Abschätzung der Fourierkoeffizienten, Dirichletreihen und das Phragmén-Lindelöf-Prinzip

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 21. 11. 2011

Stefan Lotterstedt

Im Vortrag sollen zunächst einige Abschätzungen der Koeffizienten von Fourierreihen, den sogenannten *Fourierkoeffizienten*, vorgestellt werden. Mit Hilfe dieser Ergebnisse treffen wir dann eine Aussage über das Konvergenzverhalten von L-Funktionen. Sie sind nichts anderes als Dirichletreihen, deren Koeffizienten schlicht Fourierkoeffizienten sind. Darüberhinaus werden wir das (allgemeine) Konvergenzverhalten von Dirichletreihen kennenlernen, was dann folglich insbesondere für L-Funktionen greift. Abschließend werden wir eine stärkere Version des Maximumprinzips kennenlernen, das sogenannte *Phragmén-Lindelöf-Prinzip*.

§ 1 Abschätzung der Fourierkoeffizienten

Wir wollen den Modulformen sogenannte L-Funktionen zuordnen, indem wir ihre Fourierkoeffizienten in Dirichletreihen einsetzen. Um zu zeigen, dass diese Dirichletreihen konvergieren, müssen wir das Wachstum der Fourierkoeffizienten kontrollieren. Dazu sei zunächst an einige Ergebnisse aus vorherigen Vorträgen erinnert.

(1.1) Bemerkung
Die sogenannte *Modulgruppe* $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ vermöge

$$g.z := \frac{az+b}{cz+d}, \quad g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Außerdem haben wir gezeigt, dass zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $\gamma \in \Gamma$ existiert, so dass $\gamma.z \in \overline{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \text{ und } |z| \geq 1 \right\}$. $\overline{D}$ ist der Abschluss in $\mathbb{H}$ eines sogenannten *Fundamentalbereiches* für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. ◇

(1.2) Bemerkung (schwach modulare Funktion, Modulform, Spitzenform)
Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{H} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion.

- f heißt *schwach modular vom Gewicht k*, falls gilt

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

  für jedes $z \in \mathbb{H}$, in dem f definiert ist, und jedes $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

- falls die induzierte Funktion $\tilde{f}$ auf der Kreisscheibe $K_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ meromorph ist (siehe 2. Vortrag), so heißt f *modulare Funktion*. Dazu sagt man auch, dass f *meromorph in* ∞ ist.
- jede modulare Funktion besitzt eine Fourierentwicklung

$$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

wobei $-m$ die Polordnung der induzierten Funktion $\tilde{f}$ im Punkt 0 ist (für genauere Erläuterungen siehe die vorangegangenen Vorträge und [2]).
- eine modulare Funktion f heißt *Modulform,* falls f holomorph ist in $\mathbb{H}$ und $a_n = 0$ für jedes $n < 0$ in der entsprechenden Fourierentwicklung.
- eine Modulform f heißt *Spitzenform,* falls zusätzlich $a_0 = 0$ gilt. $\diamond$

Außerdem sei noch einmal an die Fourierreihenentwicklung der Eisenstein-Reihen erinnert:

(1.3) Bemerkung (Eisenstein-Reihen)
Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Auf der oberen Halbenene $\mathbb{H}$ sind die *Eisenstein-Reihen* durch

$$G_k(z) := \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k} \in \mathbb{C}$$

definiert.
Für gerades $k \geq 4$ gilt

$$G_k \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, e^{2\pi i n z},$$

wobei $\sigma_k \colon \mathbb{N} \ni n \mapsto \sum_{d|n} d^k \in \mathbb{N}$ die k-te Teilerpotenzsumme und ζ die Riemannsche Zetafunktion sind. $\diamond$

Für die Abschätzungen der Fourierkoeffizienten benötigen wir die sogenannte *Landau-Notation*.

(1.4) Definition
Seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f, g \colon D \to \mathbb{C}$ Funktionen.
Existiert ein $C > 0$, so dass $|f(z)| \leq C \cdot |g(z)|$ für alle $z \in D$ gilt, so schreiben wir

$$f(z) \in \mathcal{O}(g(z)). \qquad \diamond$$

Sei nun $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ eine Modulform vom Gewicht $k \geq 4$.

(1.5) Lemma
Ist $f \equiv G_k$, dann exisitieren $A, B \in \mathbb{R}$, $A, B > 0$, mit

$$An^{k-1} \leq |a_n| \leq Bn^{k-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. ◇

Beweis
Aus der Fourierreihendarstellung der G_k folgt für $n \in \mathbb{N}$ stets

$$|a_n| = \left| 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sigma_{k-1}(n) \right| = \left| 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{d|n} d^{k-1} \right| \geq 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} n^{k-1} = An^{k-1}$$

mit $A := 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} > 0$. Auf der anderen Seite:

$$\frac{|a_n|}{n^{k-1}} = A\sum_{d|n}\frac{d^{k-1}}{n^{k-1}} = A\sum_{d|n}\frac{1}{\left(\frac{n}{d}\right)^{k-1}} \overset{(*)}{=} A\sum_{d|n}\frac{1}{d^{k-1}} \leq A\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^{k-1}} = A\zeta(k-1) =: B.$$

Nun ist tatsächlich $B \in \mathbb{R}^{>0}$, da die Riemannsche Zetafunktion für alle $n \geq 3$ konvergiert. Des Weiteren folgt $(*)$, da

$$h(d) = \frac{n}{d}$$

eine bijektive Abbildung von $\{d \in \mathbb{N} : d|n\}$ in sich selbst definiert. □

(1.6) Satz (Hecke)
Ist f eine Spitzenform, dann gilt

$$a_n \in \mathcal{O}\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$ ◇

Beweis
Seien $z := x + iy \in \mathbb{H}$ und $\varphi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C},\ \varphi(z) := y^{\frac{k}{2}}|f(z)|$. Wir zeigen zunächst, dass φ unter Γ invariant ist. Sei also $\gamma := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Aus dem 1. Vortrag wissen wir, dass $\operatorname{Im}(\gamma.z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma.z) &= (\operatorname{Im}(\gamma.z))^{\frac{k}{2}} |f(\gamma.z)| \\
&= \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}\right)^{\frac{k}{2}} \left|(cz+d)^k f(z)\right| \\
&= (\operatorname{Im}(z))^{\frac{k}{2}} |f(z)| = \varphi(z).
\end{aligned}$$

Nun möchten wir zeigen, dass $\varphi(z)$ beschränkt ist. Nach dem 2. Vortrag ist

$$\tilde{f}\colon \dot{K}_1(0) \to \mathbb{C}, \tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

die induzierte Funktion zu f, die holomorph und stetig ist. Sie entspricht ihrer Laurententwicklung um 0. Mit [1] V(2.10) folgt dann, dass in 0 eine hebbare Singularität vorliegt, da $a_n = 0$ für alle $n < 0$, weil f eine Modulform ist. Also kann f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz auf $K_1(0)$ holomorph fortgesetzt werden ([1], V(2.5)). Die Funktion

$$g\colon \dot{K}_1(0) \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$$

ist holomorph auf $\dot{K}_1(0)$. Sie hat denselben Konvergenzradius wie f. Also ist g ebenfalls auf ganz $K_1(0)$ holomorph fortsetzbar. Nun betrachten wir die Einschränkung von g auf $K_{\frac{1}{2}}(0)$. Da $K_{\frac{1}{2}}(0)$ ein beschränktes Gebiet ist und g stetig auf $\overline{K_{\frac{1}{2}}(0)}$ fortgesetzt werden kann, nimmt $|g|$ auf dem Rand $\partial K_{\frac{1}{2}}(0)$ sein Maximum $M > 0$ an. Also gilt $|g(z)| \leq M$ für alle $z \in K_{\frac{1}{2}}(0)$.

Die Funktion $j\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $j(y) = y^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi y}$ ist ebenfalls durch ein $N > 0$ beschränkt. Dies folgt aber direkt aus der Erkenntnis, dass j im Unendlichen verschwindet. Sei

$$U := \left\{ z \in \mathbb{H} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) > -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi} \right\}.$$

Für $z \in \mathbb{H}$ ist $\operatorname{Im}(z) > -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi}$ aber äquivalent dazu, dass $e^{2\pi i z} \in K_{\frac{1}{2}}(0)$. Dies ist schnell einzusehen:

$$\begin{aligned}
& e^{2\pi i z} \in K_{\frac{1}{2}}(0) \\
\Leftrightarrow \quad & \left| e^{2\pi i z} \right| < \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \left| e^{-2\pi y} \right| < \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \; & y > -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die behauptete Aussage. Auf dieser Menge können wir φ nun beschränken. Es folgt für alle $z := x + iy \in U$

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| &= \left|y^{\frac{k}{2}} e^{2\pi iz}\right| \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{2\pi iz}\right)^{n-1}\right| \\
&= y^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi iy} \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{2\pi iz}\right)^{n-1}\right| \\
&\leq NM =: P.
\end{aligned}$$

Nach (1.2) wissen wir, dass zu jeden $z \in \mathbb{H}$ ein $\gamma \in \Gamma$ existiert, so dass $\gamma.z \in \overline{D}$. Nun gilt aber $\overline{D} \subset U$. Dazu sei $z := x + iy \in \overline{D}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \text{ und } |z| \geq 1 \\
&\Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \\
&\overset{y>0}{\Rightarrow} y \geq \sqrt{1 - x^2} \geq \sqrt{1 - \frac{1}{4}} > -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt für $z \in \mathbb{H}$ beliebig mit $\gamma.z \in \overline{D}$, also $\gamma.z \in U$, dann schlussendlich $|\varphi(z)| = |\varphi(\gamma.z)| \leq P$. Also ist φ auf ganz $\mathbb{H}$ beschränkt. Demnach gilt also

$$|f(z)| \leq P y^{-\frac{k}{2}} \text{ für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Sei $\gamma\colon [0,1], x \mapsto x + iy$ die Verbindungsstrecke von iy nach $iy + 1$. Dann erhalten wir nach [1] V(4.3) für die Koeffizienten $|a_n|$ der Fourierentwicklung speziell für $iy \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\int\limits_{[iy,iy+1]} f(\zeta) \cdot e^{-2\pi in\zeta} \, \mathrm{d}\zeta\right| \\
&= \left|\int_0^1 f(x + iy) \, e^{-2\pi in(x+iy)} \, \mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x + iy)| \left|e^{2\pi ny}\right| \mathrm{d}x \leq P y^{-\frac{k}{2}} e^{2\pi ny}.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für jedes $y > 0$. Für $y = \frac{1}{n}$ erhält man $|a_n| \leq e^{2\pi} P n^{\frac{k}{2}}$. □

(1.7) Bemerkung
Der Exponent kann verbessert werden. Deligne hat gezeigt, dass für eine Spitzenform

$$a_n \in \mathcal{O}\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. ◇

Nun nutzen wir (1.5) und (1.6), um eine Wachstumsaussage über Modulformen zu treffen.

(1.8) Korollar
Ist f eine Modulform, dann gilt

$$a_n \in \mathcal{O}\left(n^{k-1}\right). \qquad \diamond$$

Beweis
Definiere

$$h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad h(z) := f(z) - \frac{a_0}{2\zeta(k)} G_k(z)$$

wobei $G_k(z)$ eine beliebige Eisensteinreihe ist. Diese Funktion liegt in $\mathcal{M}_k$, da dies ein Vektorraum ist, und sie ist wohldefiniert, weil $\zeta(k) > 0$ für alle $k \geq 4$. Aus der Darstellung (1.4) der Eisensteinreihe folgt, dass $G_k(\infty) = 2\zeta(k)$. Demnach ist $h(\infty) = f(\infty) - \frac{a_0 \cdot 2\zeta(k)}{2\zeta(k)} = a_0 - a_0 = 0$. Also ist h eine Spitzenform.
Nun gilt $f(z) = \frac{a_0}{2\zeta(k)} G_k(z) + \left(f(z) - \frac{a_0}{2\zeta(k)} G_k(z)\right)$. Seien $l := \frac{a_0}{2\zeta(k)}$, $n \in \mathbb{N}$ und b_n die Koeffizienten von $G_k(z)$ beziehungsweise c_n diejenigen von h. Es folgt mit (1.5) und (1.6)

$$|a_n| = |lb_n + c_n| \leq |l|\,|b_n| + |c_n| \leq |l|\,K_1 n^{k-1} + K_2 n^{\frac{k}{2}} \leq (|l| + K_1 + K_2)\, n^{k-1}.$$

Also folgt die Behauptung. □

§2 L-Funktionen

In diesem Abschnitt kommen wir zu der Kernfrage, warum Modulformen auch für andere Zweige der Mathematik so wichtig sind. Den Modulformen werden L-Funktionen zugeordnet, indem man ihre Fourierkoeffizienten zu Koeffizienten von Dirichletreihen, den sogenannten L-Funktionen, macht. Diese L-Funktionen sind vermutungsweise universell in dem Sinne, dass L-Funktionen, die in ganz anderen Kontexten definiert sind, sich als identisch mit modularen L-Funktionen erweisen. Im Beispiel der L-Funktionen bestimmter elliptischer Kurven ist dies mit Andrew Wiles bewiesen worden und war die Grundlage für seinen Beweis von Fermats letztem Satz.

(2.1) Definition
Sei f eine Spitzenform vom Gewicht k mit der Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Sei

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}$$

die *L-Reihe* oder *L-Funktion* zu f. $\diamond$

(2.2) Lemma
Die Reihe $L(f,s)$ konvergiert lokal-gleichmäßig absolut im Bereich $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$. $\diamond$

Beweis
Sei $K \subset \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1 \right\}$ eine beliebige, nichtleere, kompakte Teilmenge. Dann existiert ein $M > \frac{k}{2} + 1$, so dass $\mathrm{Re}(s) \geq M$ für alle $s \in K$ gilt, da $\mathrm{Re}(\cdot)$ stetig ist. Des Weiteren wissen wir nach (1.6), dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $|a_n| \leq C n^{\frac{k}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon := M - \frac{k}{2} - 1 > 0$. Es folgt

$$\left| a_n \frac{1}{n^s} \right| \leq C n^{\frac{k}{2}} n^{-\mathrm{Re}(s)} \leq C n^{\frac{k}{2} - M} = C n^{-1-\varepsilon}.$$

Da $-1 - \varepsilon < -1$, folgt die gleichmäßige und absolute Konvergenz aus dem weierstraßschen Majorantenkriterium. Außerdem ist die L-Funktion holomorph nach dem Satz von Weierstraß. $\square$

Es folgen einige Werkzeuge, um Konvergenzaussagen über Dirichletreihen und deren Ableitungen zu treffen.

(2.3) Satz (Abel)

(a) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Folge und $F(x)$ die zugehörige summatorische Funktion, das heißt

$$F\colon [0,\infty), \quad F(x) := \sum_{n \leq x} f(n).$$

Ist die Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $0 < a < b$, stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$\sum_{a<n\le b} f(n) \cdot g(n) = F(b) \cdot g(b) - F(a) \cdot g(a) - \int_a^b F(t) \cdot g'(t) \, \mathrm{d}t.$$

(b) Sind $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ komplexe Folgen und definiert man

$$F(M,N) := \sum_{n=M}^{N} f(n), \quad S(M,N) := \sum_{n=M}^{N} f(n) \cdot g(n), \quad N \ge M,$$

so gilt für alle $N \ge M$

$$S(M,N) = \sum_{n=M}^{N-1} F(M,n) \cdot (g(n) - g(n+1)) + F(M,N) \cdot g(N). \qquad \diamond$$

Beweis
Wir beweisen zunächst (b) und mit dessen Hilfe dann (a).

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=M}^{N-1} F(M,n) \cdot (g(n) - g(n+1)) + F(M,N) \cdot g(N) \\
&= \sum_{n=M}^{N} F(M,n) \cdot g(n) - \sum_{n=M}^{N-1} F(M,n) \cdot g(n+1) \\
&= \sum_{n=M}^{N} F(M,n) \cdot g(n) - \sum_{n=M+1}^{N} F(M,n-1) \cdot g(n) \\
&= F(M,M) \cdot g(M) + \sum_{n=M+1}^{N} (F(M,n) - F(M,n-1)) \cdot g(n) \\
&= f(M) \cdot g(M) + \sum_{n=M+1}^{N} f(n) \cdot g(n) \\
&= S(M,N).
\end{aligned}$$

(a) Wir verwenden (b). Sei dazu $M := [a] + 1$, $N := [b]$.

Dann erhält man mit $F(0) = 0$ die folgende Identität:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a<n\leq b} f(n)\cdot g(n)\\
&= \sum_{n=M}^{N} f(n)\cdot g(n)\\
&= \sum_{n=M}^{N} \left(F(n) - F(n-1)\right)\cdot g(n)\\
&= \sum_{n=M}^{N} F(n)\cdot g(n) - \sum_{n=M-1}^{N-1} F(n)\cdot g(n+1)\\
&= \sum_{n=M}^{N-1} F(n)\cdot \left(g(n) - g(n+1)\right) + F(N)\cdot g(N) - F(M-1)\cdot g(M)\\
&= -\sum_{n=M}^{N-1} \int_{n}^{n+1} F(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{N}^{b} F(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t\\
&\quad + F(b)\cdot g(b) - \int_{a}^{M} F(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t - F(a)\cdot g(a)\\
&= F(b)\cdot g(b) - F(a)\cdot g(a) - \int_{a}^{b} F(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

wenn man $F(t) = F(n)$ für alle $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, berücksichtigt. □

Nun kommen wir zu den in diesem Paragraphen zentralen Objekten zurück: den Dirichletreihen.
Die Konvergenz von Potenzreihen kann mit Kreisen beschrieben werden. Bei Dirichletreihen benötigen wir stattdessen Winkelbereiche.

(2.4) Definition
Für $s_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq \alpha \leq \pi$ heißt

$$W(s_0, \alpha) = \{\, s \in \mathbb{C} \mid |\arg(s - s_0)| \leq \alpha \,\}$$

Winkelbereich mit Spitze s_0 und Öffnungswinkel 2α. ◇

Das Konvergenzverhalten beschreibt der folgende

(2.5) Satz
Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Folge und $D_f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}$ die zugehörige Dirichletreihe. Konvergiert $D_f(s)$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert $D_f(s)$ auf jedem Kompaktum in der Halbebene $\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0) \}$ und auf jedem Winkelbereich $W(s_0, \alpha)$ mit $\alpha < \frac{\pi}{2}$ gleichmäßig. Es gibt ein

$$\sigma_b = \sigma_b(f) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so dass die Reihe $D_f(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > \sigma_b$ konvergiert und für $\operatorname{Re}(s) < \sigma_b$ divergiert. $D_f(s)$ ist auf dem Gebiet $\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \sigma_b \}$ holomorph, wobei die Ableitungen gegeben werden durch

$$D_f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^k \cdot f(n) \cdot n^{-s}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und diese Reihen für $\operatorname{Re}(s) > \sigma_b$ ebenfalls konvergieren. ◇

Man nennt $\sigma_b(f)$ die *Konvergenzabszisse der bedingten Konvergenz von* $D_f(s)$. Man erhält

$$\frac{\partial}{\partial s} D_f(s) = D_f'(s) = -D_{f'}(s) \quad \text{mit} \quad f'(n) := f(n) \cdot \ln(n)$$

als der formalen zahlentheoretischen Ableitung von f.

Beweis
Indem man gegebenenfalls $f(n)$ durch $f(n) \cdot n^{-s_0}$ und s durch $s - s_0$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $s_0 = 0$ annehmen. Also konvergiert

$$D_f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Jedes Kompaktum in der rechten Halbebene $\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0 \}$ ist in einem Winkelbereich $W(0, \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ enthalten. Also genügt es, die gleichmäßige Konvergenz von $D_f(s)$ auf $W(0, \alpha)$ für festes $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nachzuweisen, da aus gleichmäßiger Konvergenz die übliche punktweise Konvergenz sofort folgt.
Zunächst leiten wir einige Abschätzungen her, die uns bei der finalen Abschätzung, die uns zur gleichmäßigen Konvergenz führt, behilflich sind. Dazu setzen wir $g(n) := n^{-s}$ in Satz (2.3). Man erhält für alle $N \geq M \geq 1$

$$S(M, N) = \sum_{n=M}^{N} f(n) \cdot n^{-s} = \sum_{n=M}^{N-1} F(M, n) \cdot \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right) + F(M, N) \cdot N^{-s}.$$

Mit $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ hat man

$$\left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right| = \left|s \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-sx}\,\mathrm{d}x\right| \leq |s| \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = \frac{|s|}{\sigma} \cdot \left|n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right|.$$

Für $s \in W(0,\alpha)$ gilt $s = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$,

$$\frac{|s|}{\sigma} = \frac{\rho}{\rho\cos(\varphi)} = \frac{1}{\cos(\varphi)} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

und somit

$$\left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right| \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}\left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right).$$

Sei nun also $\varepsilon > 0$. Wähle $\varepsilon' > 0$ so klein, dass $\varepsilon' < \frac{\varepsilon\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$. Dann existiert nach dem Cauchy-Kriterium ein $M_0 \in \mathbb{N}$ mit $|F(M,N)| < \varepsilon'$ für alle $N \geq M \geq M_0$, da $D_f(0)$ nach Voraussetzung konvergiert. Dann folgt für alle $N > M \geq M_0$ und alle $s \in W(0,\alpha)$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=M}^{N} f(n)\cdot n^{-s}\right| &\leq \sum_{n=M}^{N-1} |F(M,n)| \cdot \left|\left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right)\right| + |F(M,N)| \cdot \left|N^{-s}\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon'}{\cos(\alpha)} \sum_{n=M}^{N-1}\left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}\right) + \varepsilon' N^{-\sigma} \\ &= \frac{\varepsilon'}{\cos(\alpha)}\left(M^{-\sigma} - N^{-\sigma}\right) + \varepsilon' N^{-\sigma} \leq \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} + 1\right)\varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz in $W(0,\alpha)$. Die Holomorphie und die Darstellung der Ableitungen folgen aus dem Satz von Weierstraß. Die Behauptung über die Konvergenzabszisse folgt mit

$$\sigma_b := \inf\left\{\, \sigma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{es existiert } s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \text{ so dass } D_f(s) \text{ konvergiert} \,\right\}.$$

Im Gegensatz zum Konvergenzverhalten von Potenzreihen erhält man den

(2.6) Satz

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Folge und $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot n^{-s}$ die zugehörige Dirichletreihe. Konvergiert $D_f(s)$ für ein $s = s_0 \in \mathbb{C}$ absolut, so konvergiert die Reihe $D_f(s)$ in der Halbebene $\{\, s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0) \,\}$ absolut gleichmäßig. Es gibt ein

$$\sigma_a = \sigma_a(f) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so dass die Reihe $D_f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma_a$ absolut konvergiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) < \sigma_a$ nicht absolut konvergiert. Dabei gilt

$$\sigma_b \leq \sigma_a \leq \sigma_b + 1. \qquad \diamond$$

Man nennt $\sigma_a(f)$ die *Konvergenzabszisse der absoluten Konvergenz* von $D_f(s)$.

Beweis

Sei $s_0 := \sigma_0 + it_0$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma \geq \sigma_0$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f(n) \cdot n^{-s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma_0} < \infty.$$

Also haben wir absolut gleichmäßige Konvergenz nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium in der Halbebene $\{ s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq \sigma_0 \}$. Die Konvergenzabszisse wird offenbar gegeben durch

$$\sigma_a = \sigma_a(f) = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \mid D_f(\sigma) \text{ konvergiert absolut} \right\}.$$

Da aus absoluter Konvergenz die Konvergenz einer Reihe folgt, hat man $\sigma_b \leq \sigma_a$. Sei nun $\sigma > \sigma_b + 1$. Wegen $\sigma - 1 > \sigma_b$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-(\sigma-1)}$. Als Nullfolge ist $\left(f(n) \cdot n^{-\sigma+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch ein $C > 0$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left| f(n) \cdot n^{-(\sigma+\varepsilon)} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| f(n) \cdot n^{-\sigma+1} \cdot n^{-(1+\varepsilon)} \right| \\
&\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \\
&= C \cdot \zeta(1+\varepsilon) < \infty.
\end{aligned}$$

Also folgt die absolute Konvergenz von $D_f(\sigma + \varepsilon)$ für alle $\sigma > \sigma_b + 1$ und alle $\varepsilon > 0$, d. h., $\sigma_a \leq \sigma_b + 1$. $\square$

Dass die Extremfälle $\sigma_b = \sigma_a$ und $\sigma_b = \sigma_a + 1$ wirklich auftreten können, zeigen die

(2.7) Beispiele

(a) Sei $f(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, also $D_f(s) = \zeta(s)$. Dann gilt $\sigma_a = \sigma_b = 1$, da die Zetafunktion für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert und für $\operatorname{Re}(s) < 1$ divergiert.

(b) Sei $f(n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert

$$D_f(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^{\sigma}$$

für alle $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Also gilt $\sigma_b = 0$, $\sigma_a = 1$.

(c) Gilt $f(n) = n^n$, $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\sigma_a = \sigma_b = \infty$. Gilt $f(n) = n^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, so hat man $\sigma_a = \sigma_b = -\infty$. $\diamond$

Eine Formel für die Konvergenzabszisse beschreiben wir in dem

(2.8) Satz
Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Folge und

$$F(N) = \sum_{n=1}^{N} f(n), \quad N \in \mathbb{N}, \quad D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s}.$$

Wenn $D_f(s)$ an der Stelle $s = 0$ divergiert, so gilt

$$\sigma_b = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(|F(N)|)}{\ln(N)} = \inf\{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid F(N) \in \mathcal{O}(N^\alpha) \,\}. \qquad \diamond$$

Man kann (2.8) als Analogon des Satzes von Cauchy-Hadamard für Dirichletreihen ansehen. Eine Formel für die Konvergenzabszise der absoluten Konvergenz erhält man durch $\sigma_a(f) = \sigma_b(|f|)$ und (2.8).

Beweis
Sei $\gamma := \inf\{\, \alpha \in \mathbb{R} \mid F(N) \in \mathcal{O}(N^\alpha) \,\}$. Es gilt $\gamma \geq 0$ und $\sigma_b \geq 0$, denn angenommen, es wäre $\gamma < 0$. Dann gäbe es ein Element β in der genannten Menge, so dass $\gamma < \beta < 0$ (sonst wäre 0 eine größere untere Schranke). Dann wäre $0 \leq \lim_{n\to\infty} |F(N)| \leq \lim_{n\to\infty} C \cdot n^\beta = 0$. Also wäre $F(N)$ eine Nullfolge. Dann wäre $D_f(s)$ bei $s = 0$ aber konvergent (mit Wert 0); Widerspruch zur Voraussetzung. $\sigma_b \geq 0$ ist klar, weil die Wertemenge der Folge, dessen Limes Superior betrachtet wird, ausschließlich positive Elemente enthält.

1. Behauptung: $\sigma_b \geq \gamma$.
Beweis:
Für $\sigma_b = \infty$ ist die Behauptung klar. Für $\sigma_b < \infty$ sei $\sigma > \sigma_b$. Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{\dot{-}\sigma}$ folgt, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot n^{-\sigma} \right| \leq C \text{ für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz (2.3) erhalten wir wegen $\sigma > 0$ für alle $N > 1$

$$\begin{aligned}
|F(N)| &= \left| \sum_{n=1}^{N} \left(f(n) \cdot n^{-\sigma} \right) \cdot n^{\sigma} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right) \cdot \left(n^{\sigma} - (n+1)^{\sigma} \right) + \left(\sum_{k=1}^{N} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right) \cdot N^{\sigma} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| \sum_{k=1}^{n} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right| \cdot \left((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma} \right) + \left| \sum_{k=1}^{N} f(k) \cdot k^{-\sigma} \right| \cdot N^{\sigma} \\
&\leq C \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \left((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma} \right) + C \cdot N^{\sigma} \\
&= C \cdot (2N^{\sigma} - 1) \leq 2C \cdot N^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\sigma \geq \gamma$, demnach $\sigma_b + \varepsilon \geq \gamma$ für alle $\varepsilon > 0$, also $\sigma_b \geq \gamma$.

2. Behauptung: $\gamma \geq \sigma_b$.
Beweis:
Für $\gamma = \infty$ ist die Behauptung klar. Für $\gamma < \infty$ sei $\sigma > \gamma$. Dann erhalten wir wieder mit (2.3) (b) für $N \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot n^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{N-1} F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right) + F(n) \cdot N^{-\sigma}.$$

Wir wählen ein α mit $\gamma < \alpha < \sigma$ und ein $C > 0$ mit $|F(N)| \leq C \cdot N^{\alpha}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Wegen $\sigma > 0$ hat man dann

$$\begin{aligned}
\left| F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right) \right| &\leq C \cdot n^{\alpha} \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right) \\
&= C \cdot \sigma \cdot n^{\alpha} \int_{n}^{n+1} x^{-\sigma-1} \, \mathrm{d}x \\
&\leq C \cdot \sigma \cdot n^{\alpha} \int_{n}^{n+1} n^{-\sigma-1} \, \mathrm{d}x = C \cdot \sigma \cdot n^{\alpha-\sigma-1}
\end{aligned}$$

sowie

$$\left| F(N) \cdot N^{-\sigma} \right| \leq C \cdot N^{\alpha-\sigma} \to 0 \text{ für } N \to \infty$$

und schließlich

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left| F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right) \right| \leq C \cdot \sigma \cdot \sum_{n=1}^{N-1} n^{\alpha-\sigma-1} \leq C \cdot \sigma \cdot \zeta(\sigma+1-\alpha) < \infty.$$

Weil die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right) \right|$$

absolut konvergiert und damit konvergiert, existiert der Limes

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} F(n) \cdot \left(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma} \right) + F(N) \cdot N^{-\sigma} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-\sigma} = D_f(\sigma).$$

Daraus folgt $\sigma \geq \sigma_b$, demnach $\gamma + \varepsilon > \sigma \geq \sigma_b$ für alle $\varepsilon > 0$, also $\gamma \geq \sigma_b$.

3. Behauptung: $\beta := \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(|F(N)|)}{\ln(N)} = \gamma$.
Beweis:
Sei $\sigma > \gamma$. Dann existiert ein $C > 0$ mit $|F(N)| \leq C \cdot N^{\sigma}$, also

$$\frac{\ln(|F(N)|)}{\ln(N)} \leq \frac{\ln(C)}{\ln(N)} + \sigma \xrightarrow{N\to\infty} \sigma.$$

Es folgt $\sigma \geq \beta$, also $\gamma \geq \beta$. Sei nun $\sigma > \beta$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\ln(|F(N)|)}{\ln(N)} \leq \sigma, \text{ d.h. } |F(N)| \leq N^{\sigma} \text{ für alle } N \geq N_0.$$

Daraus folgt

$$|F(N)| \leq C \cdot N^{\sigma}, \quad C := \max\left\{ 1, \left| F(n)\, n^{-\sigma} \right| \;\middle|\; 1 \leq n < N_0 \right\}.$$

Also hat man $F(N) \in \mathcal{O}(N^{\alpha})$ und damit $\sigma \geq \gamma$ sowie $\beta \geq \gamma$. □

Wir nutzen Teile des vorangegangenen Beweises, um ein kurzes Korollar zu formulieren.

(2.9) Korollar
Ist die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s}$ (absolut) konvergent für $\mathrm{Re}(s) \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so folgt

$$f(n) \in \mathcal{O}\left(n^N\right). \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $0 < \sigma \leq \sigma_b$, wobei σ_b die Konvergenzabszisse der bedingten Konvergenz darstellt. Dann gilt $\sigma_b \leq N$ nach Voraussetzung, also auch $\sigma \leq N$.
Für $n \in \mathbb{N}$ folgt dann mit der 1. Behauptung aus dem vorherigen Beweis, dass $|F(n)| \leq Cn^{\sigma} \leq Cn^N$, wobei $C > 0$. Also gilt $F(n) \in \mathcal{O}\left(n^N\right)$.
Da $f(n) = F(n) - F(n-1)$ nach Definition von $F(n)$, folgt

$$|f(n)| = |F(n) - F(n-1)| \leq |F(n)| + |F(n-1)| \leq Cn^N + C(n-1)^N \leq 2Cn^N$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also die Behauptung (Bemerkung: streng genommen muss $n = 1$ separat betrachtet werden, aber es ist klar, dass wir dementsprechend die Konstante $2C$ anpassen können, so dass die Ungleichung ihre Gültigkeit nicht verliert). □

§3 Das Phragmén-Lindelöf-Prinzip

Der letzte Satz dieses Paragraphen beschäftigt sich mit einem Resultat, das auf E. Phragmén und E. Lindelöf zurückgeht (1908 veröffentlicht). Es erweitert das Maximumprinzip insofern, als Beschränktheit des Randes nicht notwendigerweise vorliegen muss.
Das Phragmén-Lindelöf-Prinzip bringt einen Zusammenhang zum Maximumprinzip hervor, der analog zu folgendem Resultat, einem Spezialfall des verallgemeinerten Satzes von Liouville, verstanden werden kann:
Falls f ganz ist und $|f(z)| \leq 1 + |z|^{\frac{1}{2}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant. Es ist also nicht notwendig, dass eine Funktion global beschränkt ist, um zu zeigen, dass sie konstant ist; es reicht, zu zeigen, dass das Wachstum der Funktion für $z \to \infty$ durch $1 + |z|^{\frac{1}{2}}$ beschränkt ist.
Das Phragmén-Lindelöf-Prinzip setzt voraus, dass die holomorphe Funktion

$$f\colon G \to \mathbb{C},\ G \subset \mathbb{C} \text{ einfach zusammenhängendes Gebiet,}$$

in der Nähe von Punkten des sogenannten erweiterten Randes (Definition folgt später) eine Wachstumsbeschränkung besitzt. Es stellt sich heraus, dass f dann (global) durch eine Konstante beschränkt ist.
Um das Phragmén-Lindelöf-Prinzip vorstellen zu können, sei an dieser Stelle an das schon genutzte Maximumprinzip erinnert.

(3.1) Satz (Satz vom Maximumprinzip (1. Version))
Seien f eine auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion und $a \in G$, so dass $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$. Dann ist f kostant. ◇

(3.2) Satz (Satz vom Maximumprinzip (2. Version))
Sei $G \subset \mathbb{C}$ beschränkt und offen und f eine auf $\overline{G}$ stetige Funktion, die auf G holomorph ist. Dann gilt

$$\max\left\{ \, |f(z)| \, : \, z \in \overline{G} \, \right\} = \max\left\{ \, |f(z)| \, : \, z \in \partial G \, \right\}. \qquad \diamond$$

Wir können die Voraussetzungen abschwächen. Mit einiger Vorarbeit können wir zeigen, dass auf die Beschränktheit von G verzichtet werden kann sowie f nicht unbedingt auf $\overline{G}$ stetig fortsetzbar sein muss. Dafür muss in Kauf genommen werden, dass wir f dann zwar noch auf G beschränken können, aber wir nicht wissen, wo das Maximum angenommen wird. Zunächst benötigen wir die Definition des *Limes superior (inferior) von* $f(z)$ für $z \to a$ und des *erweiterten Randes.*

(3.3) Definition (Limes superior/inferior, erweiterter Rand)
Seien $G \subset \mathbb{C}$ und $f\colon G \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{G}$ oder $a = \infty$. Dann definieren wir den *Limes superior von* $f(z)$ für $z \to a$, geschrieben $\limsup_{z \to a} f(z)$, als

$$\limsup_{z \to a} f(z) := \lim_{r \to 0+} \left(\sup\left\{ \, f(z) \, : \, z \in G \cap K_r(a) \, \right\} \right)$$

Den *Limes inferior* charakterisieren wir in offensichtlicher, analoger Weise.
Es sei $\partial_\infty G$ der Rand von G in $\hat{\mathbb{C}}$, genannt der *erweiterte Rand* von G. Falls G beschränkt ist, so ist natürlich $\partial_\infty G = \partial G$ und $\partial_\infty G = \partial G \cup \{\infty\}$, falls G unbeschränkt. $\diamond$

Jetzt können wir die nächste Version des Maximumprinzips formulieren:

(3.4) Satz (Maximumprinzip (3. Version))
Seien $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und f auf G holomorph. Es existiere eine Konstante M, so dass $\limsup_{z \to a} |f(z)| \leq M$ für alle $a \in \partial_\infty G$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq M \text{ für alle } z \in G. \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $\delta > 0$ beliebig und setze $H := \left\{ \, z \in G \, : \, |f(z)| > M + \delta \, \right\}$. Die Behauptung folgt, sobald gezeigt ist, dass H leer ist. Angenommen, $H \neq \emptyset$.
Die Menge $A := (M + \delta, \infty)$ ist offen. H ist das Urbild von A unter der stetigen Abbildung $G \to \mathbb{R}, z \mapsto |f(z)|$, also ebenfalls offen. Nach Voraussetzung gilt $\limsup_{z \to a} |f(z)| \leq M$ für alle $a \in \partial_\infty G$. Also existiert ein $r > 0$, so dass

$$|f(z)| < M + \delta \text{ für alle } z \in G \cap K_r(a).$$

Also ist $a \notin \partial_\infty H$, da wir eine Umgebung von a gefunden haben, in der kein Element von H liegt. Da $H \subset G$ nach Definition, gilt also $\partial_\infty H \subset G \cup \partial_\infty G$. Nach Obigem folgt für $a \in \partial_\infty H$ dann $a \notin \partial_\infty G$, also $a \in G$. Da G offen ist, exisitiert ein $r > 0$, so dass $K_r(a) \subset G$. Ingesamt gilt demnach $\overline{H} \subset G$. Also ist f auf $\overline{H}$ stetig. Da $\overline{H} \subset G$ auch gilt, falls G unbeschränkt und $a = \infty$ ist, kann ∞ nicht zum Rand von H gehören, so dass H beschränkt sein muss. Da $\partial_\infty H$ nach dieser Überlegung ebenfalls beschränkt ist, ist $\overline{H} = H \cup \partial_\infty H$ beschränkt.

Nun sind die Voraussetzungen der 2. Version des Maximumprinzips erfüllt. Es gilt $\overline{H} = \{ z \in G : |f(z)| \geq M + \delta \}$. Wähle also $a \in \partial H$ so, dass $f(a) = R$ maximal wird, sprich $|f(a)| = R \geq M + \delta$. Für $z \in \overline{H}$ gilt dann $|f(z)| \leq |f(a)|$ und für $z \in G \setminus \overline{H}$ gilt nach Konstruktion von H dann $|f(z)| < M + \delta \leq R = |f(a)|$. Also ist $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$. Also ist f konstant. Nach Voraussetzung gilt dann $f(z) \leq M$ für alle $z \in G$, demnach muss $H = \emptyset$ sein. □

(3.5) Satz (Phragmén-Lindelöf-Prinzip)

Seien $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine auf G holomorphe Funktion. Sei $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$ eine niemals verschwindende, auf G beschränkte, holomorphe Funktion. Falls M eine Konstante ist und $\partial_\infty G = A \cup B$, so dass

(a) Für alle $a \in A$ gilt $\limsup_{z\to a} |f(z)| \leq M$,

(b) für alle $b \in B$, $\eta\mathbb{R}, \eta > 0$, gilt $\limsup_{z\to b} |f(z)|\,|\varphi(z)|^\eta \leq M$,

dann gilt $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in G$. ◇

Beweis

Sei $|\varphi(z)| \leq \kappa$ für alle $z \in G$.

Weil G einfach zusammenhängend ist, besitzt $\varphi(z)$ nach [1] IV(4.6) einen holomorphen Logarithmus, das heißt, es gibt eine holomorphe Funktion $h\colon G \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{h(z)} = \varphi(z) \text{ für alle } z \in G.$$

Sei $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$. Dann ist

$$g\colon G \to \mathbb{C}, g(z) = e^{\eta h(z)} = (\varphi(z))^\eta$$

nach [1] IV(4.8) der zu $h(z)$ gehörige Zweig der η-ten Potenz, der ebenfalls holomorph ist. Da $\eta \in \mathbb{R}$, gilt dann

$$|g(z)| = |\varphi(z)|^\eta \text{ für alle } z \in G.$$

Es sei $F\colon G \to \mathbb{C}$, $F(z) := f(z)\, g(z)\, \kappa^{-\eta}$. Dann ist F auf G holomorph und

$$|F(z)| = |f(z)|\, |g(z)|\, \kappa^{-\eta} \leq |f(z)|\, \kappa^{\eta}\kappa^{-\eta} = |f(z)|\,.$$

Nun gilt

$$\limsup_{z\to a} |F(z)| \leq \limsup_{z\to a} |f(z)| \leq M \leq \max\{M, M\kappa^{-\eta}\}$$

und

$$\limsup_{z\to b} |F(z)| = \limsup_{z\to b} |f(z)|\, |\varphi(z)|^{\eta}\, \kappa^{-\eta} \leq M\cdot\kappa^{-\eta} \leq \max\{M, M\kappa^{-\eta}\}.$$

Also erfüllt F die Bedingung der 3. Version des Maximumprinzips. Demnach ist

$$|F(z)| \leq \max\left\{M, \kappa^{-\eta}M\right\} \text{ für alle } z \in G,$$

also

$$|f(z)| \leq \max\{M, \kappa^{\eta}M\}\, |\varphi(z)|^{-\eta} \text{ für alle } z \in G \text{ und für alle } \eta > 0.$$

Der Grenzübergang $\eta \to 0+$ liefert $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in G$. $\square$

Literatur

[1] A. Krieg, *Funktionentheorie I*, Lehrstuhl A für Mathematik RWTH Aachen, 2010.

[2] A. Deitmar, *Automorphe Formen*, Springer, August 2010.

[3] A. Krieg, *Höhere Funktionentheorie I*, Lehrstuhl A für Mathematik RWTH Aachen.

[4] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer, 1978.