RWTH Aachen
Lehrstuhl A für Mathematik

Seminar in Funktionentheorie I
Prof. Dr. A. Krieg

Amal Dajour
Datum: 24.10.2011

Einführung in die Modulformen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 24.10.2011

Amal Dajour

In diesem Kapitel lernen wir die modularen Funktionen kennen, einige ihre Eigenschaften und deren Fourier-Entwicklung.

§ 1 Modulformen

In diesem Abschnitt werden die Modulformen eingeführt und einige Eigenschaften herausgearbeitet.

— *Modulformen* —

(1.1) Wichtige Wiederholungen

- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im(z)} > 0\}$ heißt die Obere Halbebene.
- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \det(A) = 1 \right\} = \Gamma.$
- $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ist die Menge aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, die periodisch sind mit Periode 1, d.h. $g(x+1) = g(x), x \in \mathbb{R}$.
- $K_{r,R} = \{r < |z-a| < R\}$ mit $a \in \mathbb{C}$.
- $\dot{K}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ ist die punktierte Kreisschiebe.

(1.2) Definition (Schwach modulare Funktion)
Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$ heißt *schwach modular vom Gewicht k* falls gilt

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{H}$, in dem f definiert ist, und jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. ◇

(1.3) Bemerkung
Existiert eine solche Funktion $f \neq 0$, so muss k gerade sein. ◇

Beweis
Da die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegt, gilt für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$f\left(\frac{(-1)\cdot z+0}{0\cdot z+(-1)}\right) = (0\cdot z+(-1))^k f(z) \Longleftrightarrow f(z) = (-1)^k \cdot f(z).$$

Für k ungerade gilt $f(z) = -f(z)$, also $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$. □

(1.4) Definition
Für die Matrix $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ bezeichnen wir die induzierte Abbildung $z \mapsto \sigma z = \frac{az+b}{cz+d}$ ebenfalls mit σ. Dann definieren wir

$$f|_k\sigma(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

Wenn k fest gewählt ist, lassen wir es in der Notation weg. D.h. wir schreiben $f|_k\sigma = f|\sigma$.

N.B.: Da die Abbildungen der Form: $z \mapsto \sigma z$ mit $\sigma \in \Gamma$ genau die Automorphismen der oberen Halbebene sind [1], folgt, dass der Ausdruck $f(\sigma z)$ wohldefiniert ist. Auch der Ausdruck $(cz+d)$ ist wohldefiniert, da für $c = d = 0$, σ nicht mehr in Γ ist (wegen $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$). ◇

(1.5) Lemma
Durch $f \mapsto f|\sigma$ wird eine lineare Rechtsoperation der Gruppe G auf dem Raum der Funktionen $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ definiert, d.h.

a) für jedes $\sigma \in G$ ist die Abbildung $f \mapsto f|\sigma$ linear.

b) es gilt $f|1 = f$ und $f|(\sigma\sigma') = (f|\sigma)|\sigma'$. ◇

Beweis
a) Seien f und g zwei schwach modulare Funktionen vom Gewicht k.
Für $\sigma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha f+g)|\sigma(z) &= (cz+d)^{-k}\alpha\,(f+g)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= \alpha(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + (cz+d)^{-k} g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= \alpha f|\sigma(z) + g|\sigma(z).\end{aligned}$$

Damit folgt die Linearität.

b) Es ist zu zeigen $f|1 = f$:
Da die Einheitmatrix I_2 in Γ ist, folgt:
$f|1(z) = (0 \cdot z + 1)^{-k} f\left(\frac{1 \cdot z+0}{0 \cdot z+1}\right) = (1)^{-k} f(z) = f(z)$.

Weiter ist zu zeigen $f|(\sigma\sigma') = (f|\sigma)|\sigma'$:
Seien $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ und $\sigma' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\sigma\sigma' = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_1 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$ aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Per Definition:

$$
\begin{aligned}
(f|\sigma)|\sigma'(z) &= \left((a_3z + a_4)^{-k} f\left(\frac{a_1z + a_2}{a_3z + a_4}\right)\right)|\sigma' \\
&= \left(a_3\frac{b_1z + b_2}{b_3z + b_4} + a_4\right)^{-k} (b_3z + b_4)^{-k} f\left(\frac{a_1\frac{b_1z+b_2}{b_3z+b_4} + a_2}{a_3\frac{b_1z+b_2}{b_3z+b_4} + a_4}\right) \\
&= \left(a_3\left(b_1z + b_2\right) + a_4\left(b_3z + b_4\right)\right)^{-k} f\left(\frac{a_1\left(b_1z + b_2\right) + a_2\left(b_3z + b_4\right)}{a_3\left(b_1z + b_2\right) + a_4\left(b_3z + b_4\right)}\right) \\
&= \left(\left(a_3b_1 + a_4b_3\right)z + \left(a_3b_2 + a_4b_4\right)\right)^{-k} f\left(\frac{\left(a_1b_1 + a_2b_3\right)z + \left(a_1b_2 + a_2b_4\right)}{\left(a_3b_1 + a_4b_3\right)z + \left(a_3b_2 + a_4b_4\right)}\right) \\
&= \left(f|\sigma\sigma'\right)(z).
\end{aligned}
$$

(1.6) Lemma
Sei $k \in 2\mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$ ist genau dann schwach modular vom Gewicht k, wenn für jedes $z \in \mathbb{H}$, für welches f definiert ist, gilt

$$f(z+1) = f(z) \quad \text{und} \quad f(-1/z) = z^k f(z). \qquad \diamond$$

Beweis
Die Definition (1.2) besagt, dass eine meromorphe Funktion f genau dann schwach modular ist, wenn gilt:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad ,\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Aus der Definition (1.4) ergibt sich, dass f invariant unter der Gruppenoperation ist, mit $f|_k\sigma = f, \forall \sigma \in \ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Andererseits erzeugen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Modulgruppe Γ (Satz 2.1.7,[3]) $\Rightarrow$ Wegen der Multiplikativität (1.5) reicht es die Invarianz von f unter T

und S zu überprüfen:

$$f(z) = f|S(z) = (1 \cdot z + 0)^{-k} f\left(\frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}\right) = z^{-k} f\left(-1/z\right).$$
$$f(z) = f|T(z) = (0 \cdot z + 1)^{-k} f\left(\frac{1 \cdot z + 1}{0 \cdot z + 1}\right) = f\left(z + 1\right).$$

□

(1.7) Lemma
Sei $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit Periode 1. Dann gibt es geanu eine meromorphe modulo 1 periodische Funktion $\tilde{f}$ mit

$$f(z) = \tilde{f}(e^{2\pi i z}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

◇

Beweis

- Zu zeigen ist die Wohldefinierheit und die Meromorphie von $\tilde{f}$:

  Sei $q : \mathbb{H} \mapsto \dot{K}_1(0), z \mapsto e^{2\pi i z}$, für $z = x + iy$ ist $e^{2\pi i z} = e^{-2\pi i y} \cdot e^{2\pi i x}$ mit $e^{-2\pi i y} < 1$, $(y > 0)$.
  Also ist q surjektiv, periodisch mit der Periode 1 [4].
  Weiter sei $q' : \dot{K}_1(0) \mapsto \mathbb{H}$, $w \mapsto \frac{\log(w)}{2\pi i} = \frac{arg(w)}{2\pi} - i \ln|w| \in \mathbb{H}$.
  Dann definieren wir $\tilde{f} : \dot{K}_1(0) \mapsto \mathbb{C}$, $w \mapsto f\left(\frac{\log(w)}{2\pi i}\right)$.
  Nach dem vorhergehenden ist $\tilde{f}$ wohldefiniert.

  $\tilde{f}$ ist also holomorph in w für f holomorph in $z = \frac{\log(w)}{2\pi i}$ mit $w \in \dot{K}_1(0) \cap \mathbb{C}_-$ [1].
  Sei nun $w_0 \in \dot{K}_1(0) \cap \mathbb{C}_-$ und f hat einen Pol in $z_0 = \frac{\log(w_0)}{2\pi i}$.

  $$\lim_{w \to w_0} |\tilde{f}(w)| = \lim_{w \to w_0} \left| f\left(\frac{\log(w)}{2\pi i}\right)\right| = \lim_{w \to w_0} \left| f\left(\frac{\log(w_0)}{2\pi i}\right)\right| = \lim_{z \to z_0} |f\left(z_0\right)| = \infty.$$

  Die Pole von $\tilde{f}$ können sich nicht in $\dot{K}_1(0) \cap \mathbb{C}_-$ häufen, da sich sonst die Pole von f auch in $\dot{K}_1(0) \cap \mathbb{C}_-$ häufen müssten.
  Es folgt, dass $\tilde{f}$ meromorph in $\dot{K}_1(0) \cap \mathbb{C}_-$ ist.

  Sei nun $w_0 \in \dot{K}_1(0) \cap \mathbb{R}^*_-$, $w_0 = x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^*_-$.

  1.Fall: $w_0 \in \mathbb{R}^*_-$, so dass f holomorph in $z_0 = \frac{\log(w_0)}{2\pi i}$ ist.

Bei Annäherung an x_0 von der oberen bzw. der unteren Halbebene konvergiert $\frac{\log(w)}{2\pi i}$ gegen

$$\frac{\ln|x_0|}{2\pi i}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\ln|x_0|}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\ln|x_0|}{2\pi i}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\ln|x_0|}{2\pi}.$$

Die beiden Punkte unterscheiden sich nur im Realteil um 1.
Weil f modulo 1 periodisch ist, ist $\tilde{f}\left(e^{2\pi iz}\right)$ stetig in x_0, und damit holomorph auf $\dot{K}_1(0)$ (nach dem Satz (4.1), Kapitel V,[1]).

2.Fall: $w_0 \in \mathbb{R}^*_-$, so dass f einen Pol in $z_0=\frac{\log(w_0)}{2\pi i}$ hat.

$$\lim_{w\to w_0}\left|\tilde{f}(w)\right|=\lim_{w\to w_0}\left|f\left(\frac{\log(w)}{2\pi i}\right)\right|=\lim_{w\to w_0}\left|f\left(\frac{\log(w_0)}{2\pi i}+k\right)\right|\overset{(*)}{=}\lim_{z\to z_0}\left|f\left(z_0+k\right)\right|=\infty.$$

(*): für $k\in\{0,1\}$ bei Annäherung von der unteren als auch von der oberen Halbebene. Damit folgt, dass $\tilde{f}$ meromorph auf $\dot{K}_1(0)$.

- Zu zeigen ist die Eindeutigkeit von $\tilde{f}$.
  Sei $z\in\mathbb{H}$ mit einem geeigneten $k=k_z$

$$\tilde{f}\left(e^{2\pi z}\right)=f\left(\frac{1}{2\pi i}\log\left(e^{2\pi iz}\right)\right)=f\left(z+k_z\right)\overset{\text{(Periodizität)}}{=}f(z).$$

  Nun nehmen wir an, dass zwei meromorphe Funktionen $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ auf $\dot{K}_1(0)$ existieren, so dass

$$\tilde{f}_1\left(e^{2\pi iz}\right)=f(z)=\tilde{f}_2\left(e^{2\pi iz}\right) \quad \text{mit} \quad z\in\mathbb{H}.$$

  Da $\left\{e^{2\pi iz};z\in\mathbb{H}\right\}=\dot{K}_1(0)$, folgt mit dem Identitätsatz ((3.10) Kapitel III, [1]), dass $\tilde{f}_1(z)=\tilde{f}_2(z)$, $\forall z\in\dot{K}_1(0)$.

- Zu zeigen ist die Periodizität von $\tilde{f}$:
  Sei $z\in\mathbb{H}$, dann gilt

$$\tilde{f}\left(e^{2\pi i(z+1)}\right)=\tilde{f}\left(e^{2\pi iz}\cdot\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}\right)=\tilde{f}\left(e^{2\pi iz}\right).$$

  Es folgt, dass $\tilde{f}$ die Periode 1 hat. □

(1.8) Definition
Eine schwach modulare Funktion f vom Gewicht k heißt *modulare Funktion vom Gewicht* k, falls die induzierte Funktion $\tilde{f}$ meromorph auf der Kreisscheibe $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist.

N.B.: Man sagt zu dieser Eigenschaft auch, dass f *meromorph im Unendlichen* ist. Dies bedeutet, dass $\tilde{f}(q)$ in $q = 0$ höchstens einen Pol besitzt. Es folgt, dass die Pole von $\tilde{f}$ in $\dot{K}_1(0)$ sich nicht in $q = 0$ häufen können, da sonst eine wesentliche Singularität vorläge. Für die Funktion f bedeutet dies, dass es eine Schranke $T = T_f > 0$ gibt, so dass f keine Pole in $z \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}(z) > T$ hat [3]. $\diamond$

(1.9) Definition
Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine unbeschränkte Menge. Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Funktion $x^N f(x)$ auf dem Definitionsbereich D beschränkt ist.
Für $D = \mathbb{N}$ erhält man als Spezialfall den Begriff einer schnell fallenden Folge. $\diamond$

(1.10) Beispiel
- Für $D = \mathbb{N}$ ist die Folge $a_k = \frac{1}{k!}$ schnell fallend.
- Für $D = [0, \infty)$ ist die Funktion $f(x) = e^{-x}$ schnell fallend.
- Für $D = \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ schnell fallend. $\diamond$

(1.11) Proposition (Fourier-Reihe)
Ist $g \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, so gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{2\pi i k x}, \quad \text{mit} \quad c_k(g) = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i k t}\, \mathrm{d}t,$$

wobei die Summe gleichmäßig konvergiert. Die Fourier-Koeffizienten $c_k = c_k(g)$ sind schnell fallend in $k \in \mathbb{Z}$.
Die Fourier-Koeffizienten $c_k(g)$ sind eindeutig in dem folgenden Sinne:
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Familie komplexer Zahlen, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k x},$$

wobei die Reihe lokal-gleichmäßig konvergiert. Dann ist $a_k = c_k(g)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. $\diamond$

Beweis

- Z.z. : $c_k(g)$ sind schnell fallend:
  Mit partieller Integration für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} |c_k(g)| &= \left| \int_0^1 g(t) e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \left[\frac{-e^{-2\pi ikt}}{2\pi ik} g(t) \right]_0^1 - \int_0^1 g'(t) \frac{-e^{-2\pi ikt}}{2\pi ik} \mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi ik} \int_0^1 g'(t) e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

Da $\frac{e^{-2\pi ik}}{2\pi ik} = \frac{e^0}{2\pi ik}$ und $g(0) = g(1)$ (g hat die Periode 1) ist und die Ableitung einer periodischen Funktion wieder periodisch ist, folgt:

$$\begin{aligned} &\overset{\text{(P.I.)}}{=} \left| \frac{-1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 g''(t) e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 \left| g''(t) e^{-2\pi ikt} \right| \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 \left| g''(t) \right| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Durch Iteration der partiellen Integration bekommen wir nach n Iterationen:

$$\begin{aligned} |c_k(g)| &\leq \frac{1}{(2\pi k)^n} \int_0^1 \left| g^{(n)}(t) \right| \mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow |c_k(g) k^n| &\leq \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^1 \left| g^{(n)}(t) \right| \mathrm{d}t}_{\text{Das Integral ist unabh. von } k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Fourier-Koeffizienten $c_k(g)$ sind schnell fallend.

- Z.z. : Die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{2\pi ikx}$ konvergiert gleichmäßig:
  Aus dem vorherigen Beweis folgt, dass die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)| < \infty$ konvergiert mit dem Majoranten Kriterium, da:

  $$|c_k(g)| \leq \frac{1}{4\pi^2k^2} \int_0^1 \left|g''(t)\right| \,\mathrm{d}t$$

  $\Rightarrow$

  $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2k^2} \int_0^1 \left|g''(t)\right| \,\mathrm{d}t < \infty.$$

  Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{2\pi ikx}$ gleichmäßig, da

  $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|c_k(g)e^{2\pi ikx}\right| = \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|}_{abs.\ konv.} \underbrace{\left|e^{2\pi ikx}\right|}_{=1} \leq \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi k)^n} \int_0^1 \left|g^{(n)}(t)\right| \mathrm{d}t}_{unabh.\ von\ x} < \infty$$

  Wir müssen nun feststellen, dass die Reihe gegen g konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$.
  Nehmen wir an, dass dies für $x = 0$ gezeigt wurde.
  Sei $g_x(t) = g(x+t)$, für $x \in \mathbb{R}$. Nach Annahme ist $g_x \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)$, so gilt:

  $$g(x) = g_x(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g_x) \underbrace{e^{2\pi ik\cdot 0}}_{=1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g_x).$$

  Andererseits ist

  $$\begin{aligned} c_k(g_x) &= \int_0^1 g_x(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g(x+t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g(x+t)e^{-2\pi ik(x+t)}e^{2\pi ikx}\mathrm{d}t \\ &= e^{2\pi ikx}\int_0^1 g(x+t)e^{-2\pi ik(x+t)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\overset{\text{(Sub.:y=x+t)}}{=} \quad e^{-2\pi ikx} \int\limits_{x}^{x+1} g(y)e^{-2\pi ik(y)}\mathrm{d}y$$
$$\overset{\text{(Periodizität)}}{=} \quad e^{2\pi ikx} \int\limits_{0}^{1} g(y)e^{-2\pi ik(y)}\mathrm{d}y$$
$$= \quad e^{2\pi ikx} c_k(g)$$

und somit folgt die Behauptung für $x \in \mathbb{R}$. Es genügt $g(0) = 0$ anzunehmen.
Denn es sei die Behauptung für alle h aus $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ gezeigt, mit
$h(x) = g(x) - g(0)$ und $h(0) = 0$, dann folgt:
Für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_k(h) &= \int\limits_0^1 h(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 (g(t) - g(0))e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 g(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 g(0)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 g(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t - g(0)\int\limits_0^1 e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= c_k(g) + \frac{g(0)}{2\pi ik}(\underbrace{e^{-2\pi ik} - 1}_{=0}) \\
&= c_k(g).
\end{aligned}$$

Für $k = 0$:

$$\begin{aligned}
c_0(h) &= c_k(g) - g(0)\int\limits_0^1 \underbrace{e^{-2\pi ikt}}_{=1}\mathrm{d}t \\
&= c_k(g) - g(0).
\end{aligned}$$

Da $h(0) = 0 \Rightarrow g(0) = h(0) + g(0) = (\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) - g(0)) + g(0) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)$.
Also o.B.d.A. $g(0) = 0$, d.h. es ist $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) = 0$ zu zeigen.
Dafür brauchen wir die folgende Hilfsfunktion: $h(x) = \frac{g(x)}{e^{2\pi ix}-1}$.

Da $g(x)$ und $e^{2\pi ix}-1$ die Periode 1 haben, und $e^{2\pi ix}-1$ nur eine Nullstelle der 1. Ordnung hat, folgt mit L´Hospital die Stetigkeit von h an der Stelle 0. Analoges gilt für die Differenzierbarkeit [2]. Mit $g(0)=0 \Rightarrow h \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}
c_k(g) &= \int_0^1 h(t)(e^{2\pi it}-1)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 h(t)e^{-2\pi i(k-1)t} - h(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 h(t)e^{-2\pi i(k-1)t}\mathrm{d}t - \int_0^1 h(t)e^{-2\pi ikt}\mathrm{d}t \\
&= c_{k-1}(h) - c_k(h).
\end{aligned}$$

Da $h \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(h)$ ebenfalls absolut und es gilt: $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (c_{k-1}(h)-c_k(h)) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-1}(h) - \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(h) = 0.$

- Z.z.: Die Eindeutigkeit der Koeffizienten. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ wie in der Proposition (1.11). Wegen der lokal-gleichmäßigen Konvergenz ist die folgende Vertauschung von Integration und Summation gerechtfertigt [2]. Für $l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
c_l(g) &= \int_0^1 g(t)e^{-2\pi ilt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi ikt}e^{-2\pi ilt}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 a_k e^{2\pi ikt}e^{-2\pi ilt}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^1 e^{2\pi ikt-2\pi ilt}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^1 e^{2\pi it(k-l)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Andererseits ist für $k \neq l$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{2\pi i(k-l)t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi i(k-l)}\int_0^1 2\pi i(k-l)e^{2\pi i(k-l)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi i(k-l)}\left[e^{2\pi i(k-l)t}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi i(k-l)}\left(\underbrace{e^{2\pi i(k-l)}}_{=1} - \underbrace{e^{2\pi i(k-l).0}}_{=1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für $k = l$ ist : $\int_0^1 e^{2\pi it(k-l)t}\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = [t]_0^1 = 1 \Rightarrow c_l(g) = a_l$. □

(1.12) Bemerkung
Sei f eine schwach modulare Funktion vom Gewicht k. Da $f(z) = f(z+1)$ und f (außer in den Polen) unendlich oft reell stetig differenzierbar ist, kann man f in eine Fourier-Reihe entwickelen:

$$f(x+iy) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y)e^{2\pi inx},$$

◇

sofern auf der Geraden $\mathrm{Im}(w) = y$ kein Pol von $f(w)$ liegt, was für alle bis abzählbar viele $y > 0$ der Fall ist. Für ein solches y ist die Folge $(c_n(y))_n \in \mathbb{Z}$ schnell fallend.

(1.13) Lemma
Sei f eine modulare Funktion auf $\mathbb{H}$ und sei $T > 0$ so dass f keine Pole in $\{\mathrm{Im}(z) > T\}$ hat. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und $y > T$ gilt $c_n(y) = a_n e^{-2\pi ny}$ für eine Konstante a_n. Es gilt

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi inz},$$

wobei $-N$ die Polordnung der induzierten meromorphen Funktion $\tilde{f}$ im Punkt $q = 0$ ist. Für jedes $a > 0$ ist die Folge $\left\{a_n e^{-a|n|}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ schnell fallend. ◇

Beweis
Definiere: $q : z \mapsto e^{2\pi iz}$ mit w und die induzierte Funktion $\tilde{f}$ mit $f(z) = \tilde{f}(q(z))$ oder $f(\frac{\log(w)}{2\pi i}) = \tilde{f}(w)$. $\tilde{f}$ ist meromorph. Es folgt, dass $\tilde{f}$ in einer punktierten Umgebung der 0 eine Laurent-Entwicklung hat [1]:

$$\Rightarrow \tilde{f}(w) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n w^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \tilde{f}(q(z)) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n q(z)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Fourier-Koeff. $\Rightarrow$ Behauptung.
Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge $a_n e^{-a|n|}$ schnell fallend ist.
Es gilt für $a > 0$:

$$\left|a_n e^{-a|n|}\right| \leq \left|a_n e^{-an}\right| = \left|a_n e^{-2\pi n \frac{a}{2\pi}}\right| = \left|c_n(\frac{a}{2\pi})\right|$$

Da $\left\{c_n(\frac{a}{2\pi})\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nach Proposition (1.11) schnell fallend (und $\frac{a}{2\pi} > 0$) ist, folgt, dass $\left\{a_n e^{-a|n|}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ auch schnell fallend ist. Insbesonders ist dann auch diese Folge wieder lokal gleichmäßig konvergent. □

(1.14) Bemerkung
Die Fourier-Entwicklung einer modularen Funktion ist gleich der Laurent-Entwicklung der induzierten Funktion $\tilde{f}$ im Nullpunkt. ◇

(1.15) Definition
Eine modulare Funtkion f heißt *Modulform*, falls f holomorph in $\mathbb{H}$ ist und *holomorph in* ∞ , d.h. $a_n = 0$ für jedes $n < 0$. Eine Modulform f heißt *Spitzenform*, falls zusätzlich $a_0 = 0$ gilt. Man sagt dann auch, dass f in ∞ verschwindet. Als Beispiel betrachten wir die Eisenstein-Reihen G_k. ◇

(1.16) Bemerkung

- Die modularen Funktionen vom Gewicht k bilden einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, den wir mit $\mathbb{V}_k$ bezeichnen, denn
  - die meromorphe Funktionen bilden auf einem Gebiet G einen Körper [1].
  - seien f und g modulare Funktionen vom Gewicht k,dann haben diese bei ∞ höchstens einen Pol, und damit hat $\alpha f + \beta g$ auch höchstens einen Pol im ∞ mit α und β aus $\mathbb{C}$, denn es gilt $\left(\widetilde{\alpha f + g}\right) = \alpha\tilde{f} + \tilde{g}$.

- Das Produkt zweier modularen Funktionen vom Gewicht k und n hat wiederum ganz analog bei ∞ höchstens einen Pol. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(z) &= f(z)\cdot g(z)\\ &= (cz+d)^{-k}\cdot f(\sigma z)\cdot (cz+d)^{-n} g(\sigma z)\\ &= (cz+d)^{-(k+n)}\cdot f(\sigma z)\cdot g(\sigma z)\\ &= (cz+d)^{-(k+n)}\cdot f\cdot g(\sigma z)\end{aligned}$$

  für alle $\sigma \in \Gamma$ und alle $z \in \mathbb{H}$, in denen f und g definiert sind. Es folgt

$$\mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_n \subseteq \mathbb{V}_{k+n} \text{ für } k,n \in \mathbb{Z}.$$

- Entsprechendes gilt auch für die Modulformen und die Spitzenformen. ◇

§2 Eisenstein-Reihen

Die klassischen Beispiele für Modulformen sind die Eisenstein-Reihen

$$G_k(z) := \sum_{m,n}{}' (mz+n)^{-k} \quad \text{für} \quad k \geq 3 \quad , z \in \mathbb{H}.$$

Dabei soll der Strich am Summenzeichen bedeuten, dass die Summe über alle Paare $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(m,n) \neq (0,0)$ zu erstrecken ist.

(2.1) Proposition
Zu jedem Kompaktum K in $\mathbb{H}$ gibt es positive Konstanten γ und δ mit

$$\gamma|mi+n| \leq |mz+n| \leq \delta|mi+n|$$

für alle $m,n \in \mathbb{R}$ und alle $z \in K$. ◇

Beweis
Für $m = n = 0$ ist dies klar.
Sei nun $(m,n) \neq (0,0)$, also ist zu zeigen:

$$\gamma|mi+n| \leq |mz+n| \leq \delta|mi+n| \Leftrightarrow \gamma \leq \left| \underbrace{\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}}_{=m'} z + \underbrace{\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}}_{=n'} \right| \leq \delta$$

mit $(m')^2 + (n')^2 = 1.$

O.B.d.A. ist zu beachten $|mi+n| = \sqrt{m^2+n^2} = 1$.
Sei $M := \{(m,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, m^2+n^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. M ist beschränkt.
Da $f : (m,n) \mapsto m^2+n^2$ stetig ist und außerdem ist $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, dann ist $f^{-1}(\{1\}) = M$ auch abgeschlossen.
Also ist M kompakt und damit $K \times M$ auch kompakt.
Da die Funktion $(z,m,n) \mapsto |mz+n|$ auf dem Kompaktum $K \times M$ stetig ist, nimmt sie ein Minimum γ und ein Maximum δ auf $K \times M$ an, und damit folgt die Behauptung. □

(2.2) Lemma (Konvergenz-Lemma)
Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ ist G_k absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent. Damit ist G_k eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. ◇

Beweis
Aus der Proposition(2.1) folgt, dass für ein $\gamma > 0$ und $z \in K \subseteq \mathbb{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m,n}{}^{'} (mz+n)^{-k} \right| &\leq \sum_{m,n}{}^{'} |(mz+n)|^{-k} \\
&\leq \sum_{m,n}{}^{'} (|\gamma(mi+n)|)^{-k} \\
&= \gamma^{-k} \sum_{m,n}{}^{'} \left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^{-k} \\
&= \gamma^{-k} \sum_{m,n}{}^{'} (m^2+n^2)^{-k/2}
\end{aligned}$$

Setze $E = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Es folgt, da $m^2+n^2 \geq |mn|$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n}{}^{'} (m^2+n^2)^{-k/2} &= \sum_{n\in E} (n^2)^{-k/2} + \sum_{m\in E} (m^2)^{-k/2} + \sum_{m\in E} \sum_{n\in E} (m^2+n^2)^{-k/2} \\
&= \sum_{n\in E} |n|^{-k} + \sum_{n\in E} |m|^{-k} + \sum_{m\in E} \sum_{n\in E} (m^2+n^2)^{-k/2} \\
&\leq 4\zeta(k) + \sum_{m\in E} \sum_{n\in E} |mn|^{-k/2} \\
&\leq 4\zeta(k) + \left(\sum_{m\in E} |m|^{-k/2} \right) \left(\sum_{n\in E} |n|^{-k/2} \right) \\
&\leq 4\zeta(k) + (2\zeta(k/2))(2\zeta(k/2)) \\
&\leq 4\zeta(k) + (4\zeta(k/2)^2) < \infty,
\end{aligned}$$

so folgt die absolute Konvergenz (mit Weierstraß-Majorantenkriterium) und damit die gleichmäßige Konvergenz auf K. Insbesonders ist G_k holomorph auf $\mathbb{H}$. □

(2.3) Lemma (Transformations-Lemma)
Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ und alle $\sigma \in \Gamma$ gilt $G_k|_k\sigma = G_k$, d.h.

$$G\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k \cdot G_k(z), \forall z \in \mathbb{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

$\diamond$

Beweis
Da σ invertierbar ist ($\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$), ist die Abbildung:
$\mathbb{Z}^{1\times 2} \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{Z}^{1\times 2} \setminus \{(0,0)\}$, $z \mapsto \sigma \cdot z$ bijektiv mit der Umkehrabbildung: $z \mapsto \sigma^{-1} \cdot z$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
G_k(\sigma z) &= {\sum_{m,n}}'(m\sigma z + n)^{-k} \\
&= {\sum_{m,n}}'(m\frac{az+b}{cz+d} + n)^{-k} \\
&= {\sum_{m,n}}'\left(\frac{m(az+b)+n(cz+d)}{cz+d}\right)^{-k} \\
&= {\sum_{m,n}}'(cz+d)^k(m(az+b)+n(cz+d))^{-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (cz+d)^k{\sum_{m,n}}'(m(az+b)+n(cz+d))^{-k} \\
&= (cz+d)^k{\sum_{m,n}}'((ma+nc)z+(bm+nd))^{-k} \\
&= (cz+d)^k{\sum_{m,n}}'(m'z+n')^{-k} \\
&= (cz+d)^k G_k(z)
\end{aligned}$$

mit $(m',n') = (m,n)\sigma = (m,n)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ma+nc, mb+nd)$. Da es sich um eine Umordnung der Reihe handelt, folgt dann die Konvergenz beider Reihen gegen den gleichen Wert. $\square$

Literatur

[1] A.Krieg, *Funktionenentheorie I*, Skript zur Vorlesung, 2009.

[2] A.Krieg, *Analysis II*, Skript zur Vorlesung, 2008.

[3] A.Deitmar, *Automorphe Formen*, Springer, Berlin, 2010.

[4] A.Krieg *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer, Berlin, 2007.