LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 13. November 2011

Topologie, Übungsblatt 5

Abgabe bis Freitag, den 18. November 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 19 (3 Punkte) Es sei $X = [0,1]$. Das System

$$\mathfrak{T} = \{A \subset X : X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$$

ist eine Topologie auf X. Es bezeichne $\mathfrak{T}_{\text{nat}}$ die euklidische Topologie auf X und:

$$f : (X, \mathfrak{T}) \to (X, \mathfrak{T}_{\text{nat}}), x \mapsto x$$

Beweisen Sie:

Die Funktion f ist nicht stetig, obwohl die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ für jede in $(X, \mathfrak{T})$ konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Insbesondere genügt $(X, \mathfrak{T})$ nicht dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 20 (2+1 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Initialtopologie auf $\mathbb{R}$, die induziert wird von $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, also den stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$.

(b) Es seien $\mathfrak{S} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ und $\mathfrak{T}$ die von den Mengen aus $\mathfrak{S}$ erzeugte Topoloie auf $\mathbb{R}$. Ferner sei $\mathfrak{T}^*$ die Initialtopologie auf $\mathbb{R}$ bezüglich der Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathfrak{T}), x \mapsto cx + d(c, d \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{T}^*$ die diskrete Topologie ist.

Aufgabe 21 (1+1+1 Punkte) Es sei $(Y, \mathfrak{T}|\,Y)$ ein Unterraum von $(X, \mathfrak{T})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{T}$, dann ist $\mathfrak{B}_{\text{rel}} = \{B \cap Y \subset Y \mid B \in \mathfrak{B}\}$ eine Basis von $\mathfrak{T}|\,Y$.

(b) Ist $\mathfrak{B}_y$ eine Umgebungsbasis von $y \in Y$ bez. $\mathfrak{T}$, dann ist $\mathfrak{B}_{\text{rel},y} = \{B \cap Y \subset Y \mid B \in \mathfrak{B}_y\}$ eine Umgebungsbasis von y bezüglich $\mathfrak{T}|\,Y$.

(c) Die Eigenschaft, das erste oder zweite Abzählbarkeitsaxiom zu erfüllen ist erblich, d. h. wenn $(X, \mathfrak{T})$ das erste (bzw. zweite) Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann erfüllt auch $(Y, \mathfrak{T}|\,Y)$ das erste (bzw. zweite) Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 22 (2 Punkte) Es sei $\mathfrak{T}_{\text{nat}}$ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Produkttopologie von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ ist die Topologie, die von einer Norm auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird.

Aufgabe 23 (2 Punkte) Es sei X ein normierter reeller Vektorraum, d. h. die Norm definiert die Topologie auf X. Zeigen Sie: Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ und Vektorraddition $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ sind stetig, wobei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie und $\mathbb{R} \times X$ und $X \times X$ mit der entsprechenden Produkttopologie versehen wird.