L-Funktionen

SABRINA VORWERK (287774)

28.11.2011

Ausarbeitung zum Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie
beim Herrn Prof. Dr. A. Krieg
Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der folgende Ausarbeitung werden die L-Funktion und einige ihrer Eigenschaften vorgestellt. Als Grundlage dient das zweiten Kapitel des Buches *Automorphe Formen* von A. DEITMAR.

Die L-Funktionen dienen als Anwendungsbeispiel für die im Seminar eingeführten Modulformen. Man erhält sie, indem man die Fourier-Koeffizienten der Modulformen zu Koeffizienten von Dirichlet-Reihen macht. Diese L-Funktionen sind vermutungsweise universell in dem Sinne, dass L-Funktionen, die in ganz anderen Kontexten definiert sind, sich als identisch mit modularen L-Funktionen erweisen. Im Beispiel der L-Funktionen bestimmter elliptischer Kurven ist dies von Andrew Wiles bewiesen worden und war die Grundlage für seinen Beweis von Fermats letztem Satz (vergleiche [YH01, A.2]).

Das erste Kapitel dieser Ausarbeitung dient der Wiederholung grundlegender Konzepte, die für das Verständnis der Arbeit notwendig sind. Sie sind aus den vorangegangen Seminarvorträgen bzw. teilweise sogar aus der Vorlesung Funktionentheorie I bekannt.
Der Hauptteil der Seminararbeit beginnt mit der Definition von L-Funktionen.
Es wird erklärt wie und unter welchen Umständen es möglich ist, die zu einer Spitzenform f bestimmte L-Funktion holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortzusetzen. Die Umkehrung davon, nämlich zu einer holomorph fortgesetzten L-Funktion eine Spitzenform f zu finden, wird im Heck'schen Umkehrsatz erläutert und bewiesen. Zum Beweis des Heck'schen Umkehrsatzes wird die Mellin-Inversionsformel vorgestellt und genutzt und das Phagmen-Lindelöf-Prinzip verwendet.

1 Grundlegende Definitionen und verwendete Resultate aus der Funktionentheorie

Dieser Abschnitt fasst im Wesentlichen die zuvor im Seminar vorgestellten Resultate und Begriffe zusammen ergänzt durch für das Verständnis der Arbeit notwendige Erkenntnisse aus der Funktionentheorie, sodass hier weitgehend auf nähere Erklärungen sowie Beweise verzichtet wird. Zunächst zur

Notation Es bezeichne für die gesamte Ausarbeitung
$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene
$K_R(a) := \{z \in C; |z-a| < R\}$ die Kreisscheibe mit dem Radius R um a und
$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe.
Definiere:
$\partial_\infty G$ als ∂G, falls G beschränkt und sonst $\partial G \cup \{\infty\}$
$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Psi(s)ds := \int\limits_{\gamma} \Psi(s)ds$ mit $\gamma = [c - i\infty, c + i\infty]$

1.1 Eigenschaften holomorpher Funktionen, Meromorphie, Laurent-Entwicklung und Residuen

(1.1) Satz
Sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und sei $f : \mathrm{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq L(\gamma) \max\{|f(z)|; z \in \mathrm{Sp}\gamma\}$$

Beweis
Vergleiche [FT10, Kapitel II, Satz (1.10)]. ■

(1.2) Satz (Satz von Weierstrass)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f ebenfalls holomorph und für jedes $k \in N$ konvergiert die Funktionenfolge $({f_n}^{(k)})_{n\geq 1}$ der k-ten Ableitung ebenfalls lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$. ◇

Beweis
Vergleiche [FT10, Kapitel V, Satz (5.1)]. ■

(1.3) Satz
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wenn die Funktion $f : U \times (a, b) \to \mathbb{C}$ stetig ist und eine Funktion $M : (a, b) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|f(z,t)| \leq M(t) \text{für alle} (z,t) \in U \times (a,b)$$

und das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b M(t)dt$ existiert, dann ist die Funktion

$$F : U \to \mathbb{C}, z \to \int_a^b f(z,t)dt$$

stetig. Ist die Funktion $U \to \mathbb{C}$, $z \to f(z,t)$, für jedes $t \in (a,b)$ darüber hinaus holomorph und $\frac{\delta f}{\delta z}$ stetig, so ist auch F holomorph mit

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\delta f}{\delta z}(z,t)dt.$$

Beweis

Vergleiche [FT10, Kapitel III, Satz (5.3)]. ■

(1.4) Satz (Identitätssatz)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind äquivalent:

(a) f=g

(b) Es gibt ein $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Die Menge $\{z \in G; f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.

(d) Es gibt eine nicht-diskrete Teilmenge $S \subseteq G$ mit $f(z) = g(z)$ für alle $z \in S$. ◇

Beweis

Vergleiche [FT10, Kapitel III, Korollar (3.10)]. ■

(1.5) Definition (meromorph)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, also eine offene, wegweise zusammenhängende Menge. Eine Funktion $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt **meromorph** auf G, falls es eine diskrete Menge $P_f \subseteq G$ gibt, so dass f auf $G \setminus P_f$ holomorph ist und in $z_0 \in P_f$ keine wesentliche Singularität besitzt. ◇

(1.6) Satz (Laurent-Entwicklung und Polstellen)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann gilt:

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $A \subset U$ diskret, mit $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph, so hat f in jedem $a \in A$ eine isolierte Singularität.

(b) Zu f aus (a) existiert eine konvergente **Laurent-Entwicklung** um a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n := \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

für alle $z \in K_R(a) \setminus \{a\}, a_n \in \mathbb{C}$. Der Hauptteil konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ und ist dort holomorph. Der Nebenteil konvergiert lokal gleichmäßig und ist holomorph auf $K_R(a)$ mit $R = \sup\{r > 0; K_r(a)\backslash\{a\} \subset U\backslash A\}$.

(c) Die Funktion f besitzt in $a \in G$ einen **Pol** genau dann, wenn

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{a\}$$

für eine Umgebung $U \subseteq G$ von a und ein $N \in \mathbb{N}$. Diese Zahl heißt dann die **Ordnung** der Polstelle a. ◇

Beweis
Vergleiche [FT10, Kapitel V, Bemerkung (2.2) und Lemma (2.6)]. ■

(1.7) Satz (Residuen)

(a) Die Funktion f habe in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität mit der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, z \in K_R(a) \setminus \{a\},$$

dann nennt man

$$Res_a(f) := a_1 \in \mathbb{C}$$

das **Residuum** von f an der Stelle a.

(b) Es habe die Funktion g in $a \in \mathbb{C}$ einen *einfachen Pol*, so gilt

$$Res_a(g) = \lim_{z \to a}(z-a)g(z)$$

(c) Sei die Funktion h in $a \in \mathbb{C}$ holomorph und habe dort eine einfache Nullstelle, so gilt:

$$Res_a(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h'(a)}$$

Beweis
Vergleiche [FT10, Kapitel VI, Lemma (1.4)]. ■

(1.8) Satz (Weierstrassscher Produktsatz)
Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine komplexe Zahlenfolge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit der Eigenschaft $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$. Sei $(q_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|}\right) < \infty \text{ für alle R>0.}$$

Dann ist

$$f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} E_{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

eine ganze Funktion, die genau in den Stellen a_k, $k \geq 1$, verschwindet und sonst nirgends. ◇

Beweis
Vergleiche [FT10, Kapitel VIII, Lemma (2.15)]. ■

1.2 Fourier-Transformation und Phragmen-Lindelöf-Prinzip

(1.9) Definition (Fourier-Transformierte)
Für $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ sei

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy}dx$$

die **Fouriertransformierte** zu f. ◇

(1.10) Satz
Es gilt $\widehat{\widehat{f}}(y) = f(-y)$ und $\widehat{f}(y) = O((1+|y|)^{-2})$, wobei $O(g(x))$ das Landau-Symbol ist, d.h. wenn $f(x) = O(g(x))$, dann existiert ein $c > 0$ und ein ε für alle x aus dem Definitionsbereich von f, sodass $|f(x)| \leq c$ |g(x)|. ◇

Beweis
Vergleiche [DW02, Kapitel V, Lemma (2.7)]. ■

(1.11) Satz (Phragmen-Lindelöf Prinzip)
Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine auf G holomorphe Funktion. Nehme an, es gäbe eine holomorphe Funkttion $\varphi : G \to \mathbb{C}$, die nie verschwindet und holomorph und beschränkt auf G ist. Wenn M eine Konstante und $\delta_\infty G = A \cup B$, sodass:

(a) für jedes $a \in A$ gilt $\limsup_{z\to a} \sup |f(z)| \leq M$

(b) für jedes $b \in B$ und $\eta > 0$ gilt $\limsup_{z\to a} |f(z)||\varphi(z)|^\eta \leq M$. ◇

dann $|f(z)| \leq M$ für alle z in G.

Beweis
Vergleiche [CW78, Kapitel VI, Theorem (4.1)]. ■

1.3 Modulformen

(1.12) Definition (Modulform)
Sei $f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$ heißt genau dann **schwach modular vom Gewicht k**, wenn für jedes $z \in \mathbb{H}$ gilt:

$$f(z+1) = f(z) \text{ und } f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$$

(b) Eine *schwach modulare Funktion f vom Gewicht k* heißt **modulare Funktion vom Gewicht k**, falls die von f induzierte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{D}^* \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(z) = \tilde{f}(e^{2\pi iz})$ meromorph auf $\mathbb{D}$ ist, sich also die Pole von $\tilde{f}$ nicht in 0 häufen und dort höchstens ein Pol vorliegt.

(c) Sei $f : \mathbb{H} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine *modulare Funktion vom Gewicht k* mit

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}.$$

Dann heißt f eine **Modulform**, falls f holomoph in $\mathbb{H}$ und holomorph in ∞, d.h. $a_n = 0$ für jedes $n < 0$ gilt.
Ist zusätzlich $a_0 = 0$, so heißt f eine **Spitzenform**. Man sagt auch, dass f in ∞ verschwindet.

(d) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine unbeschränkte Menge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, falls für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Funktion $x^N f(x)$ auf dem Definitionsbereich D beschänkt ist. Für $D = \mathbb{N}$ erhält man als Spezialfall den Begriff einer schnell fallenden Folge. ◇

(1.13) Satz
Sei $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine Dirichletreihe, die für $\mathrm{Re}(s) \geq N$, $N \in \mathbb{N}$ konvergiert, dann ist

$$a_n = O(n^N).$$

Beweis
Vergleiche Vortrag 5 Satz (2.9). ■

(1.14) Satz (Satz von Hecke)
Ist f eine *Spitzenform vom Gewicht k*, dann gilt

$$a_n = O(n^{\frac{k}{2}}).$$

Beweis
Vergleiche [Deit10, Satz 2.3.2]. ■

Da in dieser Ausarbeitung die Gamma-Funktion eine Rolle spielt, soll diese kurz wiederholt werden:

1.4 Die Gamma-Funktion

(1.15) Definition (Gamma-Funktion)

Die **Gamma-Funktion** ist für $\mathrm{Re}(z) > 0$ definiert durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

(1.16) Satz

(i) Das Gamma-Integral konvergiert lokal-gleichmäßig absolut im Bereich $\mathrm{Re}(z) > 0$

(ii) Es definiert dort eine holomorphe Funktion.

(iii) Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

(iv) Sie kann zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $z = -n, n \in \mathbb{N}_0$ fortgesetzt werden.

(v) Das Residuum in $z = -n$ ist $\frac{(-1)^n}{n!}$. Ansonsten ist $\Gamma(z)$ holomorph.

(vi) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ ist eine ganze Funktion. ◇

Beweis

(i) Es gilt

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Es ist $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\mathrm{Re}(z)-1}$. Da $\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1} dt < \infty$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ konvergiert das Integral $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ lokal-gleichmäßig absolut nach dem Majorantenkriterium für $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Da e^{-t} schneller fällt als jede Potenz von t, konvergiert das Integral $\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ lokal-gleichmäßig absolut.

(ii) Es gilt $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t+(z-1)\log(t)} dt$. Sei für $\varepsilon > 0$ $U = \{z \in \mathbb{C}; \varepsilon < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{\varepsilon}\}$.

Dann gilt:

$$\int_0^1 |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_0^1 |e^{-t+\varepsilon-1}| dt < \infty.$$

und

$$\int_1^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt = \int_1^\infty |e^{-t+\frac{1}{\varepsilon}-1}| dt < \infty$$

Nach (1.3) ist dann

$$\Gamma(z) = \int_0^1 |e^{-t} t^{z-1}| dt + \int_1^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt$$

holomorph auf U und damit auch auf $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
(iii) Mit zt^{z-1} ist die Ableitung von t^z, rechnet man mit Hilfe von partieller Integration:

$$z\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}(zt^{z-1})dt = -e^{-t}t^z\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}t^z dt$$

Da $\int_0^\infty e^{-t}t^z = \Gamma(z+1)$ gilt

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$

(iv) Also gilt $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Damit wird $\Gamma(z)$ nach $\mathrm{Re}(z) > -1$ mit einem einfachen *Pol* bei $z = 0$ vom *Residuum* $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} = 1$ fortgesetzt. Die meromorphe Fortsetzung auf der ganzen komplexen Ebene erhält man durch Iteration dieses Argumentes. Es gilt

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = ... = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)...(z+n-1)}.$$

Es existieren *Pole* für negative ganze Zahlen und 0.
(v) Das *Residuum* an diesen Stellen ist mit $n \in \mathbb{N}_0$

$$Res_{-n}\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)...(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

(vi) Zeige dazu g(z) erfüllt die gewünschte Eigenschaft und

$$g(z) := e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^\infty (1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}} = \frac{1}{\Gamma(z)}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash(N_0)$.
Wegen $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty$ ist g(z) nach dem Weierstrassschen Produktsatz eine ganze Funktion. Sei nun

$$g_n(z) := e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^n (1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}$$

für $n \in N$ und $z \in \mathbb{C}$.
Dann ist

$$g(1) = \lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty} e^{\gamma - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}(n+1) = \lim_{n\to\infty} e^{\gamma + \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}(1+\frac{1}{n}) = 1$$

da $\lim_{n\to\infty}(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})$ existiert und gleich $0 < c < 1$ ist.

Außerdem

$$\frac{zg(z+1)}{g(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{zg_n(z+1)}{g_n(z)} = \lim_{n\to\infty} e^{\gamma-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}(z+n+1) = \lim_{n\to\infty} e^{\gamma+\ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}(1+\frac{z+1}{n}) = 1$$

Also ist $\frac{1}{g(z)}$ holomorph auf $\mathbb{H}$ mit $\frac{1}{g(1)} = 1$ und $\frac{1}{g(z+1)} = z\frac{1}{g(z)}$ für alle $z \in \mathbb{H}$ Für $0 < a < b$ und z im Vertikalstreifen zwischen a und b hat man

$$|g(z)| \geq e^{\gamma \mathrm{Re}(z)} \mathrm{Re}(z) \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{\mathrm{Re}(z)}{k}) e^{-\frac{\mathrm{Re}(z)}{k}} \geq e^{\gamma a} a \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{b}{k}) e^{-\frac{b}{k}} > 0,$$

da die reele Funktion $x \mapsto (1+x)e^{-x}$ auf $[0,\infty)$ streng monoton fallend ist. Also ist $\frac{1}{g(z)}$ in jedem Vertikalstreifen zwischen a und b beschränkt und $\frac{1}{g(z)} = \Gamma(z)$, $z \in \mathbb{H}$. Die Gleichheit auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ ergibt sich mit dem Identitätssatz.

2 L-Funktionen

(2.1) Definition

Sei f eine *Spitzenform vom Gewicht k*. Dann hat f eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Die **L-Funktion** zu f ist

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n^s} s \in \mathbb{C}.$$

(2.2) Lemma

Die Reihe $L(f,s)$ konvergiert lokal gleichmäßig absolut im Bereich $Re(s) > \frac{k}{2} + 1$ ◇

Beweis

Nach dem *Satz von Hecke* gilt, wenn $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ eine *Spitzenform vom Gewicht k* ist, dann ist

$$a_n = O(n^{\frac{k}{2}}), \text{ also } a_n \leq C n^{\frac{k}{2}}, C \in \mathbb{R}_+.$$

Hier ist dann

$$|a_n n^{-s}| \leq |a_n||n^{-s}| \leq C n^{\frac{k}{2}} n^{-\mathrm{Re}(s)},$$

also

$$a_n n^{-s} = O(n^{\frac{k}{2} - \mathrm{Re}(s)}),$$

also konvergiert die obige Reihe für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$, da dann $a_n = O(n^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ ∎

(2.3) Satz

Sei f eine *Spitzenform vom Gewicht k*.

(i) Dann ist die *L-Funktion* $L(f,s)$ holomorph fortsetzbar zu einer ganzen Funktion.

(ii) Die Funktion

$$\Lambda(f,s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

ist ebenfalls ganz und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Lambda(f,s) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda(f, k-s)$$

(iii) Die Funktion $\Lambda(f,s)$ ist auf jedem Vertikalstreifen beschränkt, d. h. für jedes $T > 0$ existiert ein $C_T > 0$, sodass $|\Lambda(f,s)| \leq C_T$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $|\mathrm{Re}(s)| \leq T$ gilt. ◇

Beweis
Sei $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i z}$.
Nach dem *Satz von Hecke* gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass $|a_n| \leq Cn^{\frac{k}{2}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher ist für $y \geq \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$:

$$|f(iy)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi y}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi y} \leq \sum_{n=1}^{\infty} Cn^{\frac{k}{2}} e^{-2\pi y} \stackrel{*}{\leq} C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{k}{2}} e^{-\varepsilon n \pi} e^{-\pi y} \leq De^{-\pi y}, D \in \mathbb{R}$$

* ($e^{-\varepsilon n\pi - \pi y} = e^{-\pi(\varepsilon n + y)} \geq e^{-2\pi n y} \Leftrightarrow \varepsilon n + y \leq 2ny$
$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon n}{2n+1} \leq y$ gilt mit $\frac{n}{2n+1} \leq 1$ und mit $\varepsilon \frac{n}{2n+1} \leq \varepsilon \leq y$ erfüllt nach Vorraussetzung.)

Damit ist $f(iy)$ *schnell fallend* für $y \geq \varepsilon$. Dann auch $y \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi y n}$ *schnell fallend*. Also gilt für jedes $s \in \mathbb{C}$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi n y} |y^{s-1}| dy < \infty$$

Damit haben wir absolut gleichmäßige Konvergenz, die es erlaubt Integration und Summation zu vertauschen:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy = \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy \stackrel{-2\pi n y = t}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\pi n)^{-s} \int_{2\pi n \varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

Nun gilt für $\varepsilon \to 0$ und für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ dem Konvergenzbereich der L-Funktion:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\pi n)^{-s} \int_{2\pi n \varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \to (2\pi)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n)^{-s} \Gamma(s) = \Lambda(f, s)$$

mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (n)^{-s} = L(f, s)$.
Außerdem gilt

$$(1) f(i\frac{1}{y}) = f(-\frac{1}{iy}) \stackrel{*}{=} (yi)^k f(iy),$$

also gilt mit $f(iy)$ *schnell fallend* auch $f(\frac{i}{y})$ *schnell fallend* (* gilt, da f *(schwach) modular vom Gewicht* k).
Damit konvergiert die linke Seite, denn

$$\int_{\varepsilon}^{a} f(iy) y^{s-1} dy = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(i\frac{1}{y}) y^{-s-1} dy$$

und $f(i\frac{1}{y})$ schnell fallend.
Also:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy \to \int_{0}^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy$$

für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}+1$.
Zusammen gilt nach der Limesbildung also:

$$\star \int_{0}^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy = \Lambda(f,s)$$

für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}+1$.
Nun schreiben wir:

$$\int_{0}^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy = \int_{0}^{1} f(iy)y^{s-1}dy + \int_{1}^{\infty} f(iy)y^{s-1}dy$$

Da $|\Lambda_2(f,s)| \leq \int_1^\infty |f(iy)|y^{\mathrm{Re}(s)-1}dy \leq \int_1^\infty |f(iy)|y^{T-1}dy \leq \tilde{C_T}$ mit $|\mathrm{Re}(s)| \leq T, T \in \mathbb{R}$, ist $\Lambda_2(f,s)$ auf allen Vertikalstreifen beschränkt.
Da $f(iy)$ *schnell fallend* ist, konvergiert $\Lambda_2(f,s) := \int_1^\infty f(iy)y^{s-1}dy$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $|\mathrm{Re}(s)| \leq T, T \in \mathbb{R}$. Es ist durch C_T beschränkt und f ist holomorph. Daher definiert Λ_2 nach Satz (1.3) eine ganze Funktion.
Für das zweite Integral gilt:

$$(2)\Lambda_1(f,s) := \int_{0}^{1} f(iy)y^{s}\frac{dy}{y} \overset{y=\frac{1}{y}}{=} \int_{1}^{\infty} f(i\frac{1}{y})y^{-s}\frac{dy}{y} \overset{(1)}{=} (-1)^{\frac{k}{2}} \int_{1}^{\infty} f(iy)y^{k-s}\frac{dy}{y},$$

wobei immer noch $|\mathrm{Re}(s)| \leq T$. Also auch Λ_1 ganz und Λ als Summe zweier ganzer Funktionen ganz.
Es gilt $|\Lambda_1(f,s)| \leq \int_1^\infty f(iy)y^{k-T}\frac{dy}{y} \leq \tilde{\tilde{C}}_T$.
Zusammen $|\Lambda(f,s)| \leq |\Lambda_1(f,s)| + |\Lambda_2(f,s)| \leq \tilde{\tilde{C}}_T + \tilde{C_T} = C_T$, also $\Lambda(f,s)$ auf allen Vertikalstreifen beschränkt.
Nach (2) gilt:

$$\Lambda_1(f,s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda_2(f,k-s).$$

Damit gilt weiter:

$$\Lambda(f,s) = \Lambda_1(f,s) + \Lambda_2(f,s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda_2(f,k-s) + (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda_1(f,k-s)$$

$$= (-1)^{\frac{k}{2}}(\Lambda_1(f,k-s) + \Lambda_2(f,k-s)) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda(f,k-s)$$

Also:

$$\Lambda(f,s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda(f,k-s)$$

$L(f,s)$ ist also holomorph fortsetzbar zu einer ganzen Funktion, da $\frac{1}{\Gamma}$ und Λ ganz und

$$L(f,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\Lambda(f,s)$$

Nun wollen wir die Umkehrung dieses Satzes in Form des Heck'schen Umkehrsatzes beweisen. Dazu benötigen wir aber noch eine wichtige Hilfsaussage:

(2.4) Satz (Mellin-Inversionsformel)
Sei g zweimal stetig differenzierbar auf die Intervall $(0,\infty)$ und für ein $c \in \mathbb{R}$ gelte

$$x^c g(x), x^{c+1}g'(x), x^{c+2}g''(x) \in L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dx}{x}),$$

Dann existiert die Mellin Transformation

$$\mathcal{M}g(s) := \int_0^\infty x^s g(x)\frac{dx}{x}$$

für $Re(s) = c$.
Es gilt $\mathcal{M}g(c+i\,t) = O((1+|t|)^{-2})$, sowie

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\mathcal{M}g(s)ds.$$

Beweis
Sei $Re(s) = c$. Wir schreiben dann $s = c - 2\pi iy$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Substituieren wir $x = e^t$, so erhalten wir

$$\mathcal{M}g(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{st}g(e^t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{ct-2\pi iyt}g(e^t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ct}g(e^t)e^{-2\pi iyt}dt := \widehat{F}(y).$$

mit $F(t) = e^{ct}g(e^t)$. Aus den Voraussetzungen folgt, dass F zweimal stetig differenzierbar ist. Weiter gilt $F, F', F'' \in L^1(\mathbb{R})$, da mit $e^t = x$ und der Abgeschlossenheit von $L^1(\mathbb{R})$ bezüglich Addition
$F(t) = e^{ct}g(e^t) = x^c g(x) \in L^1(\mathbb{R})$
$F'(t) = ce^{ct}g(e^t) + e^{t(c+1)}g'(e^t) = cx^c g(x) + x^{c+1}g'(x) \in L^1(\mathbb{R})$
$F'(t) = c^2e^{ct}g(e^t) + e^{t(c+1)}g'(e^t) + (c+1)e^{t(c+1)}g'(e^t) + e^{t(c+2)}g''(e^t) =$
$c^2x^cg(x) + x^{c+1}g'(x) + (c+1)x^{c+1}g'(x) + x^{c+2}g''(x) \in L^1(\mathbb{R})$

Ferner ist $\widehat{F}(y) = \mathcal{M}g(s) = \mathcal{M}g(c - 2\pi iy)$. Daher folgt nach der Fourier-Inversionsformel:

$$\begin{aligned}
e^{ct}g(e^t) = F(t) = \widehat{\widehat{F}}(-t) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(y)e^{2\pi iyt}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}g(c - 2\pi iy)e^{2\pi iyt}dy = \lim_{R\to\infty} \int_{-\frac{R}{2\pi}}^{\frac{R}{2\pi}} \mathcal{M}g(c - 2\pi iy))e^{2\pi iyt}dy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{M}g(c + iy))e^{-(c+iy)t}idy = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{ct}}{2\pi i} \int_{[c-iR,c+iR]} \mathcal{M}g(s)e^{-st}ds \\
&= \frac{e^{ct}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}g(s)e^{-st}ds
\end{aligned}$$

nach teilen durch e^{ct} und zurückeinsetzen von $x = e^t$ folgt die Behauptung.
Nun nur noch zur Abschätzung von $\mathcal{M}g$.
Es ist $\widehat{F}(y) \leq C((1 + |y|)^{-2})$. Damit gilt

$$|\mathcal{M}g(c + it)| \leq C(1 + |\frac{t}{2\pi}|)^{-2} = C(\frac{1}{2\pi}(2\pi + |t|))^{-2} = (2\pi)^2C(2\pi + |t|) \leq (2\pi)^2C((1 + |t|)^{-2}.$$

Also $\mathcal{M}g(c + it) = O((1 + |t|)^{-2})$. ■

Nun zu Heckes Umkehrsatz:

(2.5) Satz (Heckes Umkehrsatz)
Sei a_n eine Folge in $\mathbb{C}$, sodass die Dirichletreihe $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ für $Re(s) > C$, $C \in \mathbb{R}$ konvergiert. Falls sich die Funktion

$$\Lambda(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s)$$

zu einer ganzen Funktion fortsetzt, die die Funktionalgleichung

$$\Lambda(s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda(k - s)$$

erfüllt und in jedem Vertikalstreifen beschränkt ist, dann gibt es eine *Spitzenform* $f \in S_k$ mit

$$L(s) = L(f, s).$$

Beweis
Sei also a_n eine Folge in $\mathbb{C}$, sodass die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ für $Re(s) > C$ konvergiert für ein $C \in \mathbb{R}$. Wir definieren $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}$.

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $\mathrm{Re}(s) \geq N$ nach Satz (1.13) die Dirichlet-Reihe $L(s)$ absolut konvergiert. Wähle hier zum Beispiel $N = \max\{1, \ulcorner C \urcorner\}$. Daher ist (1) $a_n = O(n^N)$, also konvergiert die Reihe $f(z)$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{H}$ und definiert eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$, nach dem Satz von Weierstrass mit $|a_n e^{2\pi inz}| \leq Cn^N e^{-2\pi ny} \leq Cn^N e^{-2\pi n\varepsilon}$ mit $y \geq \varepsilon > 0$. Wir müssen nun zeigen, dass f eine *Spitzenform vom Gewicht k* ist. Die Periodizität folgt dabei mit den Eigenschaften von e. Es gilt:

$$f(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi in(z+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi in} e^{2\pi inz} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi inz} = f(z)$$

Also ist nur noch zu zeigen $f(\frac{-1}{z}) = z^k f(z)$.
Da f holomorph ist, reicht es nach dem *Identitätssatz*, zu zeigen dass $f(\frac{-1}{iy}) = f(\frac{i}{y}) = (iy)^k f(iy)$ für $y > 0$ gilt.

Zunächst wollen wir zeigen, dass die *Mellin-Transformation* der Funktion $f(iy)$ existiert und dass die *Mellin-Inversionsformel* gilt. Es gilt

$$|f(iy)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi ny}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi ny} \leq k \sum_{n=1}^{\infty} n^N e^{-2\pi ny}$$

$k \in \mathbb{R}$ fest.
$y \mapsto k \sum_{n=1}^{\infty} n^N e^{-2\pi ny}$ ist eine reelle Funktion.
Definiere die komplexe Funktion $\tilde{g_N}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^N e^{-2\pi nz}$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$. Für $\tilde{g_0}(z)$ gilt:

$$\tilde{g_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi zn} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi z}}$$

unter Verwendung der geometrischen Reihe, da $|e^{-2\pi z}| < 1$.
Man sieht nun, dass $\tilde{g_0}(z)$ in $i\mathbb{Z}$ *Pole der Ordnung 1* hat. Bestimme das *Residuum* in $z = 0$:

$$a_1 = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(1 - e^{-2\pi z})'} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2\pi e^{-2\pi z}} = \frac{1}{2\pi}$$

Nach der *Laurentreihenentwicklung* und der Aufspaltung in Hauptteil und Nebenteil erhält man:

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi z}} = \frac{1}{2\pi z} + h(z)$$

für alle $z \in K_1(0)\backslash\{0\}$ und $h(z)$ in $z = 0$ holomorphe Funktion. Wegen $\tilde{g_N}(z) = \frac{1}{(-2\pi)^N} \tilde{g_0}^{(N)}(z)$, gilt für diese z

$$\tilde{g_N}(z) = \frac{(-1)^N}{(-2\pi)^N 2\pi z^{N+1}} + h^{(N)}(z) = \frac{\tilde{c}}{z^{N+1}} + h^{(N)}(z).$$

Betrachte nun wieder $g_N(y) = \tilde{g_N}(y)$ für $z = y \in \mathbb{R}$. Da auch $h^{(N)}(y)$ in $y = 0$ holomorph, gilt für $y \to 0$

$$|g_N(y)| = |\frac{\tilde{c}}{y^{N+1}} + h^{(N)}(y)| \leq \frac{\tilde{c}}{y^{N+1}}.$$

Nach der Wahl von $g_N(y)$ gilt diese Abschätzung genauso für $f(iy)$. Für $y > 1$ und $k \in \mathbb{C}$ konstant ist $|f(iy)| \leq k g_N(y)$ mit

$$g_N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^N e^{-2\pi n y} \overset{*}{\leq} e^{-2\pi(y-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^N e^{-2\pi n} = e^{-2\pi y} e^{2\pi} g_N(1).$$

(* $e^{-2\pi n y} \leq e^{y 2\pi} e^{-2\pi n} e^{-2\pi} \Leftrightarrow -2\pi n y \leq -2\pi(y + n - 1) \Leftrightarrow ny \geq y + (n-1) \Leftrightarrow (n-1)y \geq (n-1) \Leftrightarrow y \geq 1$ wahr nach Vorraussetzung.)
Wegen $|f(iy)| \leq e^{-2\pi y} e^{2\pi} g_N(1)$ist $f(iy)$ *schnell fallend* für $y \to \infty$.

Dieselbe Abschätzung gilt auch für jede Ableitung von f, wobei eventuell N vergrößert werden muss. Für f' gilt beispielsweise $|f'(iy)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(-2\pi n)| e^{-2\pi n y}$. Definiere $b_n = a_n(-2\pi n)$. Dann $b_n \in O(n^{N+1})$. Also geht der Beweis genauso mit $\sum_{n=1}^{\infty} n^{N+1} e^{-2\pi n y} := g_{N+1}(y) \leq e^{-2\pi y} e^{2\pi} g_{N+1}(1)$ und gleiche Eigenschaften von $g_{N+1}(y)$.
Es gilt dann $|f'(iy)| \leq k e^{-2\pi y} e^{2\pi} g_{N+1}(1)$, also $f'(iy)$ schnell fallend. Damit existiert $\int_a^{\infty} f(iy) y^{c-1} dy$ für alle $c \in \mathbb{R}$

Es ist $|f(iy)y^{c-1}| \leq \frac{k\tilde{c}}{y^{N+1}} y^{c-1} = k\tilde{c} y^{c-2-N}$. Damit ist

$$\left| \int_0^a f(iy) y^{c-1} dy \right| \leq \int_0^a |f(iy) y^{c-1}| dy \leq \int_0^a k\tilde{c} y^{c-2-N} dy$$

genau dann beschränkt, wenn $c - 2 - N > -1$, also $c > N + 1$. Genauso sind $x^{c+1} f'(iy)$ und $x^{c+2} f''(iy)$ für $c > N + 1$ in $L^1(\mathbb{R}_+)$. Beispielsweise gilt mit $|f'(iy) y^{c+1}| \leq \frac{k\tilde{c}}{y^{N+2} y^c} = k\tilde{c} y^{c-2-N}$ genauso, dass $\left| \int_0^{\infty} f'(iy) y^{c+1} dy \right| < \infty$ für $\mathrm{Re}(s) = c > N + 1$.
Also existiert die Mellin-Transformation

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{\infty} y^s f(iy) \frac{dy}{y}$$

für $\mathrm{Re}(s) > N + 1$ und da $f(iy)$ schnell fallend ist für $y \to \infty$, sind die Voraussetzungen der Mellin-Inversionsformel erfüllt. Nach der Mellin-Inversionsformel und $\star$ aus dem Beweis von Satz (2.3) gilt dann für jedes $\mathrm{Re}(s) = c > N + 1$,

$$f(iy) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^{-s}\mathcal{M}f(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^{-s}\int\limits_{0}^{\infty} y^{s}f(y)\frac{dy}{y}ds \stackrel{\star}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Lambda(s)y^{-s}ds.$$

Zeige nun

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Lambda(s)y^{-s}ds = \int\limits_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty}\Lambda(s)y^{-s}ds,$$

also trotz Verschiebung des Integralwegs bleibt das Integral gleich.
O.B.d.A. sei $c > N+1$. Definiere $\Psi(s) := \Lambda(s)y^{-s}$.
Wähle $\gamma_1^* = [c-i\infty, c+i\infty], \gamma_1 = [c-ih, c+ih], \gamma_3^* = [k-c+i\infty, k-c-i\infty], \gamma_3 = [k-c+ih, k-c-ih]$, $\gamma_2 = [c+ih, k-c+ih]$, $\gamma_4 = [k-c-ih, c-ih]$, mit $h,k \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt nach dem Cauchy-Integralsatz mit $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus -\gamma_3 \oplus \gamma_4$ ist ein geschlossener Weg und Ψ ganz:

$$\int\limits_{\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus-\gamma_3\oplus\gamma_4}\Psi(s)ds = 0$$

Betrachte auf beiden Seiten den Limes $h \to \infty$

$$0 = \int\limits_{\gamma_1}\Psi(s)ds + \int\limits_{\gamma_2}\Psi(s)ds + \int\limits_{-\gamma_3}\Psi(s)ds + \int\limits_{\gamma_4}\Psi(s)ds$$
$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_1}\Psi(s)ds + \lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_2}\Psi(s)ds + \lim_{h\to\infty}\int\limits_{-\gamma_3}\Psi(s) + \lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_4}\Psi(s)ds$$

Wenn nun, wie zu zeigen ist,

$$\lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_1}\Psi(s)ds = \lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_3}\Psi(s)ds$$

muss

$$\lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_2}\Psi(s)ds = -\lim_{h\to\infty}\int\limits_{\gamma_4}\Psi(s)ds$$

bzw. beide gleich Integrale sind = 0.

Nach Satz (1.1) gilt:

$$\int\limits_{\gamma_2}\Psi(s) \leq L(\gamma_2)\max\{|\Psi(s)||s \in \mathrm{Sp}(\gamma_2)\}$$

Versuche nun zu zeigen, dass $|\Lambda(s)y^{-s}| = |\Psi(s)| \leq M|s|^{-2}$ mit $M \in \mathbb{R}_+$ und $s \in \mathbb{C}$, $k-c \leq \mathrm{Re}(s) \leq c$ und

$T < |\mathrm{Im}(s)|$ und $T \in \mathbb{R}_+$. Dabei kann man $k - c \le c$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen. Also zeige

$$|\vartheta(s)| := |s^2 \Lambda(s) y^{-s}| \le M.$$

Wähle

$$G = \{z \in \mathbb{C} | k - c \le \mathrm{Re}(z) \le c, T < \mathrm{Im}(z)\}$$

und definiere

$$A = \partial G \text{ und } B = \{i\infty\}.$$

Nach Satz (2.3)(iii) ist bekannt, dass $\Lambda(s)$ auf jedem Vertikalstreifen beschränkt ist, also

$$|\Lambda(s)| \le M_1 \text{ für alle } s \in G \text{ und } M_1 \in \mathbb{R}_+.$$

Nach dem Satz von Mellin (2.4) gilt:

$$|\Lambda(c + it)| \le M_2 \frac{1}{(1 + |t|)^2} \text{ für } M_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\Lambda(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda(k - s)$ gilt auch

$$|\Lambda(k - c + it)| \le M_2 \frac{1}{(1 + |t|)^2}$$

für $M_2 \in \mathbb{R}_+$, und $t \in \mathbb{R}$.
Auf dem unteren Rand findet man ein $M_3 \in \mathbb{R}_+$, sodass $|\vartheta(s)| \le M_3$ für alle s aus diesem Rand, da dieser kompakt ist.
Wir wissen nun, dass auf dem Vertikalstreifen G für $s = \sigma + it$ mit $\sigma \in [c, k - c]$ gilt

$$|\vartheta(s)| = |\vartheta(\sigma + it)| = |(\sigma + it)^2 \Lambda(\sigma + it) y^{-\sigma + it} \le |\sigma + it|^2 \frac{M_2}{(1 + |t|)^2} |y^{-\sigma}| \le M_4$$

Wähle nun $M = \max\{M_3, M_4\}$ und erhalte wie gewünscht $|\vartheta(s)| \le M$ für $s \in A$.

Nun zu $s \in B$. Sei $\tau(s) = e^{is}$, $t > T$, $T \in \mathbb{R}_+$
$|\vartheta(s)||\tau(s)|^\eta \le (\sigma^2 + t^2)|\Lambda(\sigma + it)||y^{-(\sigma + it)}||e^{i\eta\sigma - \eta t}| \le (\sigma^2 + t^2) M_1 |y^{-\sigma}||e^{-\eta t}| \to 0$ für $t \to \infty$ wegen Eigenschaften von e, also $\lim\limits_{t\to\infty} \sup |\vartheta(s)||\tau(s)|^\eta \le M$ $s \in B$.
Da $|\vartheta(s)||\tau(s)|^\eta$ Nullfolge, kann man das M von oben als Schranke wählen.

Damit sind alle Vorraussetzungen vom Phragmen-Lindelöf-Prinzip erfüllt und es folgt $|\vartheta(s)| \le M$ für alle

$s \in G$. Es gilt

$$\int_{\gamma_2} \Psi(s) \leq L(\gamma_2) \max\{|\vartheta(s)| | s \in \mathrm{Sp}(\gamma_2)\} \leq L(\gamma_2) \max\{M|s^{-2}| | s \in \mathrm{Sp}(\gamma_2)\}.$$

Da $\max\{M|s^{-2}| | s \in \mathrm{Sp}(\gamma_2)\} \to 0$ für $h \to \infty$, also $|s| \to \infty$ gilt $\int\limits_{\gamma_2} \Psi(s)ds = 0$.

Zeige nun dasselbe für γ_4, also $\int\limits_{\gamma_4} \Psi(s)ds = 0$

Der Beweis dazu verläuft analog zu dem Beweis für γ_2. Ersetze nur statt $s = \sigma + it$, $s = \sigma - it$ und wähle $\tau(s) = e^{-is}$.

Da nun also $\lim\limits_{h\to\infty} \int\limits_{\gamma_2} \Psi(s)ds = \lim\limits_{h\to\infty} \int\limits_{\gamma_4} \Psi(s)ds = 0$ folgt

$\lim\limits_{h\to\infty} \int\limits_{\gamma_1} \Psi(s)ds = \lim\limits_{h\to\infty} \int\limits_{\gamma_3} \Psi(s)ds \Leftrightarrow \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Psi(s)ds = \int\limits_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty} \Psi(s)ds \Leftrightarrow \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda(s)y^{-s} = \int\limits_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty} \Lambda(s)y^{-s}$.

Mit $\Lambda(s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\Lambda(k-s)$ aus Satz (2.5) folgt:

$f(iy) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty} \Lambda(s)y^{-s}ds = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{k-c-i\infty}^{k-c+i\infty} \Lambda(k-s)y^{-s}ds = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2\pi i} \int\limits_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Lambda(s')y^{s'-k}ds' =$

$(iy)^{-k}\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Lambda(s')y^{s'}ds' = (iy)^{-k}f(iy)$

Also ist f *Spitzenform vom Gewicht k* und damit folgt die Behauptung. ∎

A Anhang

newpage

Literatur

[Deit10] Anton Deitmar, *„Automorphe Formen"*, Springer-Verlag Heidelberg Dordrecht London New York, 1. Auflage, 2010

[YH01] Yves Hellegouarch, *„Invitation to the mathematics of Fermat-Wiles"*, Academic Press, 2001

[FT10] Aloys Krieg *„Funktionentheorie I"*, Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen 2010

[KK07] Max Koecher und Aloys Krieg, *„Elliptische Funktionen und Modulformen"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2007

[DW02] Dirk Werner, *„Funktionalanalysis"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4. Auflage, 2002

[CW78] John B. Conway, *„Functions of one complex variable"*, Springer-Verlag, 2. Auflage, 1978 Conway, Functions of one complex variable