Die Gewichtsformel

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 07.11.2011

Stefan Bleß

Inhaltsverzeichnis

In diesem Vortrag betrachte ich zu Beginn die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihe und werde mich anschließend mit den modularen Funktionen und dem Fundamentalbereich aus den vorherigen Vorträgen beschäftigen. Dazu betrachte ich die Gewichtsformel, mit der man etwas über Null- und Polstellen einer modularen Funktion ausssagen kann, wenn das Gewicht dieser Funktion bekannt ist.

§1 Eisenstein-Reihen

In diesem Abschnitt beschäftige ich mich mit den Eisenstein-Reihen und deren Fourier-Entwicklung. Dazu benötige ich zunächst den Begriff der Eisenstein-Reihe aus [1] mit der

(1.1) Definition (Eisenstein-Reihe).
Für alle $z \in \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$ ist die Eisenstein-Reihe G_k definiert durch

$$G_k(z) := \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

◇

Eine bereits bekannte Funktion aus [0] ist gegeben mit der

(1.2) Definition (Riemannsche Zetafunktion).
Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist die Riemannsche Zetafunktion definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

◇

Ebenso aus [0] bekannt ist der

(1.3) Satz (Partialbruchzerlegung des Kotangens).
Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}\right).$$

◇

Es sind nun alle notwendigen Begriffe bekannt um die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihen zu bestimmen. Für ungerades $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$ ist $G_k \equiv 0$ und somit eine Modulform. Für gerades $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$ betrachte ich die Fourier-Entwicklung von G_k und werde zeigen, dass die Koeffizienten $a_n = 0$ für $n < 0$ sind. Dann folgt mit Vortrag [4], dass G_k auch für gerades $k \geq 4$ eine Modulform ist. Dazu benötige ich den

(1.4) Satz.
Für gerades $k \geq 4$ gilt für alle $z \in \mathbb{H}$

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2i\pi zn},$$

wobei die k-te Teilerpotenzsumme definiert ist durch

$$\sigma_k(n) := \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} d^k.$$

◇

Beweis:
Mit den Definitionen von Kotangens, Sinus und Cosinus gilt für alle $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
\pi\cot(\pi z) &= \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\frac{\frac{1}{2}(e^{i\pi z}+e^{-i\pi z})}{\frac{1}{2i}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})} = i\pi\frac{(e^{i\pi z}+e^{-i\pi z})e^{i\pi z}}{(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})e^{i\pi z}} = i\pi\frac{e^{2i\pi z}+1}{e^{2i\pi z}-1} \\
&= \frac{i\pi - i\pi e^{2i\pi z} - 2i\pi}{1-e^{2i\pi z}} = \frac{i\pi(1-e^{2i\pi z})-2i\pi}{1-e^{2i\pi z}} = i\pi - \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi z}}
\end{aligned}$$

Es ist $|e^{2i\pi z}| = e^{\mathrm{Re}(2i\pi z)} = e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)} < e^0 = 1$ für alle $z \in \mathbb{H}$, da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton ist. Daraus folgt nun mit der Geometrischen Reihe

$$\pi\cot(\pi z) = i\pi - 2i\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi zn}.$$

Somit folgt wegen $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ mit Satz (1.3) für alle $z \in \mathbb{H}$

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m}) = i\pi - 2i\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi zn}.$$

Wegen $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi \mathrm{Im}(z)}$ und der Monotonie der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ existiert auf einer geeigneten Umgebung um beliebiges $z \in \mathbb{H}$ ein $\mathrm{Im}(z) \geq y > 0$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e^{2i\pi zn}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi yn}.$$

Dabei ist $e^{-2\pi y} < 1$ und somit die Reihe über $(e^{-2\pi y})^n$ eine von z unabhängige lokal gleichmäßig konvergente Majorante. Über die Partialbruchzerlegung ist bereits aus [0] bekannt, dass diese lokal gleichmäßig konvergent ist und somit sind beide oben betrachteten Reihen lokal gleichmäßig konvergent. Dadurch können sie gliedweise differenziert werden und (k-1)-maliges Differenzieren dieser Gleichung nach z für $k \geq 2$ liefert

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{(z+m)^k} = -2i\pi \sum_{n=0}^{\infty} (2i\pi n)^{k-1} \cdot e^{2i\pi zn}$$

was wiederum äquivalent ist für gerades k zu

$$(*) \qquad \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot e^{2i\pi zn}.$$

Da k gerade ist liefert die Definition (1.1) für alle $z \in \mathbb{H}$

$$G_k(z) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(nz+m)^k} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^k} + 2\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m^k}.$$

Ferner folgt wegen Re(k) = $k \geq 4 > 1$, $(*)$ und der Definition (1.2) für alle $z \in \mathbb{H}$

$$G_k(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(nz+m)^k} + 2\zeta(k) = 2\zeta(k) + \frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j^{k-1}\cdot e^{2i\pi nzj}.$$

Es ist nun sinnvoll die Doppelsumme als Summe über $h := n \cdot j$ zu schreiben. Dann sind die Koeffizienten vor $e^{2i\pi zh}$ die Summen über genau die d^{k-1} mit $d \mid h$, also

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ d\mid h}} d^{k-1}\cdot e^{2i\pi zh} = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{h=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(h)e^{2i\pi zh}.$$

□

§2 Die Gewichtsformel

In diesem Abschnitt beschäftige ich mich mit der Gewichtsformel. Sie ermöglicht es, falls das Gewicht einer modularen Funktion bekannt sein sollte, mehr über die Null- und Polstellen dieser Funktion aussagen zu können. An dieser Stelle möchte ich nochmal an die Grundlagen aus den bisherigen Vorträgen [3] und [4] erinnern.

— *Die Grundlagen* —

Zunächst definiere ich an dieser Stelle für $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $z \in \mathbb{H}$

$$Mz := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dabei ist $cz + d \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und bereits aus Vortrag [3] bekannt, dass auch $Mz \in \mathbb{H}$ ist. Ferner sei $\widetilde{f}$ die bereits aus [4] bekannte von einer schwach modularen Funktion f induzierte Funktion, das heißt es gilt $f(z) = \widetilde{f}(e^{2\pi iz})$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und $\widetilde{f}(w) = f(\frac{\mathrm{Log}(w)}{2\pi i})$ für alle $w \in \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Damit kann ich an den Begriff der modularen Funktion aus [4] erinnern mit der

(2.1) Definition.
Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$ heißt modulare Funktion vom Gewicht k falls gilt:

1. $f(z) = f|_k(z) := (cz+d)^{-k} f(Mz)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ wo f definiert ist,
2. f ist meromorph in ∞, das heißt $\widetilde{f}$ besitzt in 0 höchstens einen Pol. $\diamond$

In Vortrag [4] haben wir auch einige Resultate aus dieser Definition kennen gelernt an die ich nun erinnern möchte mit der

(2.2) Bemerkung.
Aus Definition (2.1).2 folgen folgende Eigenschaften einer modularen Funktion:

1. Es existiert ein $T > 0$, so dass f in $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im}(z) > T\}$ keine Pole besitzt,
2. es existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, so dass die Fourier-Reihe zu f die folgende Form hat:

$$f(z) = \sum_{n=m_0}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}, a_{m_0} \neq 0.$$

Aus Vortrag [3] ist ein Repräsentantensystem für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ bekannt mit der

(2.3) Definition.
$\mathbb{F} := \{z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \text{ und } |z| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) < 0\}$ heißt exakter Fundamentalbereich und stellt ein Repräsentantensystem für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ dar. ◇

— *Ordnung einer modularen Funktion* —

Ein sehr wichtiger Begriff für die Gewichtsformel ist die aus [0] bekannte Ordnung einer Null- beziehungsweise Polstelle mit der

(2.4) Definition.
Für jedes $w \in \mathbb{H}$ existiert eine Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^k, a_n \neq 0.$$

Dann definiert man die Ordnung von w mit $\mathrm{ord}_w(f) := n$. Die Fourier-Reihe zu f hat die Form von Bemerkung (2.2).2. Dabei definiert man die Ordnung von ∞ mit $\mathrm{ord}_\infty(f) := m_0$. ◇

Diese Ordnung gibt Aufschluss darüber, ob bei w eine Null- beziehungsweise eine Polstelle vorliegt. Ist die Ordnung positiv, so ist w eine Nullstelle und ist die Ordnung negativ, so ist w eine Polstelle. Sonst ist $\mathrm{ord}_w(f) = 0$ und f ist in w holomorph.

Im Folgenden betrachte ich die Invarianz der Ordnung mit dem

(2.5) Satz.
Es sei $0 \neq f$ eine modulare Funktion, dann gilt $\mathrm{ord}_w(f) = \mathrm{ord}_{Mw}(f)$ für alle $w \in \mathbb{H}$ und $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. ◇

Beweis:
Es seien $t \in \mathbb{H}$ und $r := \mathrm{ord}_t(f)$. Nach Definition (2.4) und [0] existiert eine eindeutige Funktion g, die holomorph in t ist mit $g(t) \neq 0$ und $f(z) = (z-t)^r g(z)$ erfüllt. Einsetzen in Definition (2.1).1 liefert somit für $w := M^{-1}t$

$$\begin{aligned} f(z) &= (cz+d)^{-k} f(Mz) = (cz+d)^{-k}(Mz-t)^r g(Mz) \\ &= (cz+d)^{-k}(Mz-Mw)^r g(Mz). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$Mz - Mw = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+d}{cw+d} = \frac{(z-w)(ad-bc)}{(cz+d)(cw+d)}.$$

Dabei ist $ad - bc = 1$, da $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, und es folgt wiederum

$$f(z) = (z-w)^r (cz+d)^{-k-r} (cw+d)^{-r} g(Mz).$$

Es sei $h(z) := (cz+d)^{-k-r}(cw+d)^{-r}g(Mz)$. Es ist $g(Mw) = g(t) \neq 0$ und somit h als Produkt holomorpher Funktionen in w holomorph. Ferner ist $h(w) \neq 0$, da auch $cw + d \neq 0$ ist. Wegen der Darstellung $f(z) = (z-w)^r h(z)$ folgt nun mit [0], dass $\mathrm{ord}_w(f) = r$ ist. Weiterhin ist $Mw = t$, also auch insbesondere

$$\mathrm{ord}_{Mw}(f) = \mathrm{ord}_t(f) = r = \mathrm{ord}_w(f).$$

□

— *Hilfsaussagen* —

Bevor ich zu der Gewichtsformel und ihrem Beweis komme, benötige ich zunächst einige Hilfsaussagen, die später den Beweis erleichtern. Zuvor lege ich aber folgende Notation fest: Für eine modulare Funktion $0 \neq f$ sei die logarithmische Differentiation F definiert durch $F := \frac{f'}{f}$.

Zwischen der im vorherigen Abschnitt kennengelernten Ordnung von f und den Residuen von F gibt es einen Zusammenhang, den ich nun näher erläutern möchte mit dem

(2.6) Satz.
Es sei $0 \neq f$ eine modulare Funktion. Dann gilt $\mathrm{Res}_w(F) = \mathrm{ord}_w(f)$ für alle $w \in \mathbb{H}$.

◇

Beweis:
Es seien $w \in \mathbb{H}$ und $r := \mathrm{ord}_w(f)$. Dann existiert nach [0] eine eindeutige Funktion g, die holomorph in w ist und $g(w) \neq 0$ sowie $f(z) = (z-w)^r g(z)$ erfüllt. Dieser Ausdruck ist differenzierbar mit

$$f'(z) = r(z-w)^{r-1}g(z) + (z-w)^r g'(z).$$

Somit ist nun

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{r(z-w)^{r-1}g(z)}{(z-w)^r g(z)} + \frac{(z-w)^r g'(z)}{(z-w)^r g(z)} = \frac{r}{z-w} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da g in w holomorph ist, ist auch g' in w holomorph und wegen $g(w) \neq 0$ insbesondere auch $\frac{g'}{g}$. Daraus folgt $\mathrm{Res}_w(\frac{g'}{g}) = 0$ und mit der Linearität des Residuums

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_w(F) &= \mathrm{Res}_w(\tfrac{r}{z-w}) + \mathrm{Res}_w(\tfrac{g'}{g}) = \mathrm{Res}_w(\tfrac{r}{z-w}) \\ &= \lim_{z\to w}[(z-w)\cdot \tfrac{r}{z-w}] = r = \mathrm{ord}_w(f),\end{aligned}$$

da bei w für $\frac{r}{z-w}$ ein einfacher Pol vorliegt. □

Als nächstes betrachte ich die Fourier-Reihe für F mit dem

(2.7) Satz.
Es sei $0 \neq f$ eine modulare Funktion. Dann hat die Fourier-Reihe von F für alle $z \in \mathbb{H}$ mit hinreichend großem Imaginärteil die Form

$$F(z) = 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi i m z}.$$

◇

Beweis:
f besitzt wie in Bemerkung (2.2).2 die Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m e^{2\pi i m z}.$$

Diese konvergiert lokal gleichmäßig und lässt sich so gliedweise differenzieren:

$$f'(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} 2\pi i m b_m e^{2\pi i m z}.$$

Aus Bemerkung (2.2).1 ist bekannt, dass f für hinreichend großen Imaginärteil keine Pole besitzt. Dies trifft auch auf die Nullstellen von f zu, da sich sonst bei $\widetilde{f}$ bei 0 die Nullstellen häufen und damit nach dem Identitätssatz $\widetilde{f}$ die Nullfunktion sein müsste. Somit ist F für hinreichend großen Imaginärteil holomorph. Aus Vortrag [4] ist bekannt, dass die modulare Funktion f eins-periodisch ist, das heißt es gilt $f(z) = f(z+1)$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Daraus folgt sofort, dass auch $f'(z) = f'(z+1)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und somit F eins-periodisch ist. Somit hat F nach [0] eine eindeutige Fourier-Entwicklung der Form

$$F(z) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m e^{2\pi i m z}.$$

Ich werde später per Koeffizientenvergleich die Form der Fourier-Reihe aus der Behauptung beweisen. Da $F = \frac{f'}{f}$ äquivalent ist zu $F \cdot f = f'$ betrachte ich im Folgenden die zweite Gleichung, da sich dort das Cauchy-Produkt aus [0] anwenden lässt.

$$\begin{aligned}
F(z) \cdot f(z) &= \sum_{m=n}^{\infty} a_m e^{2\pi imz} \cdot \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m e^{2\pi imz} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n} e^{2\pi i(m+n)z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_{m+m_0} e^{2\pi i(m+m_0)z} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (a_{k+n} e^{2\pi i(k+n)z} \cdot b_{m-k+m_0} e^{2\pi i(m-k+m_0)z}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{m} a_{k+n} b_{m-k+m_0}) e^{2\pi i(m+n+m_0)z} \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{m=m_0}^{\infty} 2\pi imb_m e^{2\pi imz} = f'(z).
\end{aligned}$$

Vergleicht man nun die beiden Reihen, so beginnt die eine Reihe bei m_0 und die andere bei $m_0 + n$. Da die Fourier-Reihe eindeutig ist, folgt, dass $n = 0$ sein muss. Ferner liefert der Koeffizientenvergleich des ersten Summanden $a_0 b_{m_0} = 2\pi i m_0 b_{m_0}$, also $a_0 = 2\pi i m_0 = 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty(f)$ und es folgt für die Fourier-Reihe

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi imz} = 2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi imz}.$$

□

Ich werde nun ein wichtiges Hilfsmittel für die Berechnung von Wegintegralen herleiten mit dem

(2.8) Satz.
Es sei $0 \neq f$ eine modulare Funktion. Dann gilt

$$F(Mz) \cdot \frac{dMz}{dz} = \frac{kc}{cz+d} + F(z).$$

◇

Beweis:
Nach (2.1).1 gilt $f(Mz) = (cz+d)^k f(z)$. Die rechte Seite der Gleichung lässt sich nach z differenzieren und so erhält man

$$\frac{d}{dz}(f(Mz)) = ck(cz+d)^{k-1} f(z) + (cz+d)^k f'(z).$$

Laut Kettenregel ist gerade $\frac{d}{dz}(f(Mz)) = f'(Mz) \cdot \frac{dMz}{dz}$ und es ergibt sich somit

$$F(Mz) \cdot \frac{dMz}{dz} = \frac{f'(Mz)}{f(Mz)} \cdot \frac{dMz}{dz} = \frac{ck(cz+d)^{k-1}f(z)}{(cz+d)^k f(z)} + \frac{(cz+d)^k f'(z)}{(cz+d)^k f(z)} = \frac{kc}{cz+d} + F(z). \qquad \square$$

Im Folgenden betrachte ich einige Resultate zu Kreisbögen und beginne mit dem

(2.9) Satz.
Es sei γ ein Kreisbogen, das heißt es ist γ eine Funktion der Form

$$\gamma : [\phi, \psi) \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + \varepsilon e^{it} \text{ mit } 0 \leq \phi < \psi \leq 2\pi$$

und z_0 als Mittelpunkt sowie ε als Radius. Ferner sei f stetig auf $\overline{K_\varepsilon(z_0)}$. Dann ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\int_\gamma f(z)\, dz) = 0.$$

$\diamond$

Beweis:
Es sei r der Ausgangsradius von γ. Die Spur von γ ist kompakt und somit existieren die Maxima $K(\varepsilon) := \max\{|f(z)|, z \in \mathrm{Sp}(\gamma)\}$ und $K := \max\{|f(z)|, z \in \overline{K_r(z_0)}\}$.
Da die Spur von γ in $\overline{K_r(z_0)}$ enthalten ist gilt stets $K(\varepsilon) \leq K$.

Es bezeichne $\mathrm{L}(\gamma)$ die Länge von γ. Dann gilt nach [0]

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_\phi^\psi |\gamma'(t)|\, dt = \int_\phi^\psi |\varepsilon i e^{it}|\, dt = \int_\phi^\psi |\varepsilon i \cos(t) - \varepsilon \sin(t)|\, dt$$

$$= \int_\phi^\psi \sqrt{\varepsilon^2 \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t))}\, dt = \int_\phi^\psi \varepsilon\, dt = \varepsilon \cdot (\psi - \phi).$$

Ein Resultat aus [0] liefert nun

$$| \int_\gamma f(z)\, dz \,| \leq \mathrm{L}(\gamma) \cdot K = \varepsilon \cdot K \cdot (\psi - \phi).$$

Somit ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} | \int_\gamma f(z)\, dz \,| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} [\varepsilon \cdot K \cdot (\psi - \phi)] = 0$$

und es folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma} f(z) \, dz \Big) = 0.$$

Die Grenzwertbetrachtung $\varepsilon \to 0$ lässt sich hier ohne Einschränkung anwenden, da f auf $\overline{K_{\varepsilon}(z_0)}$ stetig ist. □

Damit folgt nun das

(2.10) Korollar.
Es seien γ ein Kreisbogen wie in Satz (2.9) mit geeignetem Radius ε sowie Mittelpunkt $w \in \mathbb{H}$ und $0 \neq f$ eine modulare Funktion. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma} F(z) \, dz \Big) = \mathrm{ord}_w(f) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma} \frac{1}{z-w} \, dz \Big).$$

◇

Beweis:
Aus dem Beweis von Satz (2.6) ist bereits bekannt:

$$F(z) = \frac{\mathrm{ord}_w(f)}{z-w} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Dabei ist $\frac{g'}{g}$ holomorph in w und damit insbesondere auf einer Umgebung um w komplex differenzierbar. Somit existiert ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$, so dass $\frac{g'}{g}$ auf $\overline{K_{\widetilde{\varepsilon}}(w)}$ stetig ist. Ist $\varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}$, so folgt nun mit Satz (2.9)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} \, dz \Big) = 0.$$

Weiterhin folgt mit der Linearität des Integrals

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma} F(z) \, dz \Big) = \mathrm{ord}_w(f) \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_{\gamma} \frac{1}{z-w} \, dz \Big).$$

□

— Die Gewichtsformel —

Nun habe ich alle nötigen Grundlagen und Hilfsaussagen für den Beweis der Gewichtsformel beisammen und betrachte diese mit dem

(2.11) Satz (Gewichtsformel).
Es sei $0 \neq f$ eine modulare Funktion vom Gewickt k. Dann gilt

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{z \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \frac{1}{e_z} \cdot \mathrm{ord}_z(f) = \frac{k}{12},$$

wobei e_z definiert ist als

$$e_z := \begin{cases} 2 & , z \equiv i \bmod(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}) \\ 3 & , z \equiv e^{\pi i/3} \bmod(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}) \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

$\diamond$

Beweis:
Aus der Definition (2.3) ist der exakte Fundamentalbereich $\mathbb{F}$ bekannt. Ich betrachte im Folgenden den Weg γ, der eine Abwandlung des Randes von $\mathbb{F}$ darstellt:

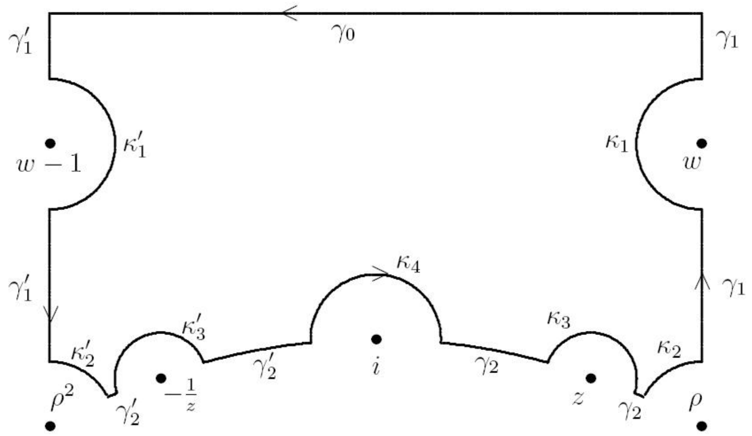

Abbildung 1: Der Integrationsweg γ aus [2]

Auf diesem Rand liegen die Punkte $\rho := e^{\pi i/3}$, ρ^2, i sowie Null- und Polstellen der modularen Funktion f. Diese Null- und Polstellen werden in Abbilung 1 repräsentiert durch z und w, wobei $|z| = 1$ und $|\mathrm{Re}(w)| = \frac{1}{2}$ gilt. An allen diesen Punkten ersetze ich den Rand von $\mathbb{F}$ durch Kreise in das Innere von $\mathbb{F}$ mit dem Radius ε, so dass im Vollkreis bis auf den Mittelpunkt keine Null- oder Polstellen von f liegen.

Dies ist möglich, da f auf $\mathbb{H}$ meromorph ist. Für die einzelnen Teilstücke von γ verwende ich im weiteren Verlauf die Bezeichnungen aus Abbildung 1.

Laut Bemerkung (2.2).1 und dem Beweis zu Satz (2.7) existiert ein $T > 0$, so dass f in $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im}(z) \geq T\}$ weder Pol- noch Nullstellen besitzt. Somit lässt sich γ_0 aus Abbildung 1 so wählen, dass alle Residuen von F in $\mathring{\mathbb{F}}$ die Umlaufzahl 1 haben. Nach dem Cauchyschen Integralsatz aus [0] haben dann alle Residuen von F in $\mathbb{H} \setminus \overline{\mathbb{F}}$ die Umlaufzahl 0 und es folgt mit dem Residuensatz sowie Satz (2.6)

$$2\pi i \cdot \sum_{w \in \mathring{\mathbb{F}}} \mathrm{ord}_w(f) = \int_\gamma F(z)\, dz.$$

Da die linke Seite nicht von der Wahl von ε abhängt, kann ich ohne Einschränkung die Grenzwertbetrachtung $\varepsilon \to 0$ für die rechte Seite betrachten.

Ich werde nun das Integral der rechten Seite berechnen und betrachte dazu die einzelnen Teilstücke von γ:

Der Weg γ_0

γ_0 ist ein Weg mit der Vorschrift $\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{H}, t \mapsto \frac{1}{2} - t + hi$ und der Ableitung $\gamma_0'(t) = -1$, wobei h die "Höhe", also den Imaginärteil, von γ_0 beschreibt.

Wegen der Linearität des Integrals und der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Fourier-Reihe gilt nach Satz (2.7)

$$\int_{\gamma_0} F(z)\, dz = \int_{\gamma_0} 2\pi i \mathrm{ord}_\infty(f)\, dz + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\gamma_0} a_m e^{2\pi i m z}\, dz.$$

Mit der Vorschrift von γ_0 folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_0} F(z)\, dz &= -\int_0^1 2\pi i \mathrm{ord}_\infty(f)\, dz - \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 a_m e^{2\pi i m(\frac{1}{2} - z + hi)}\, dz \\
&= -2\pi i \mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2\pi i m} \cdot \left[e^{2\pi i m(-\frac{1}{2} + hi)} - e^{2\pi i m(\frac{1}{2} + hi)}\right] \\
&= -2\pi i \mathrm{ord}_\infty(f) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2\pi i m} \cdot e^{-2\pi m h} \cdot (e^{\pi i m} - e^{-\pi i m}).
\end{aligned}$$

Aus der Analysis ist $\sin(z) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz})$ für alle $z \in \mathbb{H}$ bekannt und es folgt

$$\int_{\gamma_0} F(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{ord}_\infty(f) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\pi m} \cdot e^{-2\pi m h} \cdot \sin(\pi m).$$

Nun ist $\sin(\pi m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und es folgt

$$\int_{\gamma_0} F(z)\, dz = -2\pi i \operatorname{ord}_\infty(f).$$

<u>*Die Wege γ_1 und γ_1'*</u>

Ich definiere an dieser Stelle die Matrizen J und $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Tz = z + 1$ und $Jz = -\frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{H}$.

Mit der Quotientenregel erhält man

$$\frac{dMz}{dz} = \frac{a \cdot (cz + d) - c \cdot (az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Somit folgt erneut mit Satz (2.8) und der Matrix T: $F(z) = F(z + 1)$ für alle $z \in \mathbb{H}$.

Der Weg ϕ sei allgemein definiert durch $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ mit α und $\beta \in \mathbb{R}$, der keinen Pol von F trifft. Dann ist $(T\phi) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, t \mapsto \phi(t) + 1$ mit der Ableitung $(T\phi)'(t) = \phi'(t)$. Nun folgt

$$\begin{aligned} \int_{\phi} F(z)\, dz &= \int_{\alpha}^{\beta} F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(\phi(t) + 1) \cdot \phi'(t)\, dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F((T\phi)(t)) \cdot (T\phi)'(t)\, dt = \int_{T\phi} F(z)\, dz. \end{aligned}$$

Es ist $T\gamma_1 = -\gamma_1'$ und somit

$$\int_{\gamma_1} F(z)\, dz + \int_{\gamma_1'} F(z)\, dz = -\int_{\gamma_1'} F(z)\, dz + \int_{\gamma_1'} F(z)\, dz = 0.$$

Die Wege γ_2 und γ_2'

Nach Satz (2.8) gilt $F(Jz) \cdot \frac{dJz}{dz} = \frac{k}{z} + F(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Ferner sei ϕ ein Weg der Form $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}$ mit α und $\beta \in \mathbb{R}$, der keinen Pol von F trifft. Dann ist $(J\phi) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, t \mapsto -\frac{1}{\phi(t)}$ mit der Ableitung $(J\phi)'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)}$. Es folgt somit

$$\begin{aligned}\int_{J\phi} F(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta F((J\phi)(t)) \cdot (J\phi)'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F(-\frac{1}{\phi(t)}) \cdot \frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)}\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta F(J\phi(t)) \cdot \phi'(t) \cdot \frac{d(J\phi(t))}{d\phi(t)}\,dt = \int_\phi F(Jz) \cdot \frac{dJz}{dz}\,dz \\ &= k \cdot \int_\phi \frac{1}{z}\,dz + \int_\phi F(z)\,dz.\end{aligned}$$

Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{H}$ als Stammfunktion den Hauptzweig des Logarithmus. Die Spur von γ_2 liegt in $\mathbb{H}$ und somit gilt nach [0]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \mathrm{Log}(e^{\pi i/3}) - \mathrm{Log}(i) = \frac{1}{3}i\pi - \frac{1}{2}i\pi = -\frac{1}{6}i\pi$$

und es folgt wegen $\gamma_2' = -(J\gamma_2)$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{\gamma_2'} F(z)\,dz + \int_{\gamma_2} F(z)\,dz\Big) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-\int_{J\gamma_2} F(z)\,dz + \int_{\gamma_2} F(z)\,dz\Big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(-k\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz - \int_{\gamma_2} F(z)\,dz + \int_{\gamma_2} F(z)\,dz\Big) \\ &= -k \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{6}ki\pi.\end{aligned}$$

<u>*Die Wege κ_1 und κ_1'*</u>

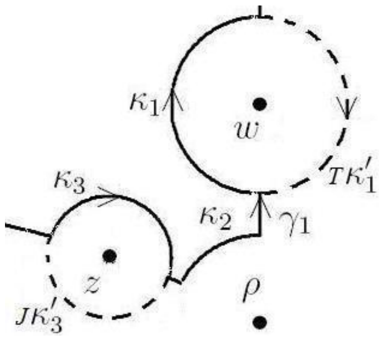

Abbildung 2: Zusammensetzen der Kreise

Analog zum Weg γ_1 gilt

$$\int_{\kappa_1'} F(z)\ dz = \int_{T\kappa_1'} F(z)\ dz.$$

Der Anfangspunkt von $T\kappa_1'$ und der Endpunkt von κ_1 sowie der Anfangspunkt von κ_1 und der Endpunkt von $T\kappa_1'$ stimmen überein, das heißt diese beiden Wege lassen sich zu einem geschlossenen Weg vereinen. Dieser entspricht gerade dem negativ orientierten Kreis um den Punkt w mit Radius ε, wie man der Abbildung 2 entnehmen kann. Somit gilt

$$\int_{\kappa_1} F(z)\ dz + \int_{\kappa_1'} F(z)\ dz = \int_{\kappa_1} F(z)\ dz + \int_{T\kappa_1'} F(z)\ dz = -\int_{\partial K_\varepsilon(w)} F(z)\ dz.$$

Nach Voraussetzung ist F auf dem Vollkreis bis auf den Mittelpunkt holomorph und da der Kreis nullhomolog ist folgt mit dem Residuensatz und Satz (2.6)

$$\int_{\kappa_1} F(z)\ dz + \int_{\kappa_1'} F(z)\ dz = -2\pi i \mathrm{Res}_w(F) = -2\pi i \mathrm{ord}_w(f).$$

Die Wege κ_2 und κ_2'

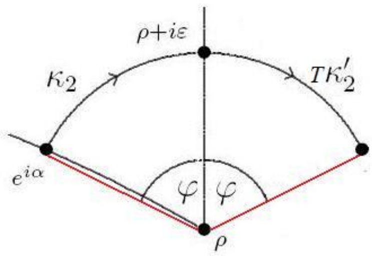

Abbildung 3: $T\kappa_2'$ als Spiegelung von κ_2

Ich verwende im weiteren Verlauf die Bezeichnungen aus Abbildung 3. Hierbei bezeichne $e^{i\alpha}$ den Schnittpunkt von κ_2 mit dem Einheitskreis, wobei $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gilt.

Wie bereits bei γ_1 gezeigt sind die Integrale über κ_2' und $T\kappa_2'$ gleich. Es ist $T\kappa_2'$ eine Spiegelung von κ_2 an der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$, wie man auch der Abbildung 3 entnehmen kann. Somit kann ich diese beiden Wege zusammenfassen zu einem Kreisbogen mit dem Winkel 2φ. Dieser Kreisbogen hat die Vorschrift

$$\psi : [\frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi] \to \mathbb{H}, t \mapsto \rho + \varepsilon \cdot e^{-it+\pi i}.$$

Es folgt mit Korollar (2.10), da man ohne Einschränkung ε passend wählen kann:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}(\int\limits_{\kappa_2} F(z)\, dz + \int\limits_{\kappa_2'} F(z)\, dz) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\psi} F(z)\, dz &= \mathrm{ord}_\rho(f) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\psi} \frac{1}{z-\rho}\, dz \\
&= \mathrm{ord}_\rho(f) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} \frac{-i\varepsilon \cdot e^{-it+\pi i}}{\rho + \varepsilon \cdot e^{-it+\pi i} - \rho}\, dt \\
&= -i\mathrm{ord}_\rho(f) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} 1\, dt \\
&= -2i\mathrm{ord}_\rho(f) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi.
\end{aligned}$$

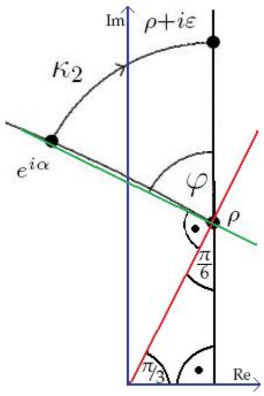

Abbildung 4: Der Winkel φ

Beim Grenzwert $\varepsilon \to 0$ entspricht die grüne Gerade aus Abbildung 4, die die Punkte $e^{i\alpha}$ und ρ verbindet, einer Tangente am Punkt ρ. Die rote Gerade, die ρ und den Ursprung verbindet, hat mit der Realteil-Achse nach Definition von ρ den Winkel $\frac{\pi}{3}$. In Abbildung 4 kann man nun leicht durch den Winkelsummensatz des Dreiecks erkennen, dass der untere Winkel zwischen der grünen Geraden und der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$ $\frac{2\pi}{3}$ beträgt. Da aber $\varphi + \frac{2\pi}{3} = \pi$ sein muss, folgt nun $\varphi = \frac{\pi}{3}$ und

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\Big(\int\limits_{\kappa_2} F(z)\, dz + \int\limits_{\kappa_2'} F(z)\, dz\Big) = -\frac{2}{3}\pi i \operatorname{ord}_\rho(f).$$

<u>*Die Wege κ_3 und κ_3'*</u>

Analog zu γ_2 gilt

$$\int\limits_{J\kappa_3'} F(z)\, dz = k \cdot \int\limits_{\kappa_3'} \frac{1}{z}\, dz + \int\limits_{\kappa_3'} F(z)\, dz.$$

Hierbei ist $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{H}$ stetig und da κ_3' in $\mathbb{H}$ verläuft folgt mit Satz (2.9)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\kappa_3'} \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

Analog zu κ_1 kann man nun κ_3 und $J\kappa_3'$ zu einem negativ orientierten Kreis um z mit Radius ε zusammenfassen, da auch hier die Anfangs- und Endpunkte entsprechend gleich sind. Zur Veranschaulichung dient auch hier die Abbildung 2. Nach Voraussetzung ist F auf diesem Kreis bis auf den Mittelpunkt holomorph und es folgt mit dem Residuensatz sowie Satz (2.6)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int\limits_{\kappa_3} F(z)\ dz + \int\limits_{\kappa_3'} F(z)\ dz\Big) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial K_\varepsilon(z)} F(z)\ dz = -2\pi i \mathrm{ord}_z(f).$$

<u>*Der Weg κ_4*</u>

Der Weg κ_4 lässt sich parametrisieren durch $\psi : [\varphi, \pi - \varphi] \to \mathbb{H}, t \mapsto i + \varepsilon \cdot e^{-it+\pi i}$ und entspricht bei der Grenzwertbetrachtung $\varepsilon \to 0$ einem negativ orientierten oberen Halbkreis mit Mittelpunkt i, das heißt es gilt $\varphi \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

Da ε ohne Einschränkung passend gewählt werden kann, folgt mit Korollar (2.10) analog zum Weg κ_2

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_4} F(z)\ dz &= \mathrm{ord}_i(f)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_4}\frac{1}{z-i}\ dz = \mathrm{ord}_i(f)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\psi}\frac{1}{z-i}\ dz\\ &= \mathrm{ord}_i(f)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varphi}^{\pi-\varphi} -i\ dz = -\pi i\mathrm{ord}_i(f) + 2i\mathrm{ord}_i(f)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi\\ &= -\pi i\mathrm{ord}_i(f)\end{aligned}$$

Damit sind nun alle Teilstücke von γ berechnet.

Die Polstellen von f können sich in $\mathbb{F}$ nicht häufen, da f auf $\mathbb{F}$ meromorph ist. Dies trifft auch auf die Nullstellen von f zu, da sonst f nach dem Identitätssatz die Nullfunktion wäre. Ferner ist bereits bekannt, dass alle Null- und Polstellen von f in $\mathbb{F}$ in einem Kompaktum enthalten sind (siehe dazu Wahl von γ_0). Es folgt nun, dass f in $\mathbb{F}$ nur endlich viele Null- und Polstellen haben kann. Weiterhin ist f für alle noch nicht betrachteten $x \in (\mathbb{F} \cap \overline{\mathbb{F}})$ holomorph und somit $\mathrm{ord}_x(f) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}2\pi i\cdot\sum_{w\in\mathring{\mathbb{F}}}\mathrm{ord}_w(f) &= \int\limits_{\gamma} F(z)\ dz\\ &= -2\pi i\mathrm{ord}_\infty(f) + \tfrac{1}{6}ki\pi - \tfrac{2}{3}\pi i\mathrm{ord}_\rho(f)\\ &\quad -2\pi i\mathrm{ord}_z(f) - \pi i\mathrm{ord}_i(f) - 2\pi i\mathrm{ord}_w(f)\end{aligned}$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{z\in\mathbb{F}}\frac{1}{e_z}\cdot\mathrm{ord}_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Aus der Definition (2.3) ist bekannt, dass der Fundamentalbereich ein Repräsentantensystem für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ ist. Dadurch lässt sich das obige Resultat mit Satz (2.5) auch folgenderweise schreiben:

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{z\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \frac{1}{e_z}\cdot \mathrm{ord}_z(f) = \frac{k}{12}.$$

□

§ 3 Literaturverzeichnis

[0] A. Krieg: Funktionentheorie I, Skript zur Vorlesung, 2010

[1] A. Deitmar: Automorphe Formen, 1. Aufl., Springer 2010

[2] M. Koecher, A.Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Aufl., Springer 2007

[3] Vortrag "Die Modulgruppe" von Arthur Dick

[4] Vortrag "Modulformen, Fourierentwicklung" von Amal Dajour