Der Vektorraum der Modulformen festen Gewichts und die j-Funktion

Ausarbeitung zum Vortrag im Seminar zur Funktionentheorie im WS 2011/2012

bei Herrn Prof. Dr. A. Krieg,
Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen,

Michael H. Mertens,
Matrikelnummer 289246

12. November 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung basiert hauptsächlich auf dem zweiten Kapitel des Buches *Automorphe Formen* ([Deit10]) von A. DEITMAR[1], sowie Auszügen aus dem Buch *Elliptische Funktionen und Modulformen* ([KK07]) von M. KOECHER[2] und A. KRIEG[3] und beschäftigt sich mit dem Vektorraum der Modulformen festen Gewichts. Hierzu werden unter anderem Basen dieser Vektorräume angegeben und allgemeine Dimensionsformeln bewiesen. Als kleine Anwendung der Resultate wird die HURWITZ[4]-Identität für Teilerpotenzsummen bewiesen.
Desweiteren wird die j-Funktion eingeführt und es werden einige elementare Eigenschaften dieser Funktion, die auch als absolute Invariante bezeichnet wird, bewiesen.
Die Ausarbeitung gliedert sich wie folgt: Abschnitt 1 stellt die grundlegenden Konzepte, die für die Ausarbeitung notwendig sind, zusammen, die zum großen Teil aus den vorangegangenen Vorträgen sowie der Vorlesung Funktionentheorie I bekannt sind. In den folgenden Abschnitten 2 und 3 werden die erwähnten Resultate über Modulformen und die j-Funktion dargestellt.

[1] ANTON DEITMAR, geboren 1960
[2] MAX KOECHER, 1924-1990
[3] ALOYS KRIEG, geboren 1955
[4] ADOLF HURWITZ, 1859-1919

1 Grundlagen

Dieser Abschnitt ist im Wesentlichen der Zusammenfassung der vorher im Seminar und der Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2010/2011 vorgestellten Resultate und Begriffsarten gewidmet, so das hier weitgehend auf nähere Erklärungen sowie Beweise verzichtet wird. Diese finden sich entweder in der angegebenen Literatur oder im Skript zur Vorlesung, [Kr09]. Zunächst zur

Notation Es bezeichne für die gesamte Ausarbeitung

$$\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det(\gamma) = 1 \right\} \tag{1}$$

die *spezielle lineare Gruppe* von $\mathbb{Z}$, die auch die *Modulgruppe* genannt wird. Weiterhin seien

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \tag{2}$$

die obere Halbebene,

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \tag{3}$$

die offene Einheitskreisscheibe und

$$\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\} \tag{4}$$

die punktierte Einheitskreisscheibe.
Mit

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{5}$$

bezeichnen wir die RIEMANNsche[5] Zahlenkugel.

1.1 Meromorphe Funktionen und LAURENT-Reihen

Es sei hier an die folgende aus der Funktionentheorie bekannte Definition erinnert:

Definition 1.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, also eine offene, wegweise zusammenhängende Menge. Eine Funktion $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt* ***meromorph*** *auf G, falls es eine diskrete Menge $P_f \subseteq G$ gibt, so dass f auf $G \setminus P_f$ holomorph ist und in $z_0 \in P_f$ keine* ***wesentliche Singularität*** *besitzt, d.h. f ist entweder in z_0 holomorph fortsetzbar. Dann heißt z_0 eine* ***hebbare Singularität*** *von f. Oder es gilt*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0.$$

[5] GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN, 1826-1866

In diesem Fall heißt z_0 eine ***Polstelle*** *von f und wir setzen $f(z_0) := \infty$.*

Es gilt hierzu der

Satz 1.2. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann gilt:*

1. *Es existiert zu jedem $z_0 \in G$ eine punktierte Umgebung $U \subseteq G$, auf der eine konvergente* LAURENT[6]*-Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n := \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

für alle $z \in U \setminus \{z_0\}, a_n \in \mathbb{C}$ mit endlichem Hauptteil existiert, d.h. für ein $N \in \mathbb{N}_0$ ist

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{a\}.$$

2. *Die Funktion f besitzt in $z_0 \in G$ genau dann eine hebbare Singularität, wenn der Hauptteil der* LAURENT*-Entwicklung von f um z_0 verschwindet, d.h. ist*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

so ist $a_n = 0$ für $n < 0$.

3. *Die Funktion f besitzt in $z_0 \in G$ einen Pol genau dann, wenn*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{a\}$$

für eine Umgebung $U \subseteq G$ von z_0 und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_{-N} \neq 0$. Diese Zahl heißt dann die ***Ordnung*** *der Polstelle z_0.*

BEWEIS. Vergleiche [FL94, Kapitel VI, Satz 2.3]. □

[6] PIERRE ALPHONSE LAURENT, 1813-1854

1.2 Modulformen

Hier eine wichtige Bemerkung, die im Folgenden wesentlich für die Einführung des Begriffs der Modulform sein wird.

Bemerkung 1.3. *1. Die Modulgruppe Γ operiert von links auf $\mathbb{H}$ vermöge*

$$(\gamma, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Der exakte Fundamentalbereich der Operation ist gegeben durch

$$\mathbb{F} := \{z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2},\ |z| \geq 1,\ \textit{und}\ |z| > 1\ \textit{für}\ -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 0\}.$$

2. Die Modulgruppe Γ operiert von rechts auf dem Raum der Funktionen $f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}}$ vermöge

$$(f, \gamma) \mapsto f|_k\gamma := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),$$

wobei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ und $k \in \mathbb{Z}$. Wenn k sich aus dem Zusammenhang ergibt, wird es in der Notation weggelassen,

$$f|_k\gamma = f|\gamma.$$

Beweis. ad 1.: Vergleiche [Deit10, Satz 2.1.7]
ad 2.: Vergleiche [Deit10, Lemma 2.2.2] □

Definition 1.4. *Sei $f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $k \in \mathbb{Z}$.*

*1. f heißt **schwach modular vom Gewicht** k, wenn f invariant unter der Operation von Γ im Sinne von 1.3 ist, falls also für alle $z \in \mathbb{H} \setminus P_f$ und $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

gilt.

2. *Sei f eine schwach modulare Funktion vom Gewicht k mit der Eigenschaft, dass die von f induzierte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{D}^* \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(z) = \tilde{f}(e^{2\pi iz})$ meromorph auf $\mathbb{D}$ fortgesetzt werden kann, sich also die Pole von $\tilde{f}$ nicht in 0 häufen. Dann heißt f eine* ***modulare Funktion vom Gewicht*** *k. In diesem Fall bezeichnet man f auch als* ***meromorph in*** *∞. Im Falle $k = 0$ nennt man f eine* ***Modulfunktion****.*

Unter Verwendung von 1.2 sieht man sofort aus der Defintion, dass folgendes gilt:

Lemma 1.5. *Sei $f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine modulare Funktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

1. *Ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$.*
2. *Es gibt ein $T > 0$, so dass f keine Pole in $\mathbb{H}+iT := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z > T\}$ hat.*
3. *Für jedes $z \in \mathbb{H} + iT$ ist*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi inz} \tag{6}$$

für ein $N \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{C}$. Man nennt 6 auch die FOURIER[7]*-Entwicklung von f.*

BEWEIS. ad 1.: Da f modular ist, ist f invariant unter der Operation von Γ, insbesondere ist daher

$$f(z) = f|_k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (z) = (-1)^k f(z) = -f(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{H}$, also folgt $f(z) = 0$ für $z \in \mathbb{H}$.
ad 2.: Angenommen, ein solches T gäbe es nicht. Dann gibt es eine injektive Folge $(z_n)_n$ von Polstellen von f, so dass $\operatorname{Im} z_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Dann gilt aber

$$e^{2\pi iz_n} = e^{2\pi i \operatorname{Re} z_n} \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im} z_n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Wegen $f(z) = \tilde{f}(e^{2\pi iz})$ bedeutet das aber, dass sich die Pole von $\tilde{f}$ in 0 häufen. Dann besitzt aber $\tilde{f}$ in 0 eine wesentliche Singularität und f kann nicht modular gewesen sein, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

[7] JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER, 1768-1830

ad 3.: Da f eine modulare Funktion ist, ist $\tilde{f}$ nach Definition meromorph in 0, besitzt also eine Laurent-Entwicklung

$$\tilde{f}(w) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n w^n,$$

die auf einer punktierten Umgebung von 0 konvergiert. Außerdem gilt

$$\tilde{f}(w) = f\left(\frac{\log w}{2\pi i}\right),$$

wobei log hier einen beliebigen Zweig des holomorphen Logarithmus bezeichnet, der in einer Umgebung von w definiert ist (vgl. hierzu [Deit10, S. 22]). Dann ist aber

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

für jedes $z \in \mathbb{H} + iT$ mit T aus 2.. □

Dies führt nun zur

Definition 1.6. *Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine modulare Funktion vom Gewicht k mit*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

wie in 1.5, die auf ganz $\mathbb{H}$ holomorph ist. Dann heißt f eine ***Modulform****, falls $a_n = 0$ für jedes $n < 0$ gilt. Man nennt f dann auch* ***holomorph in*** *∞.*
Ist zusätzlich $a_0 = 0$, so heißt f eine ***Spitzenform****.*

Lemma 1.7. *Sei $f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine modulare Funktion vom Gewicht k. Dann ist f genau dann eine Modulform, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} f(z)$$

existiert.

Beweis. Sei $z = x + iy$. Falls f eine Modulform ist, so besitzt f für hinreichend großes y eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-2\pi n y} \cdot e^{2\pi i n x}$$

Für $y \to \infty$ gilt also $e^{2\pi niz} \to 0$, also folgt wegen 1.5, dass

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} f(z) = \lim_{w \to 0} \tilde{f}(w) = a_0 \in \mathbb{C}.$$

Daher existiert der Grenzwert.
Gibt es umgekehrt ein $n < 0$ mit $a_n \neq 0$, so geht für $y \to \infty$ auch $e^{-2\pi ny} \to \infty$, also existiert der Grenzwert nicht und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 1.8. *Es bezeichne $\mathcal{M}_k$ die Menge aller Modulformen und $\mathcal{S}_k$ die Menge aller Spitzenformen vom Gewicht k. Dann gilt*

1. *$\mathcal{M}_k$ bildet einen $\mathbb{C}$-Vektorraum.*

2. *Für $f \in \mathcal{M}_k$ und $g \in \mathcal{M}_\ell$ gilt $f \cdot g \in \mathcal{M}_{k+\ell}$.*

3. *Sei f eine modulare Funktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$, die nicht identisch verschwindet. Dann ist $\frac{1}{f}$ eine modulare Funktion vom Gewicht $-k$.*

4. *$\mathcal{S}_k$ ist genau der Kern des $\mathbb{C}$-linearen Operators*

$$\phi : \mathcal{M}_k \to \mathbb{C},\ f \mapsto f|\phi := \lim_{y \to \infty} f(iy).$$

   Man beachte, dass dieser Ausdruck wegen der Holomorphie von f in ∞ wohldefiniert ist.

Beweis. ad 1.: Seien $f, g \in \mathcal{M}_k$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann besitzen f und g für alle $z \in \mathbb{H}$ eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi inz}$$

Demnach ist für diese z auch

$$(f + \alpha g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \alpha b_n) e^{2\pi inz},$$

so dass auch $f + \alpha g$ wieder eine Fourier-Entwicklung wie in 1.6 besitzt. Außerdem ist $f + \alpha g$ als Linearkombination auf $\mathbb{H}$ holomorpher Funktionen wieder auf ganz $\mathbb{H}$ holomorph.
Zu zeigen bleibt noch die Invarianzeigenschaft. Sei dazu $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(f+\alpha g)|_k\gamma(z) &= (cz+d)^k(f+\alpha g)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= (cz+d)^k f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+\alpha(cz+d)^k g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &\overset{f,g\in\mathcal{M}_k}{=} f(z)+\alpha g(z)\\ &= (f+\alpha g)(z).\end{aligned}$$

Damit ist $f+\alpha g$ wieder eine Modulform vom Gewicht k und die Behauptung folgt.

ad 2.: Da f und g Modulformen sind, sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ in $\mathbb{D}$ beide holomorph. Nach der Charakterisierung holomorpher Funktionen als Potenzreihen und dem Konvergenzsatz von Mertens[8] folgt, dass auch $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ in $\mathbb{D}$ holomorph ist, demnach ist $f\cdot g$ auch holomorph auf $\mathbb{H}$ und in ∞. Zu zeigen ist noch, dass $f\cdot g$ modular vom Gewicht $k+\ell$ ist. Sei dazu wiederum $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f\cdot g)|_{k+\ell}\gamma(z) &= (cz+d)^{k+\ell}(f\cdot g)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= (cz+d)^{k+\ell} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\cdot g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= f|_k\gamma(z)\cdot g|_\ell\gamma(z)\\ &= (f\cdot g)(z).\end{aligned}$$

Damit ist $f\cdot g$ modular vom Gewicht $k+\ell$ und holomorph in ∞, also eine Modulform vom Gewicht $k+\ell$.

ad 3.: Für $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ und $z\in\mathbb{H}$ mit $f(z)\neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)|_{-k}\gamma(z) &= (cz+d)^{-k}\left(\frac{1}{f}\right)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\ &= \frac{1}{(cz+d)^k f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}\\ &= \frac{1}{f|_k\gamma(z)}=\frac{1}{f(z)}=\left(\frac{1}{f}\right)(z).\end{aligned}$$

Dass $\frac{1}{f}$ auch wieder meromorph in ∞ ist folgt aus dem Identitätssatz. Würden sich nämlich die Pole von $\frac{1}{f}$, also die Nullstellen von f, sich in ∞ häufen,

[8] Franz Mertens, 1840-1927

so würden sich auch die Nullstellen der induzierten Funktion $\tilde{f}$ in 0 häufen, nach dem Identitätsatz ist dann aber notwendigerweise $f \equiv 0$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.
ad 4.: Da nach dem Beweis von 1.7 für eine Modulform f sinnvoll der Wert $f(\infty) = a_0$ gesetzt werden kann für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$, ist ϕ ein Einsetzungshomomorphismus, der bekanntermaßen linear ist. Die Behauptung folgt sofort nach Definition der Spitzenform. □

Eines der wichtigsten verwendeten Resultate über Modulformen enthält der folgende Satz, der häufig als *Gewichtsformel* oder auch *$k/12$-Formel* zitiert wird.

Satz 1.9. (Gewichtsformel)
Sei $f \not\equiv 0$ eine modulare Funktion vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \sum_{z \in \mathbb{F}} \frac{1}{e_z} \mathrm{ord}_z(f) = \frac{k}{12}.$$

Hierbei sei $\mathrm{ord}_\infty(f) := \mathrm{ord}_0(\tilde{f})$, $\mathbb{F}$ der exakte Fundamentalbereich der Operation von Γ auf $\mathbb{H}$ im Sinne von 1.3 1. und $e_z := \frac{|\mathrm{Stab}_\Gamma(z)|}{2}$.

Bemerkung 1.10. *Es gilt*

$$e_z = \begin{cases} 2 & z \text{ konjugiert zu } i \mod \Gamma \\ 3 & z \text{ konjugiert zu } \rho = e^{\frac{2\pi i}{6}} \mod \Gamma \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Vergleiche [Deit10, Satz 2.1.7 (c)] □

Beweis von 1.9. Vergleiche [Deit10, Satz 2.2.11] □

1.3 Eisenstein-Reihen

Als besonders wichtige Beispiele für Modulformen werden sich im Folgenden die Eisenstein[9]-Reihen erweisen, die hier eingeführt werden sollen.

Definition 1.11. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, das heißt $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$. Die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von α und β*

$$\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta) = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta = \{m\alpha + n\beta \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

*nennt man ein ($\mathbb{Z}$-)**Gitter** in $\mathbb{C}$.*

[9] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823-1856

Es gilt die

Proposition 1.12. *Sei $\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta)$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$. Dann ist die Reihe*

$$G_k(\Lambda(\alpha, \beta)) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-k}$$

absolut konvergent.
Im Fall $\alpha = z \in \mathbb{H}$ und $\beta = 1$ nennt man

$$G_k(z) = G_k(\Lambda(z, 1)) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z}, \\ (m,n) \neq (0,0)}} (mz + n)^{-k}$$

eine EISENSTEIN-*Reihe. Die Konvergenz ist hier sogar kompakt-gleichmäßig, so dass G_k als Funktion $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.*

BEWEIS. Vergleiche [FB93, Satz V.2.11] und [KK07, III.2.1] □

Lemma 1.13. *Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ ist die* EISENSTEIN-*Reihe G_k aufgefasst als Funktion $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Modulform vom Gewicht k. Genauer gilt für gerades $k \geq 4$ (vgl. 1.14)*

$$\lim_{y \to \infty} G_k(iy) = 2\zeta(k).$$

BEWEIS. Nach 1.12 definiert G_k für $k \geq 3$ eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Zu zeigen ist daher nur noch die Invarianzeigenschaft. Sei also $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Dann ist für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{H}$

$$(m \cdot \gamma z + n) \cdot (cz + d) = m'z + n', \quad (m', n') = (m, n) \cdot \gamma.$$

Daher gilt:

$$G_k(\gamma z) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z}, \\ (m,n) \neq (0,0)}} (m \cdot \gamma z + n)^{-k} = (cz + d)^k \sum_{(m',n') \in \gamma \mathbb{Z}^{1 \times 2} \setminus \{(0,0)\}} (m'z + n')^{-k}.$$

Jedes $\gamma \in \Gamma$ definiert aber eine bijektive Abbildung $\mathbb{Z}^{1\times 2} \to \mathbb{Z}^{1\times 2}$, so dass auch in der zweiten Summe über jedes $(m, n) \in \mathbb{Z}^{1\times 2} \setminus \{(0, 0)\}$ summiert wird. Für den Grenzwert vergleiche man [Deit10, Proposition 1.4.1]. Mit 1.7 folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz stellt noch einmal die hier wichtigsten Eigenschaften der RIEMANNschen ζ-Funktion zusammen:

Satz 1.14. *1. Die Funktion*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

heißt RIEMANN*sche* ζ*-Funktion und ist holomorph auf*

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\}$$

.

2. *(*J. BERNOULLI[10]*, 1713) Es gibt rationale Zahlen* $B_k \in \mathbb{Q}$*, sodass für* $|z| < 2\pi$ *gilt*

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k z^k.$$

Man bezeichnet diese Zahlen B_k *als* BERNOULLI*-Zahlen. Es gilt* $B_{2k+1} = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, die ersten Werte für die* BERNOULLI*-Zahlen lauten*

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},$$
$$B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

3. *(*L. EULER[11]*, 1737) Für* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}.$$

Die ersten Werte lauten

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

BEWEIS. ad 1.: Folgt sofort aus dem Satz von WEIERSTRASS (vgl. [FL94, Satz III.2.6]).
ad 2.: Vergleiche [Deit10, Lemma 1.5.1]
ad 3.: Vergleiche [FB93, Satz III.7.14]

□

Zwischen den EISENSTEIN-Reihen und der ζ-Funktion besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang:

[10] JAKOB I. BERNOULLI, 1655-1705
[11] LEONHARD EULER, 1707-1783

Satz 1.15. *Für jedes gerade $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 4$ und jedes $z \in \mathbb{H}$ gilt die Identität*

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

mit $q := e^{2\pi i z}$ und $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$ (k-te Teilerpotenzsumme).

Beweis. [Deit10, Proposition 2.2.10] $\square$

2 Der Vektorraum der Modulformen festen Gewichts

2.1 Basen und Dimensionsformeln

Für die Herleitung der Dimensionsformeln wird sich eine bestimmte Funktion als essentiell erweisen, die wir hier etwas allgemeiner als benötigt einführen wollen.

Definition 2.1. *Sei $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann heißt die Zahl*

$$\Delta = \Delta(\Lambda) := g_4(\Lambda)^3 - 27g_6(\Lambda)^2$$

*für $g_4(\Lambda(\alpha, \beta)) := 60G_4(\Lambda)$ und $g_6(\Lambda) := 140G_6(\Lambda)$ die **Diskriminante** von Λ.*
Im Fall $\Lambda = \Lambda(z, 1)$ mit $z \in \mathbb{H}$ setzen wir $\Delta(\Lambda) = \Delta(z)$.

Lemma 2.2. *Die Funktion $\Delta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \Delta(z)$ ist eine Spitzenform vom Gewicht 12. Es gilt $\mathrm{ord}_\infty(\Delta) = 1$ und es ist $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$.*

Beweis. Nach 1.12 sind G_4 und G_6 holomorph auf $\mathbb{H}$ und nach 1.13 sind G_4 und G_6 Modulformen vom Gewicht 4 bzw. 6. Gemäß 1.8 ist also $\Delta = g_4^3 - 27g_6 = (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2$ eine Modulform vom Gewicht 12.
Wiederum mit 1.15 erhält man aber auch

$$\begin{aligned}
\Delta(\infty) &= (60G_4(\infty))^3 - 27(140G_6(\infty))^2 \\
&= (120\zeta(4))^3 - 27(280\zeta(6))^2 \\
&= \frac{2^6}{3^3}\pi^{12} - \frac{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2}\pi^{12} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

so dass Δ sogar eine Spitzenform ist.
Da G_4 und G_6 Modulformen vom Gewicht 4 bzw. 6 sind, folgt unmittelbar aus der Gewichtsformel 1.9, dass G_4 in $\rho = e^{2\pi i/6}$ und G_6 in i und damit auch in allen dazu unter Γ konjugierten Punkten jeweils in erster Ordnung verschwinden.
Für G_4:

$$\frac{4}{12} = \underbrace{\mathrm{ord}_\infty(G_4)}_{=0} + \frac{1}{3}\,\mathrm{ord}_\rho(G_4) + \sum_{z \in \mathbb{F} \setminus \{\rho\}} \frac{1}{e_z}\,\mathrm{ord}_z(G_4)$$

Da nach 1.10 $e_z < 3$ für jedes $z \in \mathbb{F} \setminus \{\rho\}$ muss also für diese z $\mathrm{ord}_z(G_4) = 0$ gelten. Damit folgt aber $\mathrm{ord}_\rho(G_4) = 1$.

Für G_6:
$$\frac{6}{12} = \underbrace{\mathrm{ord}_\infty(G_6)}_{=0} + \frac{1}{2}\,\mathrm{ord}_i(G_6) + \sum_{z\in\mathbb{F}\setminus\{i\}} \frac{1}{e_z}\,\mathrm{ord}_z(G_6)$$
Wieder nach 1.10 folgt aber auch hier $\mathrm{ord}_z(G_6) = 0$ für $z \in \mathbb{F} \setminus \{i\}$. Für $z \neq \rho$ wäre nämlich sonst die rechte Seite zu groß und für $z = \rho$ müsste es natürliche Zahlen (beachte dass G_6 auf $\mathbb{H}$ holomorph ist) $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \neq 0$ geben mit $k/2 + \ell/3 = 1/2$, was offensichtlich nicht der Fall ist. Also muss auch $\mathrm{ord}_\rho(G_6) = 0$ gelten und damit auch $\mathrm{ord}_i(G_6) = 1$.
Das bedeutet aber auch, dass G_4^3 und G_6^2 linear unabhängig sind, so dass Δ nicht identisch verschwinden kann. Da Δ vom Gewicht 12 ist, muss also wieder nach der Gewichtsformel 1.9 $\mathrm{ord}_\infty(\Delta) = 1$ und $\mathrm{ord}_z(\Delta) = 0$ für alle $z \in \mathbb{F}$, also alle $z \in \mathbb{H}$ gelten. □

Durch quasi analoge Überlegungen wie im Beweis von 2.2 erhält man den

Satz 2.3. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ eine gerade ganze Zahl.*

1. *Für $k < 0$ und $k = 2$ ist $\mathcal{M}_k = \{0\}$, mit anderen Worten gibt es keine Modulform vom Gewicht $k < 0$ oder $k = 2$, die nicht identisch verschwindet.*

2. *Für $k \in \{0, 4, 6, 8, 10\}$ ist $\mathcal{M}_k$ ein eindimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $1, G_4, G_6, G_8, G_{10}$ und $\mathcal{S}_k = \{0\}$.*

3. *Es ist $\mathcal{M}_{k-12} \cong \mathcal{S}_k$ vermöge der Multiplikation mit Δ*
$$\delta : \mathcal{M}_{k-12} \to \mathcal{S}_k,\ f \mapsto f \cdot \Delta.$$

Beweis. ad 1.: Sei $f \in \mathcal{M}_k$ nicht identisch verschwindend. Dann folgt mit 1.9
$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ord}_i(f) + \frac{1}{3}\,\mathrm{ord}_\rho(f) + \sum_{z\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \mathrm{ord}_z(f) = \frac{k}{12}.$$
Nun sind aber alle Terme auf der linken Seite der Gleichung ≥ 0, da f insbesondere holomorph ist, also ist notwendigerweise $k \geq 0$. Da es außerdem keine natürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass
$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \frac{1}{6}$$
gilt, kann die Gewichtsformel auch für $k = 2$ nicht richtig sein. Das ist aber ein Widerspruch, also ist $\mathcal{M}_k = \{0\}$ für $k < 0$ und $k = 2$.
ad 2.: Sei nun $0 \leq k < 12$ und wieder $f \in \mathcal{M}_k \setminus \{0\}$. Dann ist gemäß 1.9

offenbar $\mathrm{ord}_\infty(f) = 0$, da die linke Seite der Gleichung < 1 ist. Damit ist aber schon $\mathcal{S}_k = \{0\}$. Nach dem Homomorphiesatz gilt dann

$$\mathcal{M}_k/\mathcal{S}_k \cong \mathrm{Bild}(\phi) = \mathbb{C},$$

also ist $\dim \mathcal{M}_k = 1$ und jede Modulform $\neq 0$ vom Gewicht k bildet eine Basis. Nach 1.13 ist für jedes gerade $k \geq 3$ G_k eine Modulform vom Gewicht k. Damit folgt die Behauptung.

ad 3.: Nach 1.8 ist das Produkt zweier Modulformen wieder eine Modulform, wobei sich die Gewichte addieren. Das Gewicht von Δ ist 12 nach 2.2, für $f \in \mathcal{M}_{k-12}$ ist also $f \cdot \Delta \in \mathcal{M}_k$. Da Δ eine Spitzenform ist, muss auch $f \cdot \Delta$ eine Spitzenform sein: $f \cdot \Delta \in \mathcal{S}_k$. Damit ist δ wohldefiniert. Da Δ nur in ∞ verschwindet, müsste für $f \in \mathrm{Kern}(\delta)$ gelten, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, also ist $\mathrm{Kern}(\delta)$ trivial und damit δ injektiv.

Für $f \in \mathcal{S}_k$ gilt

$$\mathrm{ord}_\infty(f/\Delta) = \underbrace{\mathrm{ord}_\infty(f)}_{\geq 1} - \underbrace{\mathrm{ord}_\infty(\Delta)}_{\overset{2.2}{=} 1} \geq 0,$$

mit anderen Worten ist f/Δ in ∞ holomorph und wegen $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ ist f/Δ auch auf ganz $\mathbb{H}$ holomorph. Da f und Δ beide modular sind, muss auch f/Δ modular sein. Insgesamt folgt $f/\Delta \in \mathcal{M}_{k-12}$ und $\delta(f/\Delta) = f$, so dass δ auch surjektiv ist. $\square$

Folgerung 2.4. *Für gerades $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 0$ gilt*

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{für } k \equiv 2 \mod 12 \\ \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 2 \mod 12 \end{cases}.$$

Beweis. Sei $k = 12q + r$ mit $q = \lfloor k/12 \rfloor$ und $r \in \{0, ..., 10\}$. Nach 2.3 und dem Homomorphiesatz gilt

$$\dim \mathcal{M}_k = \dim \mathcal{S}_k + 1 = \dim \mathcal{M}_{k-12} + 1 = ... = \dim \mathcal{M}_r + q.$$

Für $r = 2$ ist $\dim \mathcal{M}_r = 0$, sonst ist $\dim \mathcal{M}_r = 1$. Das war genau die Behauptung. $\square$

Satz 2.5. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ gerade. Dann ist*

$$B_k := \{G_4^m G_6^n \mid 4m + 6n = k\}$$

eine Basis von $\mathcal{M}_k$. insbesondere sind die Eisenstein*-Reihen G_4 und G_6 algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$, so dass*

$$\mathcal{M} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k = \mathbb{C}[G_4, G_6]$$

als graduierte $\mathbb{C}$-Algebra isomorph zu $\mathbb{C}[x, y]$ ist.

Beweis. Es gilt, dass B_k ein Erzeugendensystem für $\mathcal{M}_k$ ist. Für $k \leq 6$ ist dies bereits in 2.3 gezeigt. Es seien also $k \geq 8$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $4m+6n = k$. Nehmen wir an, die Behauptung sei für jedes $\ell < k$ gezeigt. Betrachte nun die Modulform $g = G_4^m G_6^n \in \mathcal{M}_k$. Dann ist g keine Spitzenform, denn

$$g(\infty) = G_4(\infty)^m G_6(\infty)^n = 2^{m+n}\zeta(4)^m \cdot \zeta(6)^n \neq 0.$$

Für ein beliebiges $f \in \mathcal{M}_k$ existiert also ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $f - \lambda g \in \mathcal{S}_k$. Da $\mathcal{S}_k \cong \mathcal{M}_{k-12}$ nach 2.3 gibt es also ein $h \in \mathcal{M}_{k-12}$ mit $f - \lambda g = \Delta h$. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $h \in \langle B_{k-12} \rangle$, also folgt $f - \lambda g = \Delta h \in \langle B_k \rangle$, denn $\Delta = G_4^3 - 27G_6^2 \in \langle B_{12} \rangle$. Dann ist aber auch $f \in \langle B_k \rangle$.
Zu zeigen ist noch die lineare Unabhängigkeit der Monome $G_4^m G_6^n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $4m + 6n = k$. Aus dem nachfolgenden Lemma 2.6 lässt sich dies unmittelbar folgern, denn oben wurde gezeigt, dass B_k ein Erzeugendensystem für $\mathcal{M}_k$ ist, dass genau $\dim \mathcal{M}_k$ viele Elemente hat, so dass B_k linear unabhängig sein muss, also eine Basis von $\mathcal{M}_k$.
Für die algebraische Unabhängigkeit von G_4 und G_6 sei $p \in \mathbb{C}[x, y]$ ein Polynom in den Unbestimmten x und y mit der Eigenschaft, dass $p(G_4, G_6) = 0$. Nun ist

$$\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}[x, y]_{hom,\,k,3,2}$$

mit $\mathbb{C}[x, y]_{hom,\,k,3,2} := \langle x^m y^n \mid 3m+2n = k \rangle_{\mathbb{C}}$ bekanntermaßen eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra, also besitzt p eine eindeutige Darstellung

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{\deg p} p_k(x, y)$$

mit $p_k \in \mathbb{C}[x, y]_{hom,\,k,3,2}$. Dann muss wegen $p(G_4, G_6) = 0 \in \mathcal{M}$ auch $p_k(G_4, G_6) = 0$ für jedes k gelten, denn nach 1.8 ist $p_k(G_4, G_6)$ eine Modulform vom Gewicht $2k$, so dass $p(G_4, G_6)$ eine Summe von Modulformen verschiedenen Gewichts ist, die selbst wieder eine Modulform, nämlich 0 ist. Eben das ist aber nur möglich, wenn jedes einzelne $p_k(G_4, G_6) = 0$. Es ist aber $p_k(G_4, G_6) = 0$ genau dann, wenn alle Koeffizienten von $x^m y^n$ schon Null sind, da die Monome linear unabhängig sind.
Damit folgt dann auch die behauptete Isomorphie der graduieretn $\mathbb{C}$-Algebren.

$\square$

Lemma 2.6. *Für jede nichtnegative gerade ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$|\{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid 4m + 6n = k\}| = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \textit{für } k \equiv 2 \bmod 12 \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \textit{für } k \not\equiv 2 \bmod 12 \end{cases}.$$

Beweis. Für gerades $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} D_k &:= \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid 4m + 6n = k\} \\ &= \underbrace{\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 4m + 6n = k\}}_{=:P_k} \uplus \underbrace{\{(m,0) \mid 4m = k\}}_{=:M_k} \uplus \underbrace{\{(0,n) \mid 6n = k\}}_{=:N_k}. \end{aligned}$$

Die Aussage ist klar für $k = 0$. Sei also die Behauptung richtig für ein gerades $k = 12q + r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r \leq 10$. Zu zeigen ist die Behauptung für $k + 2$: Sei dazu $(m,n) \in P_{k+2} \uplus N_{k+2}$. Dann folgt $(m + 1, n - 1) \in D_k \setminus N_k$ und daher ist offenbar stets $|P_{k+2}| + |N_{k+2}| = |D_k| - |N_k|$. Außerdem ist genau dann $N_k \neq \emptyset$, wenn $6 \mid r$ und $M_k \neq \emptyset$, wenn $4 \mid r$. Man erhält also

$$|D_{k+2}| = |D_k| - |N_k| + |M_{k+2}|.$$

Nach Induktionsvorraussetzung gilt dann

r	0	2	4	6	8	10
$\lvert D_k \rvert$	$q+1$	q	$q+1$	$q+1$	$q+1$	$q+1$
$\lvert N_k \rvert$	1	0	0	1	0	0
$\lvert M_{k+2} \rvert$	0	1	0	1	0	1
$\lvert D_{k+2} \rvert$	q	$q+1$	$q+1$	$q+1$	$q+1$	$q+2$

Dies entspricht aber genau der behaupteten Identität für $k + 2$ anstelle von k. Mit vollständiger Induktion folgt also die Behauptung. □

2.2 Die Hurwitz-Identität

Die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.1 über die Struktur der $\mathbb{C}$-Algebra der Modulformen und die Dimensionsformeln werden hier angewandt um eine Aussage aus der elementaren Zahlentheorie zu beweisen. Hierzu zunächst eine neue Bezeichnung:

Definition 2.7. *Für gerades $k \geq 4$ heißt*

$$E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$$

*die k-te **normierte** Eisenstein-**Reihe**.*

Bemerkung 2.8. *Es gilt*

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

mit den Bezeichnungen aus 1.14 und 1.15.

Beispiel 2.9.

$$
\begin{aligned}
E_4(z) &= 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi inz} & E_6(z) &= 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)e^{2\pi inz}\\
E_8(z) &= 1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)e^{2\pi inz} & E_{10}(z) &= 1 - 264\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_9(n)e^{2\pi inz}\\
E_{12}(z) &= 1 + \frac{65\,520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)e^{2\pi inz}
\end{aligned}
$$

Hiermit erhält man als Konsequenz die HURWITZ-Identität:

Satz 2.10. **(HURWITZ-Identität)** *(A. HURWITZ, 1881)*
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$$

und

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_5(n-m)$$

BEWEIS. Wie in 2.3 gezeigt wurde, sind sowohl $\mathcal{M}_8$ als auch $\mathcal{M}_{10}$ eindimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume, sodass man sofort

$$E_8 = E_4^2 \text{ und } E_{10} = E_4E_6,$$

erhält, da der erste Koeffizient des Produktes von normierten Potenzreihen bzw. FOURIER-Reihen wieder 1 ist. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)e^{2\pi inz} &= (1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi inz})^2\\
&= 1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi inz} + (240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi inz})^2\\
& 1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_3(n) + 120\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m))e^{2\pi inz}
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) e^{2\pi i n z} =& (1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n z}) \cdot (1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi i n z}) \\
=& 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-240 \sigma_3(n) + 504 \sigma_5(n) \\
& + 120\,960 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m) \sigma_5(n-m)) e^{2\pi i n z}
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert dann sofort die Behauptung. □

Bemerkung 2.11. *Obwohl es sich bei der* HURWITZ*-Identität um eine Aussage über natürliche Zahlen handelt, sie als solche also Gegenstand der elementaren Zahlentheorie ist, ist bis heute kein elementarer Beweis bekannt, der ohne die Theorie der Modulformen bzw. der elliptischen Funktionen (vgl. [KK07, Abschnitt I.4.2]) auskommt.*

3 Die absolute Invariante j

In diesem Abschnitt wird eine der wichtigsten aller Modulfunktionen behandelt, die j-Funktion:

Definition 3.1. *Sei $\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta)$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann heißt*

$$j = j(\Lambda) := \frac{1728(60G_4(\Lambda)^3}{\Delta(\Lambda)}$$

*die **absolute Invariante** von Λ.*
Im Fall $\Lambda = \Lambda(z, 1)$ mit $z \in \mathbb{H}$ setzen wir $j(\Lambda) = j(z)$. Die Abbildung

$$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C},\ z \mapsto j(z)$$

*nennt man auch die j-**Funktion**.*

Proposition 3.2. 1. *Die j-Funktion ist eine Modulfunktion, also eine modulare Funktion vom Gewicht* 0.

2. *Sie ist holomorph in $\mathbb{H}$ und hat in ∞ einen Pol erster Ordnung mit Residuum* 1, *d.h. j besitzt eine* Fourier-*Reihe der Form*

$$j(z) = e^{-2\pi i z} + \sum_{n=0}^{\infty} j_n e^{2\pi i n z}.$$

Beweis. ad 1.: Sowohl $(60G_4)^3$ als auch Δ sind Modulformen vom Gewicht 12, also gilt für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = 1728 \frac{g_4^3\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}{\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = 1728 \frac{(cz+d)^{12} g_4^3(z)}{(cz+d)^{12}\Delta(z)} = (cz+d)^0 j(z).$$

Damit ist j schwach modular vom Gewicht 0, mit 2. also modular.
ad 2.: Nach 2.2 besitzt Δ keine Nullstellen in $\mathbb{H}$ und eine Nullstelle erster Ordnung in ∞, während $g_4(\infty) \neq 0$ gilt. Weiterhin sind g_4 und Δ in $\mathbb{H}$ beide holomorph, also ist j in $\mathbb{H}$ holomorph und hat in ∞ einen Pol erster Ordnung.
Sei nun $q := e^{2\pi i z}$. Dann besitzt q/Δ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$\frac{q}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_n q^n$$

mit $\tilde{\tau}_0 \neq 0$. Entsprechendes gilt für $1728 g_4^3$:

$$1728 g_4^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n q^n,$$

also folgt

$$j = q^{-1} \cdot 1728 g_4^3 \cdot \frac{q}{\Delta} = q^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n q^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_n q^n) = q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} j_{n-1} q^n$$

mit

$$j_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \tilde{\tau}_{n-k}.$$

Zu berechnen ist also

$$\mathrm{res}_f(\infty) = j_{-1} = \gamma_0 \cdot \tilde{\tau}_0 \overset{vgl. 1.15}{=} 1728 \cdot (60 \cdot 2\zeta(4))^3 \cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}\tau(1)} \overset{vgl. 1.14}{=} 2^{12}\pi^{12} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}} = 1.$$

Hierbei ist

$$\Delta = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

die FOURIER-Entwicklung von Δ. □

Satz 3.3. *Die Funktion $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$, $z \to j(z)$ ist bijektiv, genauer gilt:*

1. *Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 12^3 = 1728\}$ hat $j - \lambda$ genau eine Nullstelle erster Ordnung in $\mathbb{F}$.*

2. *$j - 1728$ hat in i eine Nullstelle der Ordnung 2 und besitzt keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{F}$.*

3. *In $\rho = e^{2\pi i/6}$ besitzt j eine Nullstelle der Ordnung 3. Sonst hat j keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{F}$.*

BEWEIS. j ist modular vom Gewicht 0 und $\mathrm{ord}_\infty(j) = -1$. Dasselbe gilt auch für $j - \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, da Summen Modulfunktionen wieder Modulfunktionen sind (Beweis analog zu 1.8). Also folgt sofort aus der Gewichtsformel 1.9 die Identität

$$\sum_{z \in \mathbb{F}} \frac{1}{e_z} \mathrm{ord}_z(j - \lambda) = 1 \tag{7}$$

mit e_z wie in 1.10.
ad 3.: Da G_4 in ρ eine einfache Nullstelle hat und $\Delta(\rho) \neq 0$ gilt nach Lemma 2.2 bzw. dessen Beweis, dass $j = (12 \cdot 60 G_4)^3/\Delta$ in ρ in 3. Ordnung verschwindet. Dies in 7 eingesetzt liefert für $\lambda = 0$

$$\sum_{z \in \mathbb{F} \setminus \{\rho\}} \frac{1}{e_z} \mathrm{ord}_z(j) = 0.$$

Da j in $\mathbb{H}$ holomorph ist, ist $\mathrm{ord}_z(j) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, folgt so $j(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{F} \setminus \{\rho\}$.
<u>ad 2.:</u> Es ist

$$j(i) = \frac{1728(60G_4(i))^3}{\Delta(i)} = 1728\frac{(60G_4(i))^3}{(60G_4(i))^3 - 27(140G_6(i))^2} \overset{G_6(i)=0}{=} 1728,$$

also hat $j - 1728$ in i eine Nullstelle. Mit 7 folgt wegen $\mathrm{ord}_\rho(j - 1728) = 0$ nach 3., dass

$$\frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{ord}_i(j - 1728)}_{>0} + \sum_{z \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \mathrm{ord}_z(j - 1728) = 1,$$

also muss wegen $\mathrm{ord}_z(j - 1728) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{F}$ notwendigerweise $\mathrm{ord}_i(j - 1728) = 2$ und $\mathrm{ord}_z(j - 1728) = 0$ für alle $z \in \mathbb{F} \setminus \{i\}$ gelten.
<u>ad 1.:</u> Für $\lambda \notin \{0, 1728\}$ ist wie gerade gesehen $\mathrm{ord}_i(j - \lambda) = \mathrm{ord}_\rho(j - \lambda) = 0$, also liest sich 7 als

$$\sum_{z \in \mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \mathrm{ord}_z(j - \lambda) = 1,$$

was dann und nur dann sein kann, wenn für genau ein $z_0 \in \mathbb{F} \setminus \{i, \rho\}$ $\mathrm{ord}_{z_0}(j - \lambda) = 1$ gilt und sonst $\mathrm{ord}_z(j - \lambda) = 0$ für $z \in \mathbb{F} \setminus \{z_0\}$. □

Abschließend wollen wir die Struktur der Gesamtheit aller Modulfunktionen näher beleuchten. Dazu zunächst die

Bemerkung 3.4. *Die Menge $\mathcal{K} := \{f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}} \mid f$ ist eine Modulfunktion$\}$ bildet einen Körper.*

Beweis. Wie im Beweis zu 1.8 sieht man ein, dass Summen und Produkte von Modulfunktionen selbst wieder Modulfunktionen sind. Außerdem ist $\frac{1}{f}$ für $f \not\equiv 0$ schwach modular. Die Nullstellen von f können sich nicht in ∞ häufen, ansonsten würden sich die Nullstellen der induzierten Funktion $\tilde{f}$ in 0 häufen, nach dem Identitätssatz ist also $\tilde{f} \equiv 0$ und damit $f \equiv 0$. Daher hat $\frac{1}{f}$ in ∞ höchstens einen Pol, ist also meromorph in ∞, so dass mit f auch $\frac{1}{f}$ eine Modulfunktion ist. □

Der folgende Satz begründet nun im Wesentlichen die Aussage zu Beginn des Abschnittes, dass j die wichtigste aller Modulfunktionen sei.

Satz 3.5. 1. *Der Körper der Modulfunktionen $\mathcal{K}$ stimmt mit dem Körper der rationalen Funktionen in j überein,*

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}(j).$$

2. Jede Modulfunktion ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts.

Beweis. <u>ad 1.:</u> Da $\mathcal{K}$ ein Körper ist und $j \in \mathcal{K}$ ist offenbar $\mathbb{C}(j) \leq \mathcal{K}$.
Für die umgekehrte Inklusion sei $f \in \mathcal{K}$ nicht konstant. Betrachte für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Funktion g mit

$$g(z) = \frac{f(z) - \lambda}{f(z) - \mu}.$$

Die Polstellen von f heben sich in g gerade heraus, so dass g Nullstellen $p_1, \ldots, p_n$ in den Nullstellen von $f - \lambda$ und Polstellen $q_1, \ldots, q_m$ in den Nullstellen von $f - \mu$ hat. Man kann also offenbar $\lambda \neq \mu$ so wählen, dass g jeweils in einer Umgebung von i und $\rho = e^{2\pi i/6}$ holomorph und $\neq 0$ ist, sowie in ∞ weder eine Null-noch eine Polstelle besitzt, also $\mathrm{ord}_i(g) = \mathrm{ord}_\rho(g) = \mathrm{ord}_\infty(g) = 0$. Das heißt dann aber, dass g in $\mathbb{F}$ mit Vielfachheiten gezählt gleich viele Null- und Polstellen besitzt, denn nach der Ordnungsformel 1.9 ist

$$\sum_{z \in \mathbb{F}} \mathrm{ord}_z(g) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ord}_{p_j}(g) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ord}_{q_k}(g) = 0.$$

Zur Vereinfachung der Notation setze also $n = m$, wobei jeweils $p_i = p_j$ bzw. $q_i = q_j$ für $i \neq j$ zugelassen ist. Betrachten wir nun die Funktion h mit

$$h(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{j(z) - j(p_j)}{j(z) - j(q_j)}.$$

Dann ist $h \in \mathcal{K}$ und h hat dieselben Null- und Polstellen in $\mathbb{F}$ wie g (mit denselben Vielfachheiten) und es ist $\mathrm{ord}_\infty(h) = 0$, denn nach Wahl von λ und μ ist keines der p_i und q_i gleich i oder ρ, so dass $j - j(p_i)$ nach 3.3 genau eine einfache Nullstelle hat. Damit ist g/h holomorph und nullstellenfrei in $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$, also eine Modulform vom Gewicht 0, mit anderen Worten konstant. Es folgt also $g \in \mathbb{C}(j)$ und damit auch

$$f = \frac{\mu g - \lambda}{g - 1} \in \mathbb{C}(j).$$

<u>ad 2.:</u> Dass der Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts eine Modulfunktion ist, ist klar nach 1.8. Sei umgekehrt $f \in \mathcal{K}$ nicht konstant mit $f = \frac{p(j)}{q(j)}$, wobei p, q Polynome in j seien. Dies ist möglich nach 1. Sei $r := \max\{\deg p, \deg q\}$. Dann sind $p(j) \cdot \Delta^r$ und $q(j) \cdot \Delta^r$ Modulformen vom Gewicht $12r$, denn es ist (o.B.d.A. sei $\deg p = r$)

$$\begin{aligned} p(j) \cdot \Delta^r &= (\alpha_r j^r + \mathcal{O}(j^{r-1})) \cdot \Delta^r \\ &= (\alpha_r \frac{1728^r (60G_4)^{3r}}{\Delta^r} \cdot \Delta^r + \mathcal{O}(\Delta \cdot G_4^{3(r-1)}) \\ &= \alpha_r 1728^r (60G_4)^{3r} + \mathcal{O}(\Delta \cdot G_4^{3(r-1)}). \end{aligned}$$

Wegen $G_4 \in \mathcal{M}_4$ ist also $p(j) \cdot \Delta^r \in \mathcal{M}_{12r}$ und

$$f = \frac{\Delta^r p(j)}{\Delta^r q(j)}.$$

$\square$

Literatur

[Deit10] Anton Deitmar, *,,Automorphe Formen"*, Springer-Verlag Heidelberg Dordrecht London New York, 1. Auflage, 2010

[FB93] Eberhard Freitag und Rolf Busam, *,,Funktionentheorie"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 1993

[FL94] Wolfgang Friedrich und Ingo Lieb, *,,Funktionentheorie"*, Verlag Vieweg Braunschweig, 7. Auflage, 1994

[KK07] Max Koecher und Aloys Krieg, *,,Elliptische Funktionen und Modulformen"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2007

[Kr09] Aloys Krieg, *,,Funktionentheorie I"*, Skript zur Vorlesung, Aachen, 2009