Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 5. Dezember 2011

Topologie, Übungsblatt 8

Abgabe bis Freitag, den 9. Dezember 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 32 (3 Punkte) Es seien X eine Menge, $\beta X_d = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \text{ Ultrafilter auf } X\}$ und $B(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$. Nach Aufgabe 27 existiert $\widehat{f}(\mathfrak{F}) = \lim f(\mathfrak{F})$ für alle $f \in B(X)$, $\mathfrak{F} \in \beta X_d$, durch $\iota : X \to \beta X_d$, $x \mapsto D_x$ wird X auf eine Teilmenge von βX_d abgebildet und $\mathfrak{T}$ sei die Initialtopologie auf βX_d, die durch die Abbildungen $\widehat{f}, f \in B(X)$, erzeugt wird. Zeigen Sie:

Ist $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung in einen kompakten Hausdorff-Raum Y mit $\overline{\varphi(X)} = Y$, so existiert genau eine stetige Abbildung $\widetilde{\varphi} : \beta X_d \to Y$ mit $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

Aufgabe 33 (1+1 Punkte) (a) Zeigen Sie durch die Wahl einer geeigneten offenen Überdeckung: Die offenen Intervalle $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sind nicht kompakt.

(b) Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ folgenkompakt. Zeigen Sie: Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A gibt es eine Lebesguezahl $\delta > 0$, d. h. für alle $B \subset A$ mit $\sup_{b,b'\in B} d(b, b') < \delta$ existiert ein U_{i_0} mit $B \subset U_{i_0}$.

Aufgabe 34 (3 Punkte) Zeigen Sie: Das Produkt abzählbar vieler folgenkompakter Räume ist wieder folgenkompakt in der Produkttopologie.

Gilt das auch für beliebige Produkte?

Aufgabe 35 (2 Punkte) Folgern Sie den Satz von Tychonov aus dem Satz von Alexander.

Aufgabe 36 (1+1+1 Punkte) Es sei $X = (0, 1)$ und $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, $U_n = (0, 1 - 1/n)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Zeigen Sie:

(a) Das Mengensystem $\mathfrak{T}$ ist eine Topologie auf X.

(b) Jede offene Teilmenge verschieden von X ist kompakt.

(c) Keine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge von X ist kompakt.