Die Modulgruppe

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 17.10.11

Artur Dick

In diesem Vortrag betrachen wir zunächst Operationen der Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ beziehungweise $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^2$ sowie $\widehat{\mathbb{C}}$ und dem projektiven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Anschließend führen wir *Gitter* in $\mathbb{C}$ ein und betrachten Operationen der *Modulgruppe* $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf diesen und der positiven Halbebene $\mathbb{H}$. Zum Schluss hin schließen wir auf ein exaktes Vertretersystem des Bahnenraums $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

Inhaltsverzeichnis

§1 Die Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$

In diesem Abschnitt betrachten wir die Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ welche wir auf dem Projektiven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch multiplikation operieren lassen. Wir werden sehen, dass man diese Operation mit der Operation von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ durch gebrochenlineare Transformation, welche aus der Funktionentheorie I bereits bekannt ist, identifizieren kann.

Wir erinnern zunächst an die

(1.1) Definition

1) Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine Operation der Gruppe G auf der Menge M ist eine Abbildung

$$G \times M \longrightarrow M\,,\ (g,m) \longmapsto g.m$$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

a) $1.m = m$ für alle $m \in M$, wobei hier 1 das *Einselement* von G ist.

b) $g.(h.m) = (g.h).m$ für alle $g,h \in G, m \in M$

2) Die Gruppe G operiere auf den Mengen N und M. Eine Abbildung $\varphi : N \to M$ heißt G-**verträglich** oder **äquivariant**, falls gilt

$$\varphi(g.n) = g.\varphi(n) \qquad \text{für alle}\, n \in N, g \in G$$

Ist φ bijektiv, so heißen die Operationen G-**ähnlich** und φ ist dann eine G-**Ähnlichkeit**$\diamond$

Beachte, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow M,\ m \longmapsto g.m$$

für jedes $g \in G$ bijektiv ist, denn zu $g \in G$ existiert stets das eideutige Inverse Element $g^{-1} \in G$ sodass dann

$$g^{-1}.(g.m) = (g^{-1}g).m = m$$

gilt.
Wir betrachten jetzt die Gruppe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) := \{g \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \det(g) \neq 0\}$ die auf $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ durch Multiplikation von rechts operiert, also

$$g.(z,w) = (z,w)g^t = (az+bw, cz+dw) \tag{1}$$

mit $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2,\mathbb{C})$ und $(z,w) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$.
Beachte dazu dass

$$g_1.(g_2.z) = zg_2^t g_1^t = z(g_1 g_2)^t = (g_1 g_2).z$$

für alle $g_1, g_2 \in \mathrm{Gl}(2,\mathbb{C})$ und $z \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$.
Wir definieren den Projektieven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := \{\langle z \rangle \mid z \in \mathbb{C}^2 - \{0\}\}$, also die Menge aller eindimensionalen Teilräume in $\mathbb{C}^2$.
Wegen $g.(\lambda z) = (\lambda(az_1 + bz_2), \lambda(cz_1 + dz_2)) = \lambda(g.z)$ operiert $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ auch auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mittels $g.\langle z \rangle = \langle gz \rangle$.
Die Elemente von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ bezeichnen wir mit $[z,w]$, wo $(z,w) \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ ist. Beachte dass $[z,w] = [z',w']$ genau dann gilt, wenn es ein λ aus $\mathbb{C}^*$ gibt mit $(z,w) = \lambda(z',w')$ $^{(*)}$. Daraus erhalten wir den Isomorphismus

$$\mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^*(z,w) \longmapsto [z,w]$$

wobei die Injektivität und Wohldefiniertheit aus $^{(*)}$ folgt und Surjektivität nach der Definition der Elemente von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ offensichtlich ist.
Ist nun $w \in \mathbb{C}^*$ dann ergibt sich wegen $[z,w] = [w^{-1}z, 1]$ genau ein Vertreter der Form $[\zeta, 1]$, wo $\zeta \in \mathbb{C}$ beziehungsweise $[1,0]$ falls $w = 0$ ist $(**)$. Dies führt uns auf das

(1.2) Lemma
Die Abblidung

$$\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\ z \longmapsto \begin{cases} [z,1], & \text{falls } z \neq \infty \\ [1,0], & \text{falls } z = \infty \end{cases}$$

liefert eine Bijektion. ◇

Beweis
Wegen $(**)$ betrachten wir nur Elemente der Form $[z,1]$ beziehungsweise $[1,0]$ aus $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Φ ist offensichtlich surjektiv. Seien nun $[z,1], [w,1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $[z,1] = [w,1]$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $(z,1) = \lambda(w,1)$. Aus der zweiten Komponente ergibt sich $\lambda = 1$ und somit $z = w$. □

Wir können somit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $\widehat{\mathbb{C}}$, der sogenannten *Riemannschen Zahlenkugel* identifizieren. Damit haben wir nun für $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ und $[z,1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$$g.[z,1] = [az+b, cz+d] = [\frac{az+b}{cz+d}, 1]$$

falls $cz + d \neq 0$ sowie
$$g.[z,1] = [az+b, cz+d] = [1,0]$$
andernfalls, und
$$g.[1,0] = \begin{cases} [\frac{a}{c},1] & \text{falls } c \neq 0 \\ [1,0], & \text{sonst} \end{cases}$$
Andererseits ist aus der Funktionentheorie I die Operation von $GL(2,\mathbb{C})$ auf der Riemannschen Zahlenkugel durch gebrochenlineare Transformation bekannt. Also
$$g.z = \frac{az+b}{cz+d}$$
falls $cz + d \neq 0$ und
$$g.z = \infty$$
andernfalls. Zu dem erhält man
$$g.\infty = \lim_{|z|\to\infty} g.z = \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{falls } c \neq 0 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$
Wir stellen also fest, dass Φ $GL(2,\mathbb{C})$-**äquivariant** ist. Da Φ zusätzlich bijektiv ist, sind die beiden Operationen sogar **ähnlich**.
Wir erhalten somit das Diagramm
$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{C}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Phi"'] & \widehat{\mathbb{C}} \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[r, "g"'] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$
welches für alle $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ kommutiert.
Beachte, dass $az+b$ und $cz+d$ nie gleichzeitig Null sein können, denn aus $az+b=0$ folg $z = -\frac{b}{c}$ und damit $-\frac{cb}{a} + d = 0$, was äquivalent zu $ad - bc = 0$ ist. Es gilt aber $ad - bc = \det(g) \neq 0$ da g invertierbar ist.

Betrachte nun Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.z = \frac{\lambda z}{\lambda} = z$$
für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Sei nun $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit $\det(\gamma) = \alpha$. Dann existiert ein $\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}^*$ mit $\tilde{\alpha}^2 = \alpha$. Dann ist aber
$$(\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}.\gamma).z = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}.(\underbrace{\gamma.z}_{\in\widehat{\mathbb{C}}}) = \gamma.z$$

und

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} .\gamma = 1.$$

Also betrachten wir ab sofort nur noch die Operation der Einschränkung

$$SL(2,\mathbb{C}) := \{g \in GL(2,\mathbb{C}) | \det(g) = 1\} \leq \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$$

Somit kommen wir nun zu dem

(1.3) Lemma
Die Gruppe SL$(2,\mathbb{C})$ operiert transitiv auf der Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$. Wenn wir diese Operation auf die Untergruppe G :=SL$(2,\mathbb{R})$ einschränken, dann zerfällt $\widehat{\mathbb{C}}$ in die drei Bahnen $\mathbb{H}$, $-\mathbb{H}$ und $\widehat{\mathbb{R}}$. ◇

Beweis
Sei $z \in \mathbb{C}$, dann gilt $\left(\begin{smallmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).\infty = z$ und $\left(\begin{smallmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ denn $\det\left(\begin{smallmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$. Weiterhin gilt offensichtlich $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).\infty = \infty$. Da nun $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \{\left(\begin{smallmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\} \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gilt, folg $\widehat{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).\infty$ was äquivalent zu der transitiven Operation von SL$(2,\mathbb{C})$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist.
Wir zeigen nun die Invarianz der Operation von G auf den drei Mengen indem wir

$$\operatorname{Im} g.z = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \tag{2}$$

mit $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ und $z \in \mathbb{C}$ beweisen:

$$\begin{aligned} g.z &= \frac{az+b}{cz+d} \overset{z=x+iy}{=} \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} \\ &= \frac{(a(x+iy)+b)\overline{(c(x+iy)+d)}}{(c(x+iy)+d)\overline{(c(x+iy)+d)}} = \frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ax+b)(cx+d)+ay^2c+i[(ax+b)cy+(cx+d)ay]}{|cz+d|^2} \\ \Rightarrow \operatorname{Im} g.z &= \frac{[(ax+b)cy+(cx+d)ay]}{|cz+d|^2} = \frac{y(\overbrace{ad-bc}^{=det(g)=1})}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{y}{|cz+d|^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Weil $|cz+d| \neq 0$ für alle $c,d \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{H}, -\mathbb{H}$ gilt $\infty \notin G.\mathbb{H}, G.(-\mathbb{H})$. Das bedeutet nun $G.z_1 \subseteq \mathbb{H}$ mit $z_1 \in \mathbb{H}$, $G.z_2 \subseteq -\mathbb{H}$ mit $z_2 \in -\mathbb{H}$ und $G.x \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ mit $x \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Beachte, dass aus (2) der Zusammenhang $\operatorname{Im} g.z = \det(g)\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$ für $g \in \mathrm{Gl}(2,\mathbb{R})$ hervorgeht.
Nun zeigen wir, dass G auf den drei Mengen transitiv operiert.
Wählt man wie oben $x \in \mathbb{R}$ statt $z \in \mathbb{C}$ so ergibt sich analog , dass $\widehat{\mathbb{R}}$ in der ∞-Bahn von G liegt. Also operiert G transitiv auf $\widehat{\mathbb{R}}$.
Weiter definiere zu $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$g_z := \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

und $g_z \in G$ da $\det(g_z) = 1$ und es gilt $z = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = g_z.i$ also operiert G transitiv auf $\mathbb{H}$. Analog gilt für positive $y : z = x - iy \in -\mathbb{H}$, $z = g_z.(-i)$ und damit operiert G transitiv auf $-\mathbb{H}$. Es ergeben sich die Inklusionen $G.z_1 \supseteq \mathbb{H}$, $G.z_2 \supseteq -\mathbb{H}$ und $G.x \supseteq \widehat{\mathbb{R}}$, also folgt jeweils Gleichheit. $\square$

§2 Die Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

Wir führen zunächst einen weiteren Begriff ein.

(2.1) Definition

a) Ein **Gitter** ist eine Untergruppe Λ der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ der Form

$$\Lambda = \Lambda(a,b) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b = \{ka + lb | \, k,l \in \mathbb{Z}\}$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. Wir sagen, dass das **Gitter** von a und b erzeugt wird, oder dass a, b eine $\mathbb{Z}$-Basis des **Gitter**s ist.

b) Sei **GITT** die Menge aller Gitter in $\mathbb{C}$ und **BAS** die Menge aller $\mathbb{R}$-Basen in $\mathbb{C}$, also die Menge aller Paare $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Sei nun $\mathbf{BAS}^+ := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | \operatorname{Im} \frac{z}{w} > 0\}$ die Teilmenge aller Basen die im Uhrzeigersinn orientiert sind. $\diamond$

Beachte: $\operatorname{Im} z/w > 0$ ist äquivalent zu $\arg z/w = \arg z - \arg w \in (0, \pi)$. Sind (z, w) gegen den Uhrzeigersinn orientiert, das heißt

$$\operatorname{Im} z/w < 0 \Leftrightarrow \arg z/w = \arg z - \arg w \in (-\pi, 0)$$

dann ist (w, z) im Uhrzeigersinn orientiert, denn

$$\arg w - \arg z = \arg w/z \in (0, \pi) \Leftrightarrow \operatorname{Im} z/w > 0$$

($\arg z/w = 0$, π nicht möglich , da sonst z, w linear abhängig wären über $\mathbb{R}$).
Anschaulich gesprochen: $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ sind im Uhrzeigersinn orientiert, wenn man z mit dem Uhrzeigersinn drehen muss, um auf kürzestem Wege zu w zu kommen.
Wir erhalten eine Natürliche Abbidung

$$\Psi : \mathbf{BAS}^+ \longrightarrow \mathbf{GITT},\ (z,w) \longmapsto \mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}w$$

Ψ ist offensichtlich surjektiv, denn wir können zu einem gegebenen Gitter die Reihenfolge der $\mathbb{Z}$-Basis so wählen, dass diese im Uhrzeigersinn orientiert ist. Weil

$$\begin{aligned}\Psi(z+w,w) &= \mathbb{Z}(z+w) \oplus \mathbb{Z}w = \{k(z+w)+lw \mid k,l \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{kz + \underbrace{(l+k)}_{=\tilde{l}} w \mid k,l \in \mathbb{Z}\} = \{kz + \tilde{l}w \mid k,\tilde{l} \in \mathbb{Z}\}\\ &= \Psi(z,w)\end{aligned}$$

ist Ψ nicht injektiv.
Beachte, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (l,k), \longmapsto al + bk$$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ aufgrund des erweiterten Euklidischen Algorithmus surjektiv ist.
Wir definieren nun $\Gamma := SL(2,\mathbb{Z})$, welche auf $\mathbf{BAS}^+$ durch Multiplikation von rechts wie in (1) operiert. Diese Operation ist wohldefiniert, denn aus (3) ist ersichtlich, dass eine invertierbare reelle Matrix genau dann die Orientierung einer Basis erhält, wenn ihre Determinate positiv ist.

Die Gruppe Γ *wird die* **Modulgruppe** *genannt.*

(2.2) Lemma
Die Abbildung

$$\Psi : \Gamma\backslash\mathbf{BAS}^+ \longrightarrow \mathbf{GITT},\ \Gamma(z,w) \longmapsto \Lambda(z,w)$$

stiftet eine Bijektion. Hierbei ist $\Gamma\backslash\ \mathbf{BAS}^+ := \{\Gamma(z,w) \mid (z,w) \in \mathbf{BAS}^+\}$. Anders gesagt: Zwei Basen werden genau dann auf das selbe Gitter abgebildet, wenn sie in der selben Γ-Bahn sind. $\diamond$

Beweis
Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Abbildung.
Seien $(z,w), (z',w') \in \mathbf{BAS}^+$ und in der selben Bahn unter Γ. Dann gibt es $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$

in Γ mit $\gamma.(z,w) = (az+bw, cz+dw) = (z', w')$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Psi(z',w') &= \Psi(az+bw, cz+dw) = \Lambda(az+bw, cz+dw) \\
&= \{(az+bw)k + (cz+dw)l \,|\, k,l \in \mathbb{Z}\} = \{z(ak+cl) + w(dl+bk) \,|\, k,l \in \mathbb{Z}\} \\
&\overset{(*)}{=} \{z\tilde{k} + w\tilde{l} \,|\, \tilde{l}, \tilde{k} \in \mathbb{Z}\} = \Psi(z,w)
\end{aligned}$$

Die Injektivität ergibt sich wie folgt.
Seien dazu $(z,w),(z',w') \in \mathbf{BAS}^+$ mit $\Psi(z,w) = \Lambda = \Psi(z',w')$. Das heißt, dass z', w' Elemente des von z,w erzeugten Gitters sind. Also gibt es $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ mit $(z',w') = (az+bw, cz+dw) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).(z,w)$. Da aber auch z,w Elemente des von z', w' erzeugten Gitters sind, gibt es $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{Z}$ mit $(z,w) = (\alpha z' + \beta w', \gamma z' + \delta w') = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right).(z',w')$. Das heißt also $(z,w) = (z,w)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$. Da aber (z,w) linear unabhängig über $\mathbb{R}$ waren, folgt mit der Eindeutigkeit der Linearkombination $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$, also ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) =: \gamma$ über $\mathbb{Z}$ invertierbar und es folgt, dass auch $\det(\gamma)$ über $\mathbb{Z}$ invertierbar ist, also $\det(\gamma) = \pm 1$. Da aber γ die positiv orientierte Basis (z,w) auf die positiv orientierte Basis (z',w') abgebildet hat, muss $\det(\gamma) = 1$ sein. Das heißt also $\gamma \in \Gamma$ und damit sind (z,w) und (z',w') in der selben Bahn unter Γ.
Die Surjektiviät ist offensichtlich, da man die Reihenfolge der Basen derart wählen kann, dass diese positiv orientiert sind.
Zu $(*)$: Die Abbildung

$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2,\ (k,l) \longmapsto (k,l)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$$

ist bijektiv. □

Der Einfachheit halber dividiert man aus $\mathbf{BAS}^+$ eine $\mathbb{C}^*$-Operation heraus. Die Gruppe $\mathbb{C}^*$ operiert auf $\mathbf{BAS}^+$ durch Multiplikation. Wir haben in jeder Bahn genau einen Vertreter der Form $(z,1)$, wo $z \in \mathbb{H}$.
Diese Operation kommutiert mit der Operation von Γ:
Seien $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ und $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dann

$$\begin{aligned}
\gamma.(\alpha.(z,w)) &= \gamma.(\alpha z, \alpha w) = (\alpha z a + \alpha w b, \alpha z c + \alpha w d) \\
&= \alpha.(za+wb, zc+wd) = \alpha.(\gamma.(z,w))
\end{aligned} \tag{4}$$

Damit operiert $\mathbb{C}^*$ auf dem Bahnenraum $\Gamma\backslash\mathbf{BAS}^+$ durch

$$\begin{aligned}
\alpha.(\Gamma(z,w)) &= \alpha.\{\gamma.(z,w) \,|\gamma \in \Gamma\} \\
&= \{\alpha.(\gamma.(z,w)) \,|\gamma \in \Gamma\} \\
&= \{\gamma.(\alpha.(z,w)) \,|\gamma \in \Gamma\} \\
&= \Gamma(\alpha.(z,w))
\end{aligned}$$

Andererseits operiert $\mathbb{C}^*$ auch auf **GITT** durch Multiplikation und wir haben genau einen Verterter in jeder Bahn von $\mathbb{C}^*$ der Form $\mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z} \in$ **GITT**.

Weil

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda.\Gamma(z,w)) &= \Psi(\Gamma(\lambda z, \lambda w)) \overset{(2.2)}{=} \mathbb{Z}\lambda z \oplus \mathbb{Z}\lambda w \\ &= \{\lambda zl + \lambda wk |\, k,l \in \mathbb{Z}\} = \{\lambda(zl + wk) |\, k,l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \lambda.\{zl + wk |\, k,l \in \mathbb{Z}\} = \lambda.(\mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}w) \overset{(2.2)}{=} \lambda.\Psi(\Gamma(z,w))\end{aligned}$$

übersetzt Ψ eine Operation in die andere und bildet die Bahnenräume bijektiv auf einander ab

$$\Psi : \Gamma\backslash\mathbf{BAS}^+/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\cong} \mathbf{GITT}/\mathbb{C}^*,\, \Gamma(z,1)\mathbb{C}^* \longmapsto \Lambda(z,1)\mathbb{C}^*,$$

wobei die sich Injektivität und Wohldefiniertheit aus (4) ergibt und die Surjektivität offensichtlich ist.

(2.3) Satz
Die Abbildung

$$\vartheta : \Gamma\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \mathbf{GITT}/\mathbb{C}^*,\, \Gamma z \longmapsto \Lambda(z,1)\mathbb{C}^*$$

stiftet eine Bijektion. ◇

Beweis
Die Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbf{BAS}^+/\mathbb{C}^*,\, z \longmapsto (z,1)\mathbb{C}^*$$

ist äquivariant unter Γ, denn

$$\tilde{\varphi}(g.z) = \tilde{\varphi}\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = \Big(\frac{az+b}{cz+d}, 1\Big)\mathbb{C}^*$$

und

$$g.\tilde{\varphi}(z) = g.(z,1)\mathbb{C}^* = (az+b, cz+d)\mathbb{C}^* = \Big(\frac{az+b}{cz+d}, 1\Big)\mathbb{C}^*$$

mit $z \in \mathbb{H}, g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$.

Damit ist

$$\varphi : \Gamma\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \Gamma\backslash\mathbf{BAS}^+/\mathbb{C}^*,\ \Gamma z \longmapsto \Gamma(z,1)\mathbb{C}^*$$

wohldefiniert und man erhält $\varphi(\Gamma z) = \Gamma\tilde{\varphi}(z)$.
Wir zeigen, dass φ bijektiv ist.
Zur Surjektivität:
Sei $\Gamma(z,w)\mathbb{C}^* \in \Gamma\backslash\mathbf{BAS}^+/\mathbb{C}^*$, dann ist $(z,w) \in \mathbf{BAS}^+$ und $\frac{z}{w} \in \mathbb{H}$.

$$\varphi(\Gamma\frac{z}{w}) = \Gamma\tilde{\varphi}(\frac{z}{w}) = \Gamma(\frac{z}{w},1)\mathbb{C}^* = \Gamma(z,w)\mathbb{C}^*$$

also ist φ surjektiv.
Zur Injektivität:
Annahme es gilt $\varphi(\Gamma z) = \varphi(\Gamma w)$ mit $z, w \in \mathbb{H}$. Das heißt also $\Gamma(z,1)\mathbb{C}^* = \Gamma(w,1)\mathbb{C}^*$ und es gibt $\gamma \in \Gamma, \alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $(z,1) = \gamma(w,1)\alpha = \alpha(aw+b, cw+d) = (z,1)$. Aus der zweiten Komponente ergibt sich $\alpha = (cw+b)^{-1}$ und damit $z = \frac{aw+b}{cw+d} = \gamma.w$, also liegen z, w in der selben Bahn von Γ und φ ist injektiv.
Die Behauptung folgt mit $\vartheta = \Psi \circ \varphi$. □

§3 Der Fundamentalbereich von SL$(2,\mathbb{Z})$

In diesem Abschnitt geht es im Wesentlichen um den Fundamenatlbereich der Modulgruppe. Damit kommen wir zur

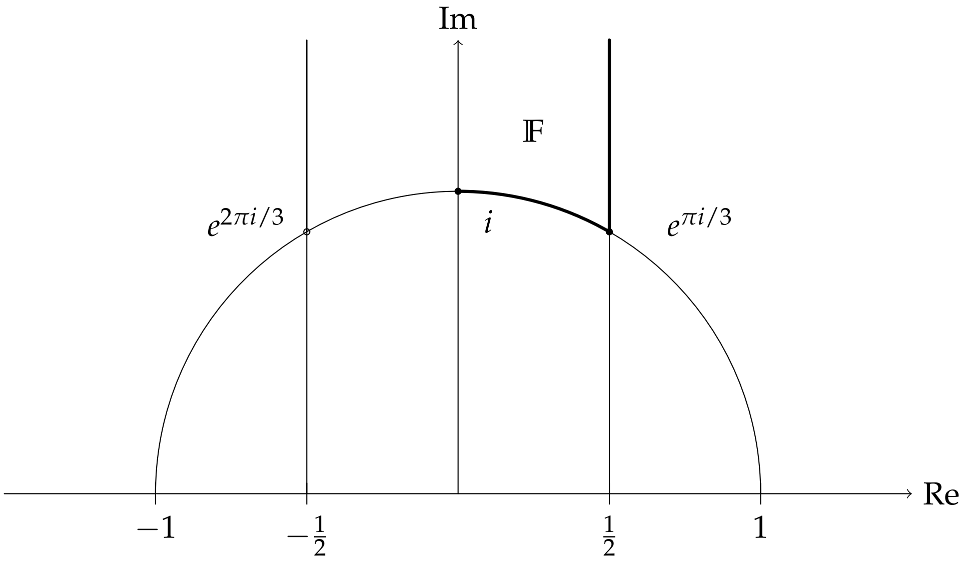
(3.1) Definition

1) Sei $D \subseteq \mathbb{H}$ offen und nicht leer. D ist ein *Fundamentalbereich* der Gruppe Γ, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   a) Für alle $z \in \mathbb{H}$ existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma.z \in \overline{D}$.
   b) Sind $z, \gamma.z \in \overline{D}$ mit $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \pm E$, dann sind $z, \gamma.z \in \partial D$. ◇
2) Unter einem *exakten Fundametalbereich* versteht man eine Teilmenge $\mathbb{D} \subseteq \overline{D}$ derart, dass $\mathbb{D}$ ein Vertretersystem von $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ darstellt. Das heißt $\mathbb{D}$ enthält genau einen Vertreter jeder Bahn unter Γ.

Man betrachte nun die Menge

$$\mathbb{F} := \{\tau \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\tau \leq \frac{1}{2},\ |\tau| \geq 1 \,\text{und}\, |\tau| > 1 \ \text{für}\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\tau < 0\}$$

und veranschauliche sich diese an der unten stehenden Abbildung.



Wir definieren weiter zwei wichtige Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

von denen wir gleich sehen werden, dass diese die Modulgruppe erzeugen.
Es gilt

$$S.z = -\frac{1}{z}, \qquad T.z = z + 1$$

(3.2) Satz

a) $\mathbb{F}$ ist ein exakter Fundamentalbereich der Modulgruppe.

b) Für $z \in \mathbb{H}$ sei Γ_z der Stabilisator von z in Γ. Es ist $\Gamma_z = \{\pm E\}$ für $z \in \overline{\mathbb{F}}$, außer wenn:
   - $z = i$, dann ist Γ_z von der Ordnug vier, erzeugt von S,
   - $z = \rho = e^{2\pi i/3}$, dann ist Γ_z von der Ordnung sechs, erzeugt von ST,
   - $z = -\overline{\rho} = e^{\pi i/3}$, dann ist Γ_z von der Ordnung sechs, erzeugt von TS.

c) Die Modulgruppe wird von S und T erzeugt. ◇

Beweis
Wir betrachten zunächs die von S, T erzeugte Untergruppe von Γ

$$\Gamma' := \langle S, T\rangle = \{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \gamma_i \in \{S,T\} \text{ oder } \gamma_i^{-1} \in \{S,T\}\}.$$

Wir zeigen nun, dass es zu $z \in \mathbb{H}$ ein $\gamma \in \Gamma'$ gibt mit $\gamma.z \in \overline{\mathbb{F}}$.

Zu $M > 0$ ist die Menge $A(M,z) := \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid |cz+d| < M\}$ endlich, denn

$$M^2 > |cz+d|^2 = (cy)^2 + (cx+d)^2 \geq (cy)^2, \tag{5}$$

woraus dann $|c| \leq M/y$ folgt. Andereseits erhält man

$$M > |cz+d| \geq |cx+d| \geq |d| - |cx|, \tag{6}$$

was dann mit (5) äquivalent ist zu $|d| \leq M(1+|x|/y)$.

Nun ist die Menge $B(M,z) := \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists a,b \in \mathbb{Z} \text{ mit } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma',\ |cz+d| < M\}$ als Teilmenge von $A(M,z)$ endlich und es gibt somit $(c,d) \in B(M,z)$ mit $|cz+d|$ minimal, ergo es gibt $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma'$ mit $\mathrm{Im}\gamma.z = \mathrm{Im}\,\frac{z}{|cz+d|^2}$ maximal.
Beachte, dass M so groß gewählt werden kann, dass $B(M,z)$ nicht leer ist. Beispielsweise wähle $M := |z|+1$, dann ist $(-1,0)$ in $B(M,z)$, da $S \in \Gamma'$.
Aus der Definition von T folgt, dass $T^n.(\gamma.z) = \gamma.z + n$ gilt mit $n \in \mathbb{Z}$. Also gibt es ein ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{Re}T^k.(\gamma.z) \in [-1/2, 1/2]$. Nun zeigen wir, dass bereits $\xi := T^k.(\gamma.z) \in \mathbb{F}$ gilt, also $|\xi| \geq 1$. Annahme $|\xi| < 1$. Dann ist aber

$$\mathrm{Im}(-1/\xi) = \mathrm{Im}\, S\xi \overset{(2)}{=} \frac{\mathrm{Im}\,\xi}{|\xi|^2} > \mathrm{Im}\,\xi,$$

was der Wahl von ξ widerspricht. Also $\xi \in \overline{\mathbb{F}}$. Beachte, dass

$$\mathrm{Im}\xi = \mathrm{Im}T^k.(\gamma.z) = \mathrm{Im}\gamma.z,$$

da T nur den Realteil von $\gamma.z$ verändert.
Den Teil b) der Definition (3.1) zeigen wir nun für Γ. Seien dazu $z, w \in \overline{\mathbb{F}}$ und in derselben Bahn unter Γ, dann existiert also $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ mit $\gamma.z = w$. Nun gilt $\mathrm{Im}\, z \geq \mathrm{Im}\, w$ oder $\mathrm{Im}\, z \leq \mathrm{Im}\, w$ und wir nehmen O.B.d.A an, dass letzteres gilt, denn wir können (z, γ) durch (w, γ^{-1}) ersetzen. Dann ist $\mathrm{Im}w = \mathrm{Im}\gamma.z = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2} \geq \mathrm{Im}z$, womit dann $|cz+d| \overset{(*)}{\leq} 1$ gelten muss. Dies aber impliziert $|c| \leq 1/y$ und $1/y$ ist maximal, wenn $z = e^{2\pi/3i}$ oder $z = e^{\pi/3i}$, in jedem Fall ist aber $y = \mathrm{Im}z = \sqrt{3}/2$. Damit ergibt sich eine obere Schranke $|c| \leq 2/\sqrt{3}$ und wegen $c \in \mathbb{Z}$ unterscheiden wir die Fälle:

- $c = 0$: Dann gilt mit $(*)$ $d = \pm 1$, da für $d = 0$ die Determinate gleich 0 wäre. Sei o.B.d.A $d = 1$ (der andere Fall führt zum selben Ergebnis). Dann ergibt sich aus der Determinante von γ, dass $w = \gamma.z = z + b$ gelten muss. Da beide Elemente aus $\overline{\mathbb{F}}$ waren, folgt, falls $b = \pm 1$, $\mathrm{Re}z = \mp 1/2$ gelten muss und falls $b = 0$ wir $\gamma.z = z$ erhalten.

- $c = 1$: Dann gilt $|z + d| \leq 1$ und aus (6) erhält man

  $$|d| \leq 1 + |x|/y \leq 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} < 2,$$

  da x maximal $1/2$ sein kann. Es ist also $|d| \leq 1$ zu untersuchen, also die weiteren Fälle

  - $d = 0$: Dann ist $|z| \leq 1$ und nach Voraussetzung $|z| \geq 1$, also $|z| = 1$. Wegen $ad - bc = 1$ muss $b = -1$ sein, also

    $$\gamma.z = \frac{az - 1}{z} = a - \frac{1}{z} = a - \overline{z} \in \overline{\mathbb{F}}.$$

    Falls $\mathrm{Re}z \in (-1/2, 1/2)$, dann ist auch $\mathrm{Re}(-\overline{z}) \in (-1/2, 1/2)$ und a muss damit 0 sein, also $w = \gamma.z = -\frac{1}{z}$. Ist nun $\mathrm{Re}z = \pm 1/2$, dann muss $z = \rho$ oder $z = -\overline{\rho}$ sein und $\gamma.\rho = a - \frac{1}{\rho} = a - \overline{\rho} \in \overline{\mathbb{F}}$ also $a = 0, -1$. Analog gilt für $z = -\overline{\rho}$: $a = 0, 1$

– $d = 1$: Dann gilt $|z+1| \leq 1$ und mit $z = x + iy \in \overline{\mathbb{F}}$ und $|z|^2 = \varsigma \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ folgt

$$\begin{aligned} |x+1+iy| &= \sqrt{(x+1)^2+y^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow (x+1)^2+y^2 = \varsigma + 2x + 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\varsigma/2, \end{aligned}$$

was wegen $\varsigma \geq 1$ und $x \geq -1/2$, $\varsigma = 1$ und $x = -1/2$ impliziert, das heißt $z = \rho$. Nun ist $ad - bc = a - b = 1$, also $b = a - 1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\rho = \frac{a\rho + a - 1}{\rho + 1} &= \frac{a(\rho+1)-1}{\rho+1} \\ &= a - \frac{1}{\rho+1} = a + \frac{1}{\overline{\rho}} = a + \rho \in \overline{\mathbb{F}} \end{aligned}$$

und damit $a = 0$, 1, also

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\rho = \rho, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\rho = -\overline{\rho}$$

– $d = -1$: Dann ist $|z-1| \leq 1$ und man erhält mit analoger Argumentation zu dem obigen Fall, dass dies nur für $z = -\overline{\rho}$ möglich ist. Mit $b = -(a+1)$ folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -(a+1) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.(-\overline{\rho}) = \frac{-a\overline{\rho} - a - 1}{-\overline{\rho} - 1} &= \frac{-a(\overline{\rho}+1)-1}{-\overline{\rho}-1} \\ &= a - \frac{1}{-\overline{\rho}-1} = a - \frac{1}{-\overline{\rho}-1} = a - \overline{\rho} \in \overline{\mathbb{F}} \end{aligned}$$

und damit $a = -1$, 0, also

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.(-\overline{\rho}) = -\overline{\rho}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.(-\overline{\rho}) = \rho$$

- $c = -1$: $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -1 & d \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $-\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -a & -b \\ 1 & -d \end{smallmatrix}\right)$ und

$$\gamma.z = \frac{az+b}{-z+d} = \frac{-(az+b)}{-(-z+d)} = \frac{-az-b}{z-d} = (-\gamma).z$$

und $(-\gamma).z = S^2\gamma \in \Gamma$. Damit lässt sich γ durch $-\gamma$ ersetzen und der Fall $c = -1$ auf den Fall $c = 1$ zurückführen.

Wir nutzen diese Ergebnisse für den Spezialfall $z = w$ um Teil b) zu beweisen. Wir haben gesehen, dass alles auf $z = \rho$ oder $z = -\overline{\rho}$ führte. Ausser im Fall $|z| = 1$ und $\operatorname{Re} z \in (-1/2, 1/2)$, wo wir $w = -1/z$ erhielten , was aber $z = i$ impliziert. Für alle übrigen Elemente waren stets nur $\pm E$ möglich. Also unetrsuchen wir jetzt:

- $z = i$: Wir erhalten aus (2) $\mathrm{Im}\gamma.i = \frac{1}{c^2+d^2} = 1$ und somit genau vier Fälle für c, d:
$$(c,d) \in \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$$
und vergleichen mit dem Erzeugnis
$$\langle S\rangle := \{S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), S^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), S^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), S^4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$$

- $z = \rho$: $\mathrm{Im}\gamma.\rho = \frac{\mathrm{Im}\,\rho}{|c\rho+d|^2} = \mathrm{Im}\rho$ und erhalten wie in a) maximal die Fälle
$$(c,d) \in \{(1,0),(1,1),(1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,-1),(0,1),(0,-1)\},$$
wobei wir wegen Teil a) die zwei Fälle $(c,d) = (1,-1),(-1,1)$ ausschließen können, da diese nur für $z = -\overline{\rho}$ möglich sind. Wir erhalten jeden dieser möglichen Fälle in dem Erzeugnis
$$\langle ST\rangle := \{ST = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), (ST)^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), (ST)^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right),$$
$$(ST)^4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right), (ST)^5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), (ST)^6 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$$

- $z = -\overline{\rho}$: Analog zum obigen Fall erhält man dieselben Fälle für $c, d \in \mathbb{Z}$, wobei wir wieder die Fälle $(c,d) = (1,1),(-1,-1)$ ausschließen können, da diese nach a)nur für $z = \rho$ möglich sind. Wir vergleichen wieder mit dem Erzeugnis
$$\langle TS\rangle := \{TS = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), (TS)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right), (TS)^3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right),$$
$$(TS)^4 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -0 \end{smallmatrix}\right), (TS)^5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), (TS)^6 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$$

Beachte hier, dass es wegen Teil a) keine weiteren Möglichkeiten in allen drei Fällen für die erste Zeile (also $a, b \in \mathbb{Z}$) in jeder Matrix eines jeweiligen Stabilisators gibt.

Jetzt muss nur noch (c) gezeigt werden.

Nach Definition gilt $\Gamma' \leq \Gamma$ und wir zeigen nun $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Sei dazu $z \in \overset{\circ}{\mathbb{F}}$ und $\gamma \in \Gamma$. Dann ist $\gamma.z \in \mathbb{H}$ nach (3). Dann existiert nach Teil a) ein $\gamma' \in \Gamma'$ mit $\gamma'.(\gamma.z) = (\gamma'\gamma).z \in \overline{\mathbb{F}}$. Damit gilt bereits dass $\gamma'\gamma = \pm E$, denn nach Teil a) müssten sonst z und $(\gamma'\gamma).z$ in $\partial\mathbb{F}$ liegen , da $\gamma'\gamma \in \Gamma$. Nach Wahl von z ist dies aber ein Widerspruch. Es folgt
$$\gamma'.\gamma = \pm E \Leftrightarrow \gamma = \pm\gamma'^{-1}$$
Weil $S^2 = -E \in \Gamma'$ gilt also $\pm\gamma'^{-1} \in \Gamma'$ und somit folgt $\Gamma \subseteq \Gamma'$. $\square$

Literatur

[1] A. Deitmar, *Automorphe Formen*

[2] M. Koecher, A. Krieg (1998), *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer, Berlin.

[3] A. Krieg (2009), *Funktionentheorie I, Skript zur Vorlesung*

[4] W.Plesken (2005), *Lineare Algebra I, Skript zur Vorlesung*

[5] W.Plesken (2009), *Lineare Algebra II, Skript zur Vorlesung*

[6] W.Plesken (2009), *Computeralgebra , Skript zur Vorlesung*