Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 7. November 2011

Topologie, Übungsblatt 4

Abgabe bis Freitag, den 11. November 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 14 (1+1+1 Punkte)

Die Menge $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sei mit der folgenden Topologie $\mathfrak{T}$ versehen:

Für $x \neq (0,0)$ sei $\mathfrak{F}_x$ der Umgebungsfilter der diskreten Topologie, der Filter $\mathfrak{F}_{(0,0)}$ bestehe aus den Mengen A mit den Eigenschaften $(0,0) \in A$ und $M_m = \{n \in \mathbb{N}_0 : (n,m) \notin A\}$ endlich für fast alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Topologie, in der $\mathcal{U}_x = \mathfrak{F}_x$ ist.

(b) Es gibt keine Folge in $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \setminus \{(0,0)\}$, die gegen $(0,0)$ konvergiert.

(c) Es gibt eine Folge in $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \setminus \{(0,0)\}$, die $(0,0)$ als Häufungspunkt besitzt.

Insbesondere ist $(0,0)$ nicht Limes einer Teilfolge.

Aufgabe 15 (1+2 Punkte) Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

(a) Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist die Funktion

$$X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

stetig bezüglich der durch die Metrik d definierten Topologie.

(b) Zu je zwei abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen A und B von X mit $A \cap B = \emptyset$ existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

Aufgabe 16 (2 Punkte) Es sei I endlich. Untersuchen Sie ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 17 (1+1 Punkte) Es sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

Zeigen Sie die Abgeschlossenheit folgender Mengen:

(a) Die Menge der Berührpunkte eines Filters $\mathfrak{F}$ auf X.

(b) Die Menge der Häufungspunkte eines Netzes $(x_i)_{i \in I}$ in X.

Aufgabe 18 (2 Punkte) Es sei X eine unendliche Menge mit der kofiniten Topologie. Es sei $\mathfrak{F}$ der Filter, dessen Basis aus allen Mengen mit endlichem Komplement besteht. Bestimmen Sie die Berührpunkte des Filters $\mathfrak{F}$.