Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 25. November 2011

Topologie, Übungsblatt 7

Abgabe bis Freitag, den 2. Dezember 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 27 (1+1+1 Punkte) Es sei X ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/R$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(a) Ist X/R ein Hausdorff-Raum, dann ist R abgeschlossen in $X \times X$.

(b) Ist die kanonische Projektion $\pi : X \to X/R$ offen, so ist X/R genau dann hausdorffsch, wenn R abgeschlossen in $X \times X$ ist.

(c) Es ist X genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonale $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 28 (1+1+1 Punkte) Es seien X eine Menge, $\beta X_d := \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \text{ Ultrafilter auf } X\}$ und $B(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$. Beweisen Sie:

(a) Für alle $f \in B(X)$, $\mathfrak{F} \in \beta X_d$ existiert $\lim f(\mathfrak{F}) =: \widehat{f}(\mathfrak{F})$ und $\overline{f(X)} = \left\{\widehat{f}(\mathfrak{F}) : \mathfrak{F} \in \beta X_d\right\}$.

(b) Durch $\iota : X \to \beta X_d$, $x \mapsto D_x$ wird X auf eine Teilmenge von βX_d abgebildet, wobei D_x der Punktfilter aller Obermengen von $x \in X$ sei.

(c) Es sei $\mathfrak{T}$ die Initialtopologie auf βX_d, die durch die Abbildungen $\widehat{f}, f \in B(X)$, erzeugt wird. Ferner ist $\iota(X)$ diskret. Dann ist $(\beta X_d, \mathfrak{T})$ ein kompakter Hausdorffraum und $\beta X_d = \overline{\iota(X)}^{\mathfrak{T}}$

(*Hinweis*: Satz von Tychonov.)

Aufgabe 29 (2+2 Punkte) Es sei $(X, \mathfrak{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Es sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Dann ist X beschränkt, d. h. es gibt eine Schranke $M > 0$, so dass $d_X(a, b) < M$ gilt für alle $a, b \in X$.

(b) Es sei $\mathfrak{T}$ von einer Metrik d_X induziert, $f : X \to (Y, d_Y)$ stetig. Dann ist f *gleichmäßig stetig*, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, für das $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, falls $d_X(x, y) < \delta$ für $x, y \in X$ ist.

Aufgabe 30 (2 Punkte) Es seien $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Zeigen Sie: Mit der Produkttopologie ist $\prod_{i\in I} X_i$ hausdorffsch genau dann, wenn $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ hausdorffsch für alle $i \in I$ sind.

Aufgabe 31 (2 Punkte) Es sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ kompakt, $U \in \mathcal{U}_A(X)$. Zeigen Sie:

Dann ist U eine gleichmäßige Umgebung, d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$ für alle $x \in A$.