Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ
Dr. M. Neuhauser

Aachen, den 13. Dezember 2011

Topologie, Übungsblatt 9

Abgabe bis Freitag, den 16. Dezember 2011, 13:15 Uhr

Aufgabe 37 (3 Punkte) Intervallschachtelungsprinzip In einem metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

(a) Der Raum ist vollständig,

(b) Für alle monoton fallenden Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener, nichtleerer Mengen A_n mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ besteht aus genau einem Punkt. Dabei ist $\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in B\}$ für $B \subset X$.

Aufgabe 38 (1+1+1 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $y \in X$ ein Punkt. Gibt es einen Punkt $a \in A$ mit $d(y,a) = \inf\{d(y,b) : b \in A\}$, wenn

(a) A kompakt ist,

(b) A abgeschlossen ist (betrachte z. B. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$),

(c) $X = \mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Metrik und A abgeschlossen ist.

Aufgabe 39* (1 Sonderpunkt) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu folgender Behauptung: Es sei X ein abzählbarer, kompakter Hausdorff-Raum, $x \in X$. Ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Menge $U_n \subset X$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{x\}$, so ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von x.

Aufgabe 40 (3 Punkte) Die Metriken $d_1(x,y) = |x-y|$ und $d_2(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Es gibt eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_2)$, die keine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_1)$ ist.