 1.7 beschreibt das Verhalten von Lösungen in einer Umgebung eines regulären Punktes.

Unser nächstes Ziel besteht darin, dass Verhalten von Lösungen in einer Umgebung eines regulären singulären Punktes zu untersuchen.

§2 Lösungen nahe eines regulären singulären Punktes

Aus den Definitionen 3.1 und 3.2 aus dem ersten Abschnitt können wir folgern, dass die Gleichung (3) genau dann einen regulären singulären Punkt bei $t = t_0$ hat, wenn (3) in der Form

$$(t - t_0)^2 y'' + (t - t_0)\alpha(t) y' + \beta(t) y = 0 \tag{4}$$

geschrieben werden kann, wobei $\alpha(t) = \frac{(t-t_0)a_1(t)}{a_0(t)}$ und $\beta(t) = \frac{(t-t_0)^2 a_2(t)}{a_0(t)}$ analytisch in t_0 sind und mindestens eine Zahl $\alpha(t_0),\ \beta(t_0),\ \beta'(t_0)$ ist verschieden von null (sonst teilen wir durch $(t - t_0)^2$).

Um den Sachverhalt zu vereinfachen, ist es von Vorteil eine Transformation durchzuführen. Der Wechsel unabhängiger Variablen von t zu $x = t - t_0$ befähigt uns den singulären Punkt t_0 aus Gleichung (4) in den Ursprung zu überführen ohne die Form der Gleichung zu ändern.

Definiere $\overline{\alpha}(x) = \alpha(t_0 + x)$ und $\overline{\beta}(x) = \beta(t_0 + x)$, wobei $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ analytisch sind in $x = 0$, da α und β analytisch sind in $t = t_0$.

Des Weiteren setze

$$\overline{y}(x) = y(t_0 + x).$$

Mit der Kettenregel folgt dann:

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = y'(t_0 + x), \quad \frac{d^2\overline{y}}{dx^2} = y''(t_0 + x).$$

Durch Einsetzen in (4) erhalten wir:

$$x^2 \frac{d^2\overline{y}}{dx^2} + x\overline{\alpha}(x)\frac{d\overline{y}}{dx} + \overline{\beta}(x)\overline{y} = 0. \tag{5}$$

Gleichung (5) hat nun die gleiche Form wie (4), mit dem regulären singulären Punkt $x = 0$. Andersherum, wenn $\overline{z}(x)$ eine Lösung von (5) ist, so wissen wir, dass $z(t) = \overline{z}(t - t_0)$ eine Lösung von (4) ist.

Für die weiteren Überlegungen nehmen wir an, dass eine Transformation in der oben gezeigten Form bereits durchgeführt wurde und betrachten im Weiteren die Gleichung

$$t^2 y'' + t\alpha(t) y' + \beta(t) y = 0, \tag{6}$$

dabei sind $\alpha,\ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen, die analytisch sind in $t = 0$ und durch die Potenzreihen

$$\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k, \quad \beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$$

dargestellt werden. Diese konvergieren in einem Intervall $|t| < r$ $(r > 0)$, wobei α_0, β_0, β_1 nicht alle null sind. Dies folgt aus der Aussage, dass $\alpha(t_0),\ \beta(t_0),\ \beta^{'}(t_0)$ nicht alle null sind.

Bevor wir im nächsten Vortrag die allgemeine Theorie kennenlernen, wollen wir uns in dieser Ausarbeitung drei Beispiele genauer ansehen, die veranschaulichen, welche Probleme beim finden von Lösungen von Differentialgleichungen entstehen können.

(3.3) Beispiel
Die Gleichung $2ty^{''} + y^{'} + ty = 0$ hat einen regulären singulären Punkt bei $t = 0$.

Wir wollen einen Ausdruck für die allgemeine Lösung finden, so dass diese in einer Umgebung von $t = 0$ gültig ist.

Dafür werden zwei linear unabhängige Lösungen gesucht, welche wir mit Hilfe der erweiterten Gleichung bestimmen

$$t^2 y^{''} + \frac{1}{2} t y^{'} + \frac{1}{2} t^2 y = 0. \tag{7}$$

Diese ist nun in der Form von Gleichung (6) mit $\alpha(t) = \frac{1}{2}$, $\beta(t) = \frac{1}{2}t^2$. Da α und β analytisch sind in $t = 0$, ist $t = 0$ ein regulärer singulärer Punkt.

Wir veruchen eine Lösung in der Form $|t|^z \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ $(c_0 \neq 0)$ zu finden, wobei die Konstanten z und c_k durch Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung (7) bestimmt werden. Wir nehmen zunächst an, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ auf einem Intervall um $t = 0$ konvergiert und zeigen erst im Nachhinein die Konvergenz der Lösung und können so die Gültigkeit der Umformungen folgern. Auf die Existenz oder Eindeutigkeit einer Lösung, mit Anfangsbedingungen für $t = 0$, können wir hier nicht wie in Vortrag 2 mit Korollar 4.15 (bekannt aus der Vorlesung Kapitel I) rückschließen, da die Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Da $t = 0$ ein singulärer Punkt der Gleichung (7) ist, führen wir eine Fallunterscheidung zwischen $t < 0$ und $t > 0$ durch.

1.Fall $t > 0$:

Wir nehmen an, dass die Lösung von der Form $\varphi(t) = t^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^{z+k}$ ist. Dann folgt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k) t^{z+k-1} \\ \varphi''(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k)(z+k-1) t^{z+k-2}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (7) erhalten wir:

$$\begin{aligned}&t^2\varphi''(t) + \frac{1}{2}t\varphi'(t) + \frac{1}{2}t^2\varphi(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k)(z+k-1) t^{z+k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+k) t^{z+k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{z+k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \underbrace{\left[(z+k)(z+k-1) + \frac{1}{2}(z+k)\right]}_{=(z+k)(z+k-\frac{1}{2})} t^{z+k} + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} t^{z+m} \\ &= c_0 z(z-\frac{1}{2})t^z + c_1(z+1)(z+\frac{1}{2})t^{z+1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(z+k)(z+k-\frac{1}{2})c_k + \frac{1}{2}c_{k-2}]t^{z+k}\end{aligned}$$

Wir setzen $f(z) = z(z-\frac{1}{2})$, dann gilt für die Gleichung mit $t > 0$:

$$\begin{aligned}&t^2\varphi''(t) + \frac{1}{2}t\varphi'(t) + \frac{1}{2}t^2\varphi(t) \\ &= t^z[c_0 f(z) + c_1 f(z+1)t + \sum_{k=2}^{\infty}\left\{f(z+k)c_k + \frac{1}{2}c_{k-2}\right\}t^k] = 0\end{aligned} \tag{8}$$

Damit wird die Gleichung (7) mit der Funktion $\varphi(t) = t^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, $t > 0$ nur erfüllt, wenn Gleichung (8) verschwindet. Da wir vorausgesetzt hatten, dass $c_0 \neq 0$ ist, muss mit dem Identitätssatz für Potenzreihen (siehe Vortrag 1) gelten:

$f(z) = 0, \quad c_1 f(z+1) = 0, \quad f(z+k)c_k + \frac{1}{2}c_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$

Die Funktion $f(z)$ ist das sogenannte *Indexpolynom*. Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und regulärem singulärem Punkt $t = 0$ ist dieses Polynom immer quadratisch. Die Begründung für diese Eigenschaft sehen wir im nächsten Vortrag.

In diesem Beispiel gilt $f(z) = z(z - \frac{1}{2})$. Die Bedingung $f(z) = 0$ ist also für $z = \frac{1}{2}$ und $z = 0$ erfüllt.

Im ersten Fall sei $z = \frac{1}{2}$. Dann müssen wir $c_1 = 0$ wählen, damit die Gleichung $c_1 f(z+1) = 0$ erfüllt ist (da $f(\frac{3}{2}) \neq 0$). Des Weiteren können wir jetzt die Koeffizienten c_k ($k \geq 2$) aus der Gleichung $f(\frac{1}{2} + k)c_k + \frac{1}{2}c_{k-2} = 0$ bestimmen.

Da $f(\frac{1}{2} + k) = (k + \frac{1}{2})k \neq 0$ für $k = 2, 3, 4, \ldots$ können wir die Gleichung umformen zu

$$c_k = \frac{-1}{2k(k + \frac{1}{2})} c_{k-2} \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

und erhalten somit alle Koeffizienten, die in Abhängigkeit von c_0 ausgedrückt werden können.

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0, \quad c_3 = 0, \ \ldots\ , c_{2m-1} = 0, \ \ldots \\
c_2 &= \frac{-1}{2 \cdot 2(2 + \frac{1}{2})} c_{2-2} = \frac{-c_0}{2 \cdot 5}, \\
c_4 &= \frac{-1}{2 \cdot 4(4 + \frac{1}{2})} c_{4-2} = \frac{-c_2}{4 \cdot 9} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9}, \ldots \\
c_{2m} &= (-1)^m \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4m+1)}
\end{aligned}$$

Das c_{2m} mit der oben genannten Gleichung erfüllt ist, zeigen wir mit vollständiger Induktion.

Behauptung: $c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4m+1)}$

(IA): m=1

$$c_2 = \frac{(-1)^1 c_0}{2 \cdot 5} \quad \checkmark$$

(IV): Es gelte die Behauptung für ein $m \in \mathbb{N}$.

(IS): zu zeigen: $c_{2(m+1)} = \frac{(-1)^{m+1}c_0}{2\cdot 4 \ldots (2(m+1))\cdot 5\cdot 9 \ldots (4(m+1)+1)}$

$$\begin{aligned} c_{2(m+1)} &= c_{2m+2} \\ &= \frac{-1}{2(2m+2)(2m+2+\frac{1}{2})}c_{2m} \\ &= \frac{-1\cdot(-1)^m c_0}{(2m+2)2(2m+\frac{5}{2})\cdot 2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 5\cdot 9\ldots(4m+1)} \\ &= \frac{(-1)^{m+1}c_0}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot(2m+2)\cdot 5\cdot 9\ldots(4m+1)\cdot(4m+5)} \\ &= \frac{(-1)^{m+1}c_0}{2\cdot 4\ldots(2(m+1))\cdot 5\cdot 9\ldots(4(m+1)+1)} \end{aligned}$$

Damit ist per vollständiger Induktion die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Durch Einsetzen in die Lösung $\varphi(t) = t^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, erhalten wir einen Kandidaten für die Lösung der Gleichung (7) ($t > 0$):

$$\varphi_1(t) = t^{\frac{1}{2}}[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 5\cdot 9\ldots(4m+1)} t^{2m}] \quad (z = \tfrac{1}{2}, \text{ mit der Wahl } c_0 = 1)$$

Im zweiten Fall ist $z = 0$. Hier gilt $f(z) = 0$ und c_0 ist frei wählbar. Weiter muss $c_1 = 0$ sein, damit die Gleichung $c_1 f(0+1) = 0$ erfüllt ist, da $f(1) = \frac{1}{2} \neq 0$ ist. Außerdem muss $f(k)c_k + \frac{1}{2}c_{k-2} = 0$ für $k = 2, 3, 4, \ldots$ erfüllt sein.

Da $f(z+k) = f(k) = k(k-\frac{1}{2}) \neq 0$ für $k = 2, 3, \ldots$ können wir die Gleichung umformen zu:

$$c_k = -\frac{1}{2k(k-\frac{1}{2})}c_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Mit analogen Überlegungen wie oben erhalten wir einen zweiten Kandidaten als Lösung für Gleichung (7) ($t > 0$):

$$\varphi_2(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^m}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 3\cdot 7\ldots(4m-1)} t^{2m}$$

Ziel ist es nun zu zeigen, dass φ_1 und φ_2 wirklich Lösungen der Gleichung (7) sind (auf einem Intervall $0 < t < a$) und das φ_1 und φ_2 auf diesem Interball linear unabhängig sind.

Doch zuvor bemerken wir, dass die vorangegangenen Rechnungen unter Vorraussetzung der Konvergenz auch für $t < 0$ gültig sind, wenn t^z durch $|t|^z = e^{z log|t|}$ ersetzt wird.

Damit haben wir für $t \neq 0$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= |t|^{\frac{1}{2}} [1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \ldots (2m) \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4m+1)} t^{2m}], \\ \varphi_2(t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \ldots (2m) \cdot 3 \cdot 7 \ldots (4m-1)} t^{2m} \end{aligned} \tag{9}$$

als mögliche Lösungen für (7).

Als nächstes wenden wir das Quotientenkriterium auf $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ an und zeigen so die bis jetzt nur angenommene Konvergenz der Reihen.

Wir zeigen zunächst die Konvergenz von $\varphi_1(t)$.

Sei dafür $U_m(t) = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \ldots (2m) \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4m+1)} t^{2m} \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Dann folgt:

$$\left| \frac{U_{m+1}(t)}{U_m(t)} \right| = \left| \frac{(-1)^{m+1} \cdot t^{2m+2}}{2 \cdot 4 \ldots (2m+2) \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4m+5)} \; \frac{2 \cdot 4 \ldots (2m) \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4m+1)}{(-1)^m \cdot t^{2m}} \right| = \frac{t^2}{(2m+2)(4m+5)} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

Damit konvergiert die Reihe $1 + \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)$ absolut für $-\infty < t < \infty$.

Um die Konvergenz von $\varphi_2(t)$ zu zeigen, wählen wir $V_m(t) = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \ldots (2m) \cdot 3 \cdot 7 \ldots (4m-1)} t^{2m} \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Dann folgt:

$$\left| \frac{V_{m+1}(t)}{V_m(t)} \right| = \left| \frac{(-1)^{m+1} \cdot t^{2m+2}}{2 \cdot 4 \ldots (2m+2) \cdot 3 \cdot 7 \ldots (4m+3)} \; \frac{2 \cdot 4 \ldots (2m) \cdot 3 \cdot 7 \ldots (4m-1)}{(-1)^m \cdot t^{2m}} \right| = \frac{t^2}{(2m+2)(4m+3)} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

Damit konvergiert die Reihe $1 + \sum_{m=0}^{\infty} V_m(t)$ absolut für $-\infty < t < \infty$.

Wir wissen nun das unsere Rechnungen, die wir zur Bestimmung von φ_1 und φ_2 durchgeführt haben, für $-\infty < t < 0$ und $0 < t < \infty$ gerechtfertigt waren. (Der Wert $t = 0$ muss ausgelassen werden, weil die Differentialgleichung am singulären Punkt keine Bedeutung hat.)

Es wird nun noch gezeigt, dass die Lösungen φ_1 und φ_2 linear unabhängig auf $-\infty < t < 0$ und $0 < t < \infty$ sind und damit auf jedem Intervall, welches nicht die Null enthält.

Beweis:

Angenommen φ_1 und φ_2 sind linear abhängige Lösungen auf $-\infty < t < 0$ bzw. $0 < t < \infty$.

Dann existieren nach Definition zwei Konstanten A und B, mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$, so dass für jedes t mit $-\infty < t < 0$ bzw. $0 < t < \infty$ gilt:

$$A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t) = 0$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)\\
&= A[|t|^{\frac{1}{2}}\,[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 5\cdot 9\ldots(4m+1)} t^{2m}]]\\
&\quad + B[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 3\cdot 7\ldots(4m-1)} t^{2m}].
\end{aligned}$$

Sei nun $0 < t < \infty$ dann folgt für die obere Formel:

$$\begin{aligned}
&A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)\\
&= At^{\frac{1}{2}} + A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 5\cdot 9\ldots(4m+1)} t^{2m+\frac{1}{2}}\\
&\quad + B + B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\cdot 4\ldots(2m)\cdot 3\cdot 7\ldots(4m-1)} t^{2m}\\
&= At^{\frac{1}{2}} + B - \frac{1}{10}t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}Bt^2 + \frac{1}{360}At^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{168}Bt^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass B die niedrigste Ordnung hat mit $B \cdot\ t^0$. Damit die Gleichung null werden kann muss dann mit dem Identitätssatz für Potenzreihen und laut Koeffizientenvergleich $B = 0$ sein. Es gilt dann weiter:

$$A\varphi_1(t) = -B\varphi_2(t) = 0 \quad \forall\ t \in (0, \infty)$$

Daraus folgt aber, dass $A = 0$ sein muss, was ein Wiederspruch zur Annahme ist.

Analog zeigt sich die Behauptung für $-\infty < t < 0$.

Damit ist gezeigt, dass φ_1 und φ_2 zwei linear unabhängige Lösungen sind.

Wir wissen nun außerdem, da eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vorliegt, dass sich eine allgemeine Lösung auf einem Intervall ohne den Ursprung darstellen lässt als

$$a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$$

mit $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ und frei wählbar.

Wir haben nun in Beispiel 1 gesehen, wie man zwei linear unabhängige Lösungen mit Hilfe der zwei verschiedenen Nullstellen des Indexpolynom bestimmen kann.

Das nächste Beispiel soll zeigen, dass dies nicht immer möglich ist, was den Prozess der Lösungsfindung erschwert. Wir betrachten dafür nun eine Differentialgleichung deren Indexpolynom nur eine Nullstelle besitzt. ◇

(3.4) Beispiel
Wir betrachten die Gleichung

$$ty^{''} + y^{'} + y = 0$$

die sich mit t erweitert wie folgt darstellt:

$$t^2y'' + ty^{'} + ty = 0 \tag{10}$$

$t = 0$ ist ein regulärer, singulärer Punkt der Gleichung (10), die in der Form von Gleichung (6) ist, da $\alpha(t) = 1,\ \beta(t) = t$ beide analytisch sind in $t = 0$.

Wir nehmen wieder an, dass $\varphi(t) = |t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ $(c_0 \neq 0)$ eine Lösung auf einem beliebigen Intervall (ohne den Ursprung) ist.

Für $t > 0$ verfahren wir dann wie in Beispiel 1 und erhalten durch einsetzen der Ableitungen

$$\begin{aligned}
\varphi^{'}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z+k)t^{z+k-1} \\
\varphi^{''}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z+k)(z+k-1)t^{z+k-2}
\end{aligned}$$

in (10):

$$
\begin{aligned}
&t^2\varphi^{''}(t) + t\varphi^{'}(t) + t\varphi(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_k t^{k+z} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_k t^{k+z} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+z+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{[(k+z)(k+z-1)+(k+z)]}_{(k+z)(k+z)=(k+z)^2} c_k t^{k+z} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} t^{k+z} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)^2 c_k t^{k+z} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} t^{k+z} \\
&= z^2 c_0 t^z + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+z)^2 c_k + c_{k-1})] t^{k+z} \\
&= t^z[f(z)c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{f(k+z)c_k + c_{k-1}\}\, t^k]
\end{aligned}
$$

mit $f(z) = z^2$.

Damit Gleichung (10) erfüllt wird muss nach dem Identitätssatz für Potenzreihen wieder gelten, dass $f(z) = 0$ ist, da $c_0 \neq 0$ und $f(k+z)c_k + c_{k-1} = 0 \quad \text{mit } k = 1, 2, \ldots$.

Das Indexpolynom $f(z)$ ist wie in Beispiel 1 quadratisch aber mit doppelter Nullstelle $z = 0$.

Da $f(z+k) \neq 0$ ist für $k = 1, 2, \ldots$ gilt

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Wir erhalten die Koeffizienten

$$c_1 = -\frac{c_0}{1}, \quad c_2 = -\frac{c_1}{2^2} = (-1)^2 \frac{c_0}{1 \cdot 2^2}, \quad c_3 = -\frac{c_2}{3^2} = (-1)^3 \frac{c_0}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2}, \ldots$$

Behauptung: Die Koeffizienten lassen sich darstellen als $c_k = (-1)^k \frac{c_0}{\prod_{i=1}^{k} i^2}$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion.

(IA): k=1

$$c_1 = -c_0 \quad \checkmark$$

(IV): Es gelte die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$.

(IS): zu zeigen: $c_{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{c_0}{\prod\limits_{i=1}^{k+1} i^2}$

$$c_{k+1} = -\frac{c_k}{(k+1)^2} = -\frac{(-1)^k c_0}{(k+1)^2 \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} i^2} = \frac{(-1)^{k+1} c_0}{\prod\limits_{i=1}^{k+1} i^2}$$

Damit ist die Behauptung für alle $k \in \mathbb{R}$ gezeigt.

Durch Einsetzen in die Lösung $\varphi(t) = |t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, erhalten wir einen Kandidaten für die Lösung der Gleichung (10):

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\prod\limits_{i=1}^{k} i^2} t^k \quad (z = 0, \text{mit der Wahl } c_0 = 1)$$

Wir wollen nun noch die Konvergenz der Lösung zeigen.

Wir wählen dafür $U_k(t) = \frac{(-1)^k}{\prod\limits_{i=1}^{k} i^2} t^k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$\left| \frac{U_{k+1}(t)}{U_k(t)} \right| = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{\prod\limits_{i=1}^{k} i^2 \cdot (k+1)^2} \; \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} i^2}{(-1)^k} \; \frac{t^{k+1}}{t^k} \right| = \frac{t}{(k+1)^2} \to 0, \; m \to \infty.$$

Damit ist die Reihe konvergent und die durchgeführten Rechnungen waren gültig.

Wir sehen in diesem Beispiel, dass wir auf diese Weise nur eine Lösung der Form $|t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ finden können. Da aber die Differentialgleichung (10) von zweiter Ordnung ist, muss es auch zwei linear unabhängige Lösungen geben, die dann nicht von derselben Form sein müssen. Wie man die zweite Lösung bestimmen kann ist Teil des übernächsten Vortrags. ◇

(3.5) Beispiel
Im dritten Beispiel betrachten wir nun den Fall, dass obwohl das Indexpolynom zwei verschiedene Nullstellen hat, es nicht möglich ist, zwei linear unabhängige Lösungen der Form $|t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ zu finden sind.

Dafür untersuchen wir folgende Differentialgleichung:

$$ty^{''} + ty^{'} - y = 0,$$

die mit t erweiterte Gleichung (11) liefert:

$$t^2y^{''} + t^2y^{'} - ty = 0. \tag{11}$$

Auch hier ist $t = 0$ regulärer singulärer Punkt und da Gleichung (11) in der Gestalt von Gleichung (6) vorliegt erhalten wir $\alpha(t) = t$ und $\beta(t) = -t$.

Wie in den Beispielen zuvor, folgt wieder mit dem Ansatz $\varphi(t) = |t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ für $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{'}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z+k)t^{z+k-1} \\
\varphi^{''}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z+k)(z+k-1)t^{z+k-2}
\end{aligned}$$

und wir erhalten durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
&t^2\varphi^{''}(t) + t^2\varphi^{'}(t) - t\varphi(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_k t^{k+z} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)c_k t^{k+z+1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+z+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+z)(k+z-1)c_k t^{k+z} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+z-1)c_k t^{k+z+1} \\
&= z(z-1)c_0 t^z + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+z)(k+z-1)c_k + (k+z-2)c_{k-1}]t^{k+z} \\
&= t^z[f(z)c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{f(k+z)c_k + (k+z-2)c_{k-1}\}\, t^k
\end{aligned}$$

mit dem Indexpolynom $f(z) = z(z-1)$.

$\varphi(t)$ kann nach dem Identitätssatz für Potenzreihen nur Lösung sein wenn $f(z) = 0$ ist, da $c_0 \neq 0$ ist. Dies gilt für $z = 0$ und für $z = 1$.

Außerdem muss $f(z+k)c_k + (k+z-2)c_{k-1} = 0$, für $k = 1, 2, \ldots$ sein.

Mit $z = 1$ gilt:

$$f(k+1) = k(k+1) \neq 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

Damit können wir folgern:

$$\begin{aligned} & f(1+k)c_k + (k+1-2)c_{k-1} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & k(k+1)c_k + (k-1)c_{k-1} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c_k = \frac{-(k-1)}{k(k+1)} c_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Dies führt uns zu $c_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$ und mit der Wahl von $c_0 = 1$ erhalten wir als Lösung $\varphi(t) = |t| \ (t \neq 0)$. Diese Lösung ist konvergent und damit sind die vorausgegangenen Umformungen gültig.

Um eine zweite Lösung zu bestimmen betrachten wir $z = 0$ und erhalten so eine rekursive Formel:

$$\begin{aligned} & f(0+k)c_k + (k+0-2)c_{k-1} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & k(k-1)c_k + (k-2)c_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Betrachten wir nun zum Beispiel $k = 1$ so gilt:

$$0 \cdot c_1 - c_0 = 0$$

Da aber $c_0 \neq 0$ gilt ist die Gleichung unerfüllbar und es kann keine Lösung gefunden werden, obwohl wir zwei verschiedene Nullstellen für das Indexpolynom ermittelt haben. ◇

(3.6) Bemerkung
Eine Differentialgleichung ist in ihrem singulären Punkten nicht definiert. Wir haben daher in den Beispielen den singulären Punkt rausgelassen und nur Punkte in der Umgebung betrachtet. Oft kann aber die Lösung einer Differentialgleichung im singulären Punkt stetig fortgesetzt werden. Dies zeigt sich zum Beispiel für die Lösung $\varphi_2(t)$ aus Beispiel 3.3, welche in $t = 0$ setig fortsetzbar ist mit $\varphi_2(t) = 1$. ◇

Abschließend halten wir fest, was wir in den drei Beispielen gesehen haben.

Im ersten Beispiel konnte man zwei linear unabhängige Lösungen der Gestalt $|t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ finden. Das Indexpolynom hatte zwei verschiedene Nullstellen. Im zweiten Beispiel hatte das Indexpolynom eine doppelte Nullstelle. Es wurde eine Lösung der Form $|t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ gefinden, jedoch keine Zweite. Das dritte und letzte Beipsiel hat verdeutlicht, dass auch wenn das Indexpolynom zwei verschiedene Nulstellen hat, dies keine Vorraussetzung für zwei linear unabhängige Lösungen der Gestalt $|t|^z \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ ist. Es konnte nur eine konvergente Potenzreihe gefunden werden.

An dieser Stelle schließt die Ausarbeitung. Ziel der nächsten Vorträge ist es, die nun aufgekommenen Probleme zu erarbeiten und Methoden zu finden, die es ermöglichen auch Lösungen für die Beispiele 2 und 3 zu finden.