Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 30. Oktober 2011

Topologie, Übungsblatt 3

Abgabe bis Freitag, den 4. November 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 10 (3 Punkte) Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat in der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$ keine abzählbare Umgebungsbasis.

Aufgabe 11 (2 Punkte) Es sei X eine Menge mit der Topologie:

$$\mathfrak{T} = \{A \subset X : X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$$

Beweisen Sie: Eine Folge $(x_n)_n$ konvergiert genau dann in dieser Topologie, wenn sie konstant wird, d. h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x_r$ für alle $k, r \geq N$.

Aufgabe 12 (2+2 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Die Räume $\ell^p(\mathbb{N})$ sind separabel für $1 \leq p < \infty$.

(b) Der Raum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel.

Hinweis: Betrachten Sie Kugeln mit Radius 1 um Folgen mit Werten ± 1.

Aufgabe 13 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die Sorgenfrey-Topologie besitzt keine abzählbare Basis.

(b) Folgern Sie: Die Sorgenfrey-Topologie ist nicht pseudometrisierbar.