Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 21. Oktober 2011

Topologie, Übungsblatt 2

Abgabe bis Freitag, den 28. Oktober 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 5 (2+1 Punkte) Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

(a) Es sei für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\mathfrak{B}_x$ gegeben, d. h. $\mathfrak{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ und für alle $U \in \mathcal{U}_x$ gibt es ein $V \in \mathfrak{B}_x$ mit $V \subset U$. Zeigen Sie: Falls alle $\mathfrak{B}_x$ Teilmengen von $\mathfrak{T}$ sind, ist die Vereinigung $\mathfrak{B} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x$ eine Basis von $\mathfrak{T}$.

(b) Geben Sie bezüglich der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ ein Beispiel einer Umgebungsbasis von 0 an, die keine offene Menge enthält.

Aufgabe 6 (2 Punkte) Es sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{2\}, (0,2], [2,4], (0,4], \mathbb{R}\}$. Geben Sie für alle $x \in \{1,2,3,4\}$ die Menge $\mathcal{U}_x$ der Umgebungen von x an (bez. $\mathfrak{T}$; ohne Beweis).

Aufgabe 7 (2+2+2 Punkte) Es seien die Mengen $M_1 = \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, $M_2 = (-1,1)$ und $M_3 = \mathbb{Z}$ gegeben. Geben Sie M_i°, $\overline{M_i}$ und ∂M_i für alle $i \in \{1,2,3\}$ in den topologischen Räumen

(a) $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_{\text{nat}})$,

(b) $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_1)$ mit $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, (0,2], \{2\}, [2,4], (0,4], \mathbb{R}\}$ (vgl. Aufgabe 6) und

(c) $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_2)$, wo $\mathfrak{T}_2$ die von der Basis $\mathfrak{B} = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$ erzeugte Topologie ist. Es ist $\mathfrak{T}_2 = \{A \subset \mathbb{R} : \forall a \in A : \ a + \mathbb{Q} \subset A\}$.

Algebraisch gesehen ist $\mathfrak{B} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (wobei die additive Gruppe $\mathbb{R}$ modulo ihrem Normalteiler $\mathbb{Q}$ gemeint ist).

Sie brauchen in keinem Aufgabenteil zu zeigen, dass es sich jeweils um einen topologischen Raum handelt. Als Antwort reicht z. B. je eine Tabelle in Teil a), b) und c) aus.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben sei die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ (x,y) : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x < 1 \right\}$$

Bestimmen Sie den Abschluß, den offenen Kern und den Rand von A bezüglich euklidischen, der diskreten und der gröbsten Topologie auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 9 (2 Punkte) Es sei (X, d) ein pseudometrischer Raum. Für $x \in X$ und $A \subset X$ sei $d(x, A) = \inf \{d(x,y) : y \in A\}$. Zeigen Sie: Es gilt $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.