Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 18. November 2011

Topologie, Übungsblatt 6

Abgabe bis Freitag, den 25. November 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 24 (2+2 Punkte) (Zusammenkleben topologischer Räume) Es seien X, Y o. E. disjunkte topologische Räume, $Z = X \cup Y$ versehen mit der Summentopologie, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to Y$ stetig. Es sei R die Äquivalenzrelation auf Z mit den Klassen:

$$\{x\}, x \notin A; \{y\}, y \notin f(A); f^{-1}(f(x)) \cup \{f(x)\}, x \in A$$

Der Quotientenraum Z/R mit der Quotiententopologie wird der *durch Zusammenkleben von X und Y mit f* entstandene Raum genannt und mit $X \cup_f Y$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie für die kanonische Projektion $p : Z \to X \cup_f Y$: Es ist $p(Y)$ abgeschlossen, $p(X \backslash A)$ offen und die Einschränkungen von p auf Y und auf $X \backslash A$ sind Homöomorphismen.

(b) Es seien $X = [0,1]$, $Y = \{y_0\}$, $A = \{0,1\}$, $f(0) = f(1) = y_0$. Dann ist $X \cup_f Y$ homöomorph zum Torus $\mathbb{T}$ in der euklidischen Topologie.

Aufgabe 25 (1+1+1+1+1 Punkte) Es sei d eine Pseudometrik auf X, $\mathfrak{T}_d$ die von d induzierte Topologie. Zeigen Sie:

(a) Durch $R = \{(x,y) : d(x,y) = 0\}$ wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

(b) Für alle Äquivalenzklassen $A = R[x] \in X/R$ ist die Spurtopologie $\mathfrak{T}|A$ die gröbste Topologie.

(c) Es seien $A, B \in X/R$ beliebig. Durch $\widetilde{d}(A,B) = d(x,y)$, $x \in A$, $y \in B$ wird eine Metrik auf X/R (wohl-)definiert. $\widetilde{d}$ induziert die Quotiententopologie.

(d) Für alle metrischen Räume (Y, d') und alle stetigen $f : X \to Y$ gibt es genau ein stetiges $g : X/R \to Y$ mit $f = g \circ q_R$.

(e) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein X konvergiert genau dann, wenn die Folge $(R[x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ in X/R konvergiert.

Aufgabe 26 (2+2 Punkte) (a) Es seien $\mathfrak{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, pseudometrische Topologien auf X. Zeigen Sie: Dann ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}_n$ eine pseudometrisch.

Hinweis: Man betrachte $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}$.

(b) Es seien X_i, $i \in I$, topologische Räume und $|X_i| \geq 2$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie: Der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist metrisierbar genau dann, wenn I abzählbar und X_i metrisierbar für alle $i \in I$ ist.